



Florian Grabner

florian.grabner@gmx.at

Beispielsammlung Thermodynamik



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Die Hauptsätze der Thermodynamik, Was ist Enthalpie/Entropie, Reversible Ersatzprozess, Grundlegendes der technischen Thermodynamik, Kreisprozesse, Kompressoren und Turbinen, Feuchte Luft, Verbrennungskraftmaschine
- **Kurzzusammenfassung**
Zu Wiederholung, die Hauptsätze der Thermodynamik, der reversible Ersatzprozess und genauere Betrachtung der Größen Enthalpie und Entropie. Danach wird anhand einiger Beispiele die Anwendung der technischen Thermodynamik gezeigt.
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
Technische Mechanik, Kolbenmaschinen, Energie- und Umwelttechnik, 4. & 5. Jhg
- **Mathcad-Version:**
Mathcad 11
- **Literaturangaben:**
**Vorlesungsskriptum "Thermodynamik" TU-Graz, Dr. R. Pischinger
Physik für Ingenieure, P. Dobrinski ua., Teubner
Technische Mechanik 3, Steger ua., Teubner**
- **Anmerkungen bzw. Sonstiges:**
Diese Beispiele wurden in modifizierter Form aus dem Übungs- und Prüfungsbeispielfundus des Institutes für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik der TU-Graz entnommen.

Dieser Beitrag setzt gewisse Vorkenntnisse voraus (Zustandsgrößen, Zustandsänderungen, ideales Gasverhalten, usw).



Inhaltsverzeichnis:

Hier erhalten Sie einen Überblick über die einzelnen Teile des Artikels. Durch Doppelklick auf das jeweilige Schlüsselwort kommen Sie zum entsprechenden Abschnitt

[1. Einführung](#)

[2. Anwendungsbeispiele](#)

[2.1. Luftspeicher](#)

[2.2. Gasturbinenanlage mit Wärmeregeneration](#)

[2.3. Klimatisierung eines Raumes](#)

[2.4. Ausgleichsvorgänge \(Gay Lussac\)](#)

[2.5. Ottomotor](#)



1. Einführung

1.1 Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

In der technischen Thermodynamik betrachtet man immer einen abgegrenzten Raum, das sog. thermodynamische System (später nur als System bezeichnet). Wir unterscheiden zwischen einem geschlossenen und einem stationären oder instationären offenen System.

Betrachtet man nun die einem System zu- bzw abgeführten und gespeicherten Energien - sog. Energiebilanz - so erhält man den 1. Hauptsatz der Thermodynamik.

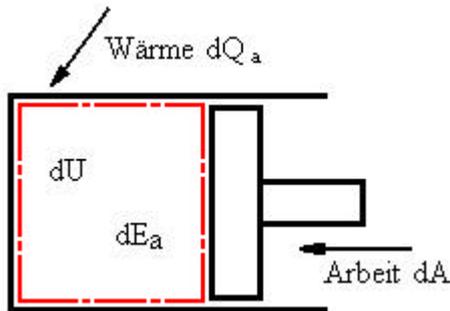


Fig. 1 Geschlossenes System

Für das geschlossene System können wir schreiben:

$$dQ_a + dA = dU + dE_a$$

- dQ_a ... Zu- bzw abgeführte Wärme (von 'a'ußen)
- dA ... Zu- bzw abgeführte Arbeit
- dU ... Änderung der Inneren Energie
- dE_a ... Änderung der Äußeren Energie (potentielle, kinetische)

Anmerkung zur Vorzeichengebung: Dem System zugeführte Energien (Wärme, Arbeit) werden positiv gerechnet. Innere und äußere Energien sind positiv wenn sie erhöht werden.

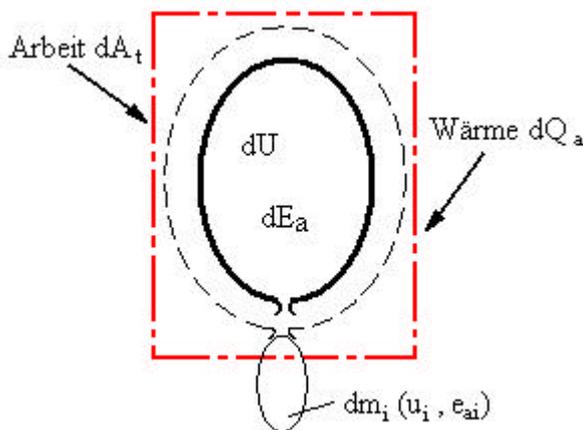


Fig 2. Instationäres offenes System (z.B.Luftballon)

Für das instationäre offene System können wir schreiben:

$$dQ_a + dA_t + \sum dm_i(u_i + e_{ai} + p_i \cdot v_i) = dU + dE_a$$

Da der Anteil der Einschiebearbeit getrennt berücksichtigt wird indiziert man die Arbeit häufig mit einem t (technische). Ähnliches gilt für die Wärme; Um zwischen dem Wärmefluss über die Systemgrenzen und der Inneren Reibungswärme (die zu einer Erhöhung der Inneren Energie führt) zu unterscheiden indiziert man mit einem a (äußere).

- dm_i ... zu- bzw. abgeführte Masse
- u_i ... Innere Energie von dm_i
- e_{ai} ... Äußere Energie von dm_i
- $p_i \cdot v_i$... Einschiebearbeit (Kraft x Weg)

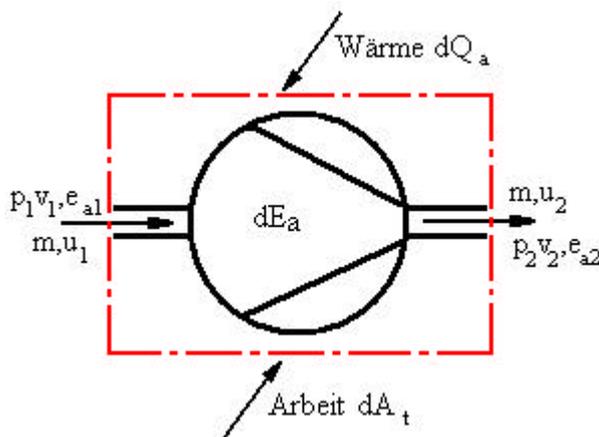


Fig 3. Stationäres offenes System (z.B. Kompressor)

Im Fall eines konstanten Massenstromes und einem stationären Betrieb (Innere Energie und Äußeren Energien des Systems ändert sich über die Zeit nicht) vereinfacht sich die obrige Gleichung zu:

$$q_a + a_t + u_1 + p_1 \cdot v_1 + e_{a1} = u_2 + p_2 \cdot v_2 + e_{a2}$$

$$a_t = (u_2 + p_2 \cdot v_2) - (u_1 + p_1 \cdot v_1) + e_{a2} - e_{a1} - q_a$$

Vorallem dem Fall eines stationären offenen Systems (sog. stationärer Fließprozess) kommt in der Technik besondere Bedeutung zu (Turbinen, Kompressoren, Strömung, Prozesse in der Verfahrenstechnik). Man vereinfacht deshalb nochmals und fasst die Inneren Energien und die entsprechenden Verschiebearbeiten zu einer neuen Größe zusammen, der Enthalpie.

1.2. Die Enthalpie - H, h

Die Enthalpie ist die bei einem bestimmten Druck gespeicherte Energie (Wärme) die sich aus Innerer Energie und dem Produkt aus Druck und Volumen, der Druckenergie, zusammensetzt:

$$H = U + p \cdot V \quad \text{bzw bezogen auf 1 kg des Stoffes} \quad h = u + p \cdot v$$

Die Definition der Enthalpie geht auf J.W. Gibbs zurück. Der Begriff leitet sich aus dem griechischen εν (en; meistens in) und θερμότης (thalpos; Wärme, Hitze) ab - also "in der Wärme".

Durch Einführung der Enthalpie vereinfacht sich der 1. Hauptsatz für offene Systeme wesentlich.

stationär: $a_t = h_2 - h_1 + e_{a1} - e_{a2} - q_a$

instationär: $dQ_a + dA_t + \sum dm_i(h_i + e_{ai}) = dU + dE_a$

1.3. Der Reversible Ersatzprozess

Aus eigener Erfahrung wissen wir, dass bei jedem natürlichen Vorgang Reibung im Spiel ist, d.h. Prozesse sind verlustbehaftet. Reibung geht immer in Wärme über und man muss mehr Arbeit aufwenden als der entsprechende ideale Prozess erfordern würde. Es stellt sich nun die Frage ob man den Anteil der Reibung der Wärme oder der Arbeit zuordnet.

Energetisch gesehen macht es keinen Unterschied ob die Reibungswärme in Form von Arbeit oder äußerer Wärme zugeführt wird. Die nachfolgenden Figuren zeigen diese beiden Systeme (1. Hauptsatz zeigt, dass beide energetisch gleichwertig sind).

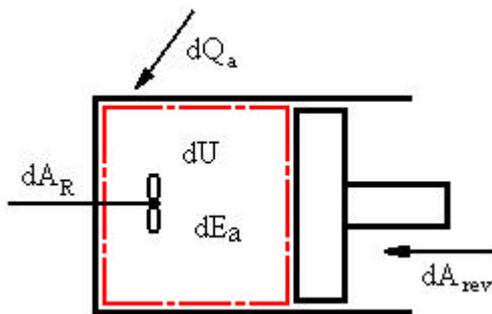


Fig. 4 a) Tatsächlicher Prozess

$$dQ_a + dA_R + dA_{rev} = dU + dE_a$$

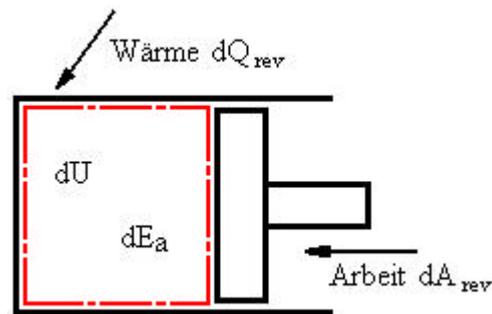


Fig. 4 b) Reversible Ersatzprozess

$$dQ_{rev} + dA_{rev} = dU + dE_a$$

In beiden Fällen nehmen wir an, dass die äußern Energien Null sind (wie im System gezeichnet). Der Index "rev" zeigt an, dass die Energie reversibel ist. Nach der obigen Überlegung muss gelten:

$$dQ_R = dA_R$$

Somit ergibt sich für sie sogenannte reversible Wärme folgender Zusammenhang:

$$dQ_{rev} = dQ_a + dQ_R$$

Da in unserem System nur Volumsänderungsarbeit auftritt kann man die Definitionsgleichung der reversiblen Wärme nach Umformung des 1. Hauptsatzes erhalten:

$$dQ_{rev} - p \cdot dV = dU \quad (\text{laut Vorzeichenvereinbarung sind zugeführte Arbeiten positiv, das Volumen verkleinert sich aber - negatives Vorzeichen})$$

$$dQ_{rev} = dU + p \cdot dV \quad \text{bzw} \quad dq_{rev} = du + p \cdot dv$$

Drückt man die reversible Wärme durch die Enthalpie aus, so kann man auch schreiben

$$dQ_{rev} = dH - V \cdot dp \quad \text{bzw} \quad dq_{rev} = dh - v \cdot dp$$

1.4. Die Entropie - S,s

Wir wissen nun, dass Prozesse in der Natur immer irreversibel sind (Reibung, Mischungsvorgänge, Wärmetransport, usw). Es gibt nun eine Zustandsgröße die es uns erlaubt die Möglichkeit einer Zustandsänderung in einem abgeschlossenen System zu bestimmen (der Zusatz abgeschlossen - also weder Stoff- noch Wärmeströme über die Systemgrenze - ergibt sich aus der Herleitung, stellt aber keine Beschränkung dar, denn die Systemgrenzen können immer so groß gewählt werden, das ein solches vorliegt).

Die gesuchte Größe ist die Entropie!

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad \text{bzw} \quad ds = \frac{dq_{\text{rev}}}{T}$$

Wie kann man sich die Entropie vorstellen?

Nun die Entropie ist ein Maß für die Unordnung. Ein System strebt immer nach einem Maximum der Unordnung, d.h. die Entropieänderung ist immer positiv - Entropie strebt zu einem Maximum. Es bedarf natürlich, für ein vollständiges Verständniss der Entropie, weit mehr als hier zu sagen angebracht wäre. Dieses tiefere Verständniss ist für die reine Berechnung, sprich Verwendung dieser Zustandsgröße aber nicht notwendig.

Ein sehr plakatives Beispiel ist ein Kinderzimmer. Es bedarf keines großen Aufwandes das Zimmer in Unordnung zu bringen. Um den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen ist aber ein erheblicher Arbeitsaufwand nötig.

1.5. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 2. Hauptsatz fasst nun die Erkenntnisse bezüglich der Irreversibilität zusammen:

$\sum dS_i \geq 0$ **Alle natürlichen Prozesse sind irreversibel** oder in einem abgeschlossenen System nimmt die Summe aller Entropien zu, im Grenzfall des Reversibilität bleibt sie Null. Sie kann aber niemals negativ werden.

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)

2. Anwendungsbeispiele

2.1. Luftspeicher

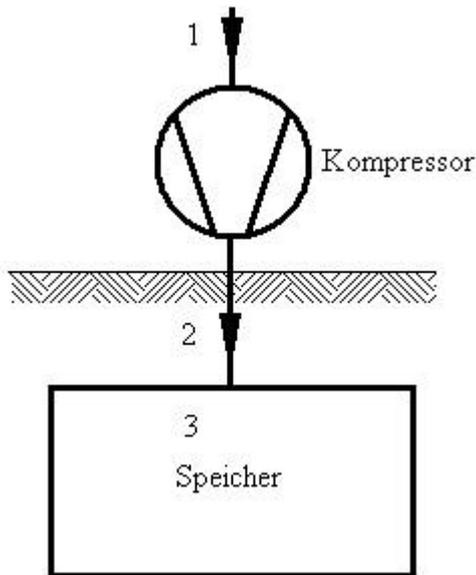


Fig. 5 Luftspeicher mit Kompressor

In einem Luftspeicher-Gasturbinenkraftwerk wird zur Deckung von Spitzenlasten während 8 lastschwacher Stunden Luft vom Umgebungszustand mit einem gekühlten Verdichter reibungsfrei polytrop auf den Druck $p_2 = p_3$ verdichtet, wobei sich eine zeitlich konstante Temperatur $T_2 = 450 \text{ K}$ einstellt. Die Luft gelangt dann in einen unterirdischen Speicher mit einem Volumen von $300\,000 \text{ m}^3$.

Die untere Grenze des Speicherdruckes p_3 beträgt 50 bar und die obere Grenze liegt bei 65 bar . Der Massenstrom während des Auffüllvorganges ist zeitlich konstant. Die Temperatur der Luft im Speicher ($T_3 = 350 \text{ K}$; Gleich der Temperatur des Erdreiches) bleibt während des Auffüllvorganges konstant.

Konstante spezifische Wärmen der Luft können angenommen werden.

- Welche Masse wird während des Auffüllvorganges in den Speicher eingefüllt?
- Für welche maximale Leistung muss der Verdichter ausgelegt sein?
- Welche Wärmemenge muss während des Auffüllvorganges mit dem Erdreich ausgetauscht werden?

Umgebungszustand	$T_1 := 298 \text{ K}$	$p_1 := 1 \text{ bar}$
Temperatur am Kompressoraustritt	$T_2 := 450 \text{ K}$	
Temperatur im Luftspeicher	$T_3 := 350 \text{ K}$	
Volumen des Luftspeichers	$V_3 := 300\,000 \text{ m}^3$	
Druck im Speicher vor dem Auffüllen	$p_{3v} := 50 \text{ bar}$	
Druck im Speicher nach dem Auffüllen	$p_{3n} := 65 \text{ bar}$	
<u>Stoffwerte:</u> Gaskonstante von Luft	$R := 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$	
Spezifische Wärmen	$c_p := 1.004 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$	$c_v := 0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
Isentropenexponent von Luft	$\kappa := 1.4$	

ad a. Die zugeführte Masse errechnet sich einfach aus der Differenz der Massen vor und nach dem Auffüllvorgang. Die Masse erhält man durch Umformung der Gasgleichung:

Gasgleichung $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$

$$m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

Zugeführte Masse $\Delta m := \frac{V_3}{R \cdot T_3} (p_{3n} - p_{3v})$

$$\Delta m = 4.48 \times 10^6 \text{ kg}$$

ad b. Der Kompressor braucht die größte Leistung am Ende des Auffüllens, wenn im Speicher der maximale Druck herrscht. Wir setzen um die Leistung zu berechnen, den ersten Hauptsatz für den Kompressor (stationären Fließprozess) an:

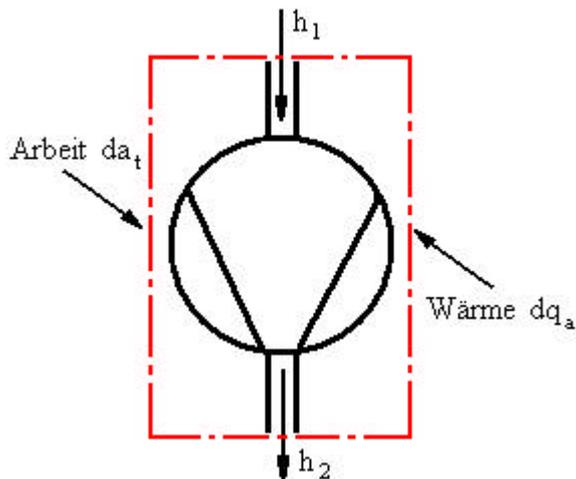


Fig. 6 Kompressor - stationärer Fließprozess

$$a_t = h_2 - h_1 - q_a$$

Wir wissen aus der Angabe, dass die Kompression reibungsfrei erfolgt und können sagen

$$dq_a = dq_{rev} = dh - v \cdot dp$$

$$q_a = h_2 - h_1 - \int v \, dp$$

Setzen wir nun in den 1. HS ein so erhalten wir

$$a_t = \int v \, dp$$

Dieser Weg ist dann sinnvoll, wenn die Zustandsänderung reibungsfrei erfolgt (weil die Reibungswärme sonst als Unbekannte in der Gleichung stehen würde) und wenn die Art der Zustandsänderung bekannt ist. In diesem Fall handelt es sich um eine polytrope Zustandsänderung.

Polytropengleichung

$$p_1 \cdot v_1^n = p \cdot v^n = \text{konst}$$

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{v}{v_1} \right)^n$$

$$v = v_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{mit} \quad p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

$$v = R \cdot T_1 \cdot p_1^{\frac{1-n}{n}} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Diese Gleichung kann nun leicht integriert werden. Einzig der Polytropenexponent muss vorher noch ermittelt werden. Dazu gehen wir wieder von der Polytropengleichung aus

$$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n = \left(\frac{R \cdot T_2 \cdot p_1}{R \cdot T_1 \cdot p_2} \right)^n \quad \text{mit} \quad p_2 := p_{3n}$$

$$n := \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{T_2 \cdot p_1}{T_1 \cdot p_2}\right)}$$

$$n = 1.10955$$

Nun kann man die maximal erforderliche Kompressorleistung leicht berechnen

$$a_t := \int_{p_1}^{p_{3n}} R \cdot T_1 \cdot p_1^{\frac{1-n}{n}} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{n}} dp$$

$$a_t = 441.833 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Laut Angabe dauert der Auffüllvorgang 8 Stunden, somit entspricht das einem Massenstrom von

$$m_{\text{st}} := \frac{\Delta m}{8h}$$

$$m_{\text{st}} = 155.55 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Die maximal erforderlicher Leistung beträgt demnach

$$P_K := a_t \cdot m_{\text{st}}$$

$$P_K = 68.727 \text{ MW}$$

ad c. Um die ausgetauschte Wärmemenge zu berechnen betrachten wir den Speicher als System.

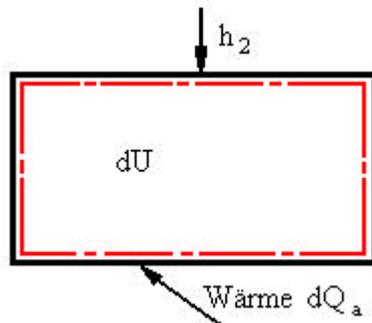


Fig. 7 Luftspeicher - Offenes instationäres System

Der Speicher ist ein offenes instationäres System.
Der 1. HS für diesen Fall lautet allgemein

$$dA_t + dQ_a + \sum dm_i (h_i + e_{ai}) = dU + dE_a$$

Kein Arbeitsfluss über die Systemgrenzen

$$dA_t = 0$$

Äußere Energie der Massenstromes vernachlässigbar

$$e_{a2} = 0$$

Äußere Energie der Gesamtsystems unverändert

$$dE_a = 0$$

Temperatur im Speicher bleibt gleich

$$du = 0$$

Da nur ein Massenstrom zufließt vereinfacht sich der 1. HS zu

$$dQ_a + h_2 \cdot dm = dU$$

$$dQ_a + h_2 \cdot dm = u \cdot dm + m \cdot du$$

$$dQ_a + h_2 \cdot dm = u \cdot dm$$

Nach Integration erhält man die Bestimmungsgleichung für die ausgetauschte Wärme

$$Q_a = u \cdot \Delta m - h_2 \cdot \Delta m$$

Die Innere Energie und die Enthalpie berechnet man mit Hilfe der spezifischen Wärme. Allgemein gilt

$$c = \frac{dq_{\text{rev}}}{dT}$$

Setzt man die Definitionsgleichung der reversiblen Wärme ein so erhält man

$$c = \frac{du + p \cdot dv}{dT} = \frac{dh - v \cdot dp}{dT}$$

Betrachtet man nun eine isochore bzw. eine isobare Zustandsänderung zu erhält man die benötigten Beziehungen

$$du = c_v \cdot dT \quad \text{bzw} \quad dh = c_p \cdot dT$$

Mit der Annahme, dass die spezifischen Wärmen konstant bleiben (nicht von der Temperatur abhängen) wählen wir für Innere Energie und Enthalpie den Nullpunkt bei 0 Kelvin.

Damit können wir schreiben

$$Q_a = c_v \cdot (T_3 - 0) \cdot \Delta m - c_p \cdot (T_2 - 0) \cdot \Delta m$$

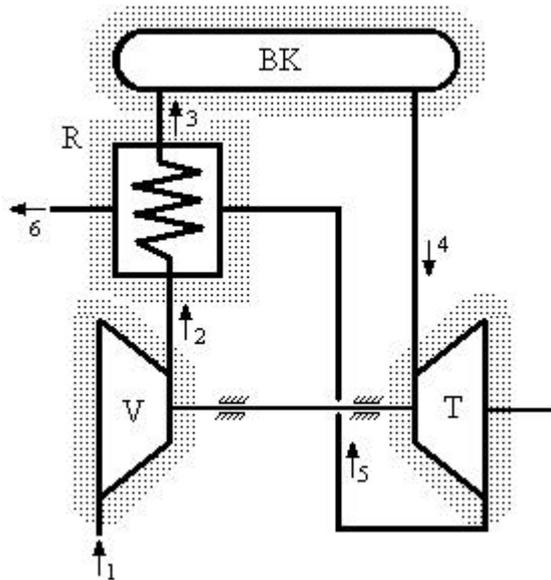
$$Q_a := (c_v \cdot T_3 - c_p \cdot T_2) \cdot \Delta m$$

$$Q_a = -899.776 \text{ GJ}$$

Das negative Vorzeichen zeigt an (nach unserer Vorzeichenvereinbarung), dass die Wärme abgeführt wird, was auch unseren Erwartungen entspricht.

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)

2.2. Gasturbinenanlage mit Wärmeregeneration



Eine stationäre Gasturbinenanlage mit Wärmeregeneration (Rückführung eines Teiles der Abgaswärme) hat ein Druckverhältnis im Verdichter (V) $p_2/p_1 = 3$ und eine Temperatur am Turbineneintritt $t_4 = 600^\circ\text{C}$. Es werden $V = 16500 \text{ m}^3/\text{h}$ Luft mit Umgebungszustand angesaugt.

Verdichter- und Turbinenwirkungsgrad betragen $\eta_{i,s} = 0.85$; der mechanische Wirkungsgrad der Anlage beträgt $\eta_m = 0.9$

Der Brennstoff hat einen Heizwert $H_u = 40000 \text{ kJ/kg}$ und benötigt je kg die stöchiometrische Luftmenge $L_{\min} = 14.7 \text{ kg/kg}$. Für das Arbeitsgas können die Stoffgrößen für Luft eingesetzt werden; Die Temperaturdifferenz im Regenerator (R) kann vernachlässigt werden!

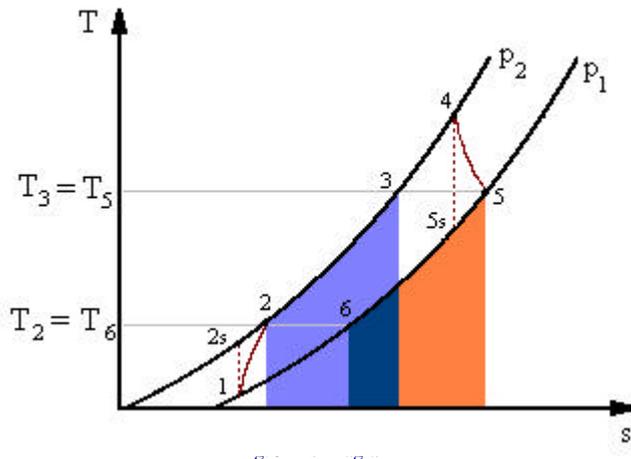
Verdichter, Regenerator, Brennkammer und Turbine sind als adiabatisch anzunehmen. Die Massenzunahme infolge des Brennstoffes ist vernachlässigbar klein.

Fig. 8 Gasturbinenanlage mit Wärmeregeneration

- Der Prozess ist im T-s-Diagramm darzustellen
- Welche Nutzleistung wird erreicht?
- Mit welchem Luftverhältnis λ verbrennt der Brennstoff?
- Welche Wärmemenge muss als Verlustwärme abgeführt werden?

Umgebungszustand	$T_1 := 298\text{K}$	$p_1 := 1\text{bar}$
Druckverhältnis im Verdichter	$p_2 := 3 \cdot p_1$	
Temperatur am Turbineneintritt	$T_4 := 873\text{K}$	
Angesaugter Volumenstrom	$V_{\text{st}} := 16500 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$	
Innerer isotroper Wirkungsgrad	$\eta_{i,s} := 0.85$	
Mechanischer Wirkungsgrad	$\eta_m := 0.9$	
Untere Heizwert des Brennstoffes	$H_u := 40000 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	
Stöchiometrischer Luftbedarf	$L_{\min} := 14.7$	
<u>Stoffwerte:</u> Gaskonstante von Luft	$R := 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$	
Molwärme (von 0°C bis 100°C)	$C_{\text{mp}100} := 29.17 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$	
Molwärme (von 0°C bis 400°C)	$C_{\text{mp}400} := 29.80 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$	
Molwärme (von 0°C bis 600°C)	$C_{\text{mp}600} := 30.42 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$	
Molmasse für Luft	$M := 28.96 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$	

ad a.

Zustandsänderungen im T-s-Diagramm

- 1-2 Kompression. Reibungsbehafteter adiabater Vorgang. Man berechnet die ideale isentrope Verdichtung (2s) und mit $\eta_{i,s}$ auf Zustand 2 zurück.
- 2-3 Wärmezufuhr durch Regeneration, isobarer Vorgang (keine Reibungsverluste) die Temp. in Zustand 3 entspricht der Turbinenaustrittstemp. T_5 (keine Temp.-diff. im Wärmetauscher)
- 3-4 Isobare Verbrennung, verlustfrei
- 4-5 Turbine. Gleiche Vorgangsweise wie beim Verdichter
- 5-6 Regeneration, die Flächen unter der Isobaren p_1 zwischen 5 und 6 muss gleich groß sein wie unter p_2 zwischen 2 und 3.

ad b. Um die Nutzleistung zu berechnen setzt man die Leistungsbilanz an der gemeinsamen Welle an.

$$P_{Te} - P_{Ke} - P_N = 0 \quad (\text{Index "e" für effektive})$$

Da der Massenzuwachs durch den zugeführten Brennstoff vernachlässigt werden kann bleibt der Massenstrom konstant und es gilt

$$P_N = (a_{Te} - a_{Ke}) \cdot m_{st}$$

Da der Verdichter und die Turbine auf einer gemeinsamen Welle sitzen kann man die mechanischen Verluste nur für die gesamte Anlage angeben. In der Regel mit einem auf die Turbine bezogenen mechanischen Wirkungsgrad.

$$P_N = (a_{Ti} \cdot \eta_m - a_{Ki}) \cdot m_{st} \quad (\text{Index "i" für innere})$$

Verdichter:

Isentropengleichung

$$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa$$

Gasgleichung

$$p_i \cdot v_i = R \cdot T_i$$

$$v_i = \frac{R \cdot T_i}{p_i}$$

Daraus folgt durch einsetzen und umformen

$$T_{2s} = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Aufgrund der großen Temperaturunterschiede ist die Temperaturabhängigkeit von κ zu berücksichtigen. Da wir die gewünschte Temperatur T_{2s} aber noch nicht kennen, nehmen wir diese an und korrigieren iterativ bis wir ein vernünftiges Ergebnis erhalten.

$$T_{2s} := 400K$$

$$c_{pK} := \frac{C_{mp100}}{M}$$

$$c_{pK} = 1.007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

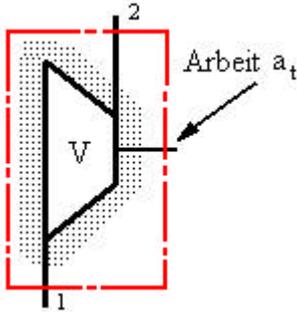
$$\kappa := \frac{c_{pK}}{c_{pK} - R} \quad \kappa = 1.398$$

$$T_{2s} := T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad T_{2s} = 407.534 \text{ K}$$

Aufgrund der Angaben genügt uns dieses Ergebnis (100°C-Sprünge der Molwärmern)

Temperatur im Zustand 2

$$\eta_{i,s} = \frac{a_{Ks}}{a_{Ki}} = \frac{c_{pK} \cdot (T_{2s} - T_1)}{c_{pK} \cdot (T_2 - T_1)}$$



$$T_2 := T_1 + \frac{T_{2s} - T_1}{\eta_{i,s}} \quad T_2 = 426.864 \text{ K}$$

Der 1. Hauptsatz für den stationären Fließprozess liefert uns

$$a_t = h_2 - h_1$$

$$a_t = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Fig. 10 Verdichter - stationärer Fließprozess

Innere Kompressorleistung

$$a_{Ki} = \frac{a_t}{\eta_{i,s}}$$

$$a_{Ki} := c_{pK} \cdot (T_2 - T_1) \quad a_{Ki} = 129.798 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Turbine: Die Berechnung für die Turbine erfolgt analog zu der soeben durchgeführten. Vorsicht ist bei der Wirkungsgraddefinition geboten!

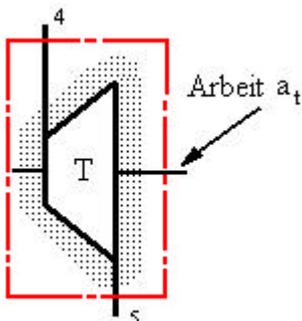
$$T_{5s} := 653 \text{ K}$$

$$c_{pT} := \frac{C_{mp600} \cdot (T_4 - T_0) - C_{mp400} \cdot (T_{5s} - T_0)}{M \cdot (T_4 - T_{5s})} \quad c_{pT} = 1.087 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\kappa := \frac{c_{pT}}{c_{pT} - R} \quad \kappa = 1.359$$

$$T_{5s} := T_4 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad T_{5s} = 653.26 \text{ K}$$

$$\eta_{i,s} = \frac{a_{Ki}}{a_{Ks}} = \frac{c_{pT} \cdot (T_5 - T_4)}{c_{pT} \cdot (T_{5s} - T_4)}$$



$$T_5 := T_4 + (T_{5s} - T_4) \cdot \eta_{i,s} \quad T_5 = 686.221 \text{ K}$$

1. Hauptsatz für stationären Fließprozess liefert uns wieder

$$a_t = h_5 - h_4$$

$$a_t = c_p \cdot (T_5 - T_4)$$

Fig. 11 Turbine - stationärer Fließprozess

Innere Kompressorleistung

$$a_{Ki} = -a_t \cdot \eta_{is}$$

$$a_{Ti} := -c_{pT} \cdot (T_5 - T_4)$$

$$a_{Ti} = 203.103 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Massenstrom

$$m_{st} := V_{st} \cdot \frac{p_1}{R \cdot T_1}$$

$$m_{st} = 5.359 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Nutzleistung

$$P_N := m_{st} \cdot (a_{Ti} \cdot \eta_m - a_{Ki})$$

$$P_N = 283.994 \text{ kW}$$

ad c.

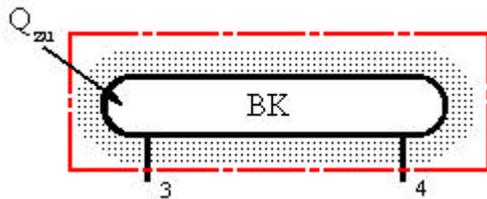


Fig. 12 Brennkammer - stationärer Fließprozess

Um das Luftverhältnis zu berechnen, brauchen wir die Menge des zugeführten Brennstoffes. Wir setzen also den 1. HS für die Brennkammer an unter folgenden Annahmen:

- 1.) Die Verbrennung erfolgt isobar
- 2.) Die Verbrennung erfolgt vollständig ohne Verluste
- 3.) Die Enthalpie des Brennstoffstromes kann vernachlässigt werden
- 4.) Massenzunahme ist vernachlässigbar klein

$$Q_{zu} + m_{st} \cdot h_3 - m_{st} \cdot h_4 = 0$$

$$m_B \cdot H_u + m_{st} \cdot (h_3 - h_4) = 0$$

$$m_B = m_{st} \cdot \frac{h_4 - h_3}{H_u}$$

Wärmeregeneration (siehe T-s-Diagramm) $T_3 := T_5$

spezifische Wärme

$$c_{pBK} := \frac{C_{mp600} \cdot (T_4 - T_0) - C_{mp400} \cdot (T_3 - T_0)}{M \cdot (T_4 - T_3)} \quad c_{pBK} = 1.098 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Brennstoffmenge pro Sekunde

$$m_B := m_{st} \cdot c_{pBK} \cdot \frac{T_4 - T_3}{H_u} \quad m_B = 0.027 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

tatsächliche Luftmenge je kg Brennstoff

$$L := \frac{m_{st}}{m_B} \quad L = 195.082$$

Luftverhältnis

$$\lambda := \frac{L}{L_{min}} \quad \lambda = 13.271$$

ad d.

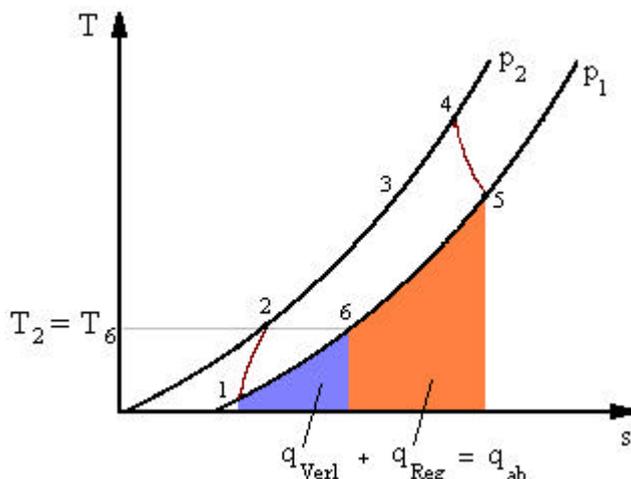


Fig. 13 T-s-Diagramm - Abgeführte Wärme

Betrachten wir das nebenstehende T-s-Diagramm so sehen wir folgendes:

Nicht die gesamte Abwärme (q_{ab}) geht verloren sondern ein Teil (q_{Reg}) kann zum aufheizen des angesaugten Luftstromes verwendet werden und ein kleinerer Teil ist tatsächlicher Verlust (q_{Verl}).

Da die Fläche im T-s-Diagramm die reversible Wärme darstellt (siehe Definition) kann man die Verlustwärme leicht berechnen.

Es gilt: $dq_{rev} = T \cdot ds$

$$dq_{rev} = dh - v \cdot dp$$

Für die Fläche unter einer Isobaren, wie in unserem Fall, gilt besonders

$$dq_{\text{rev}} = dh$$

$$q_{\text{rev}} = c_p \cdot (T_1 - T_6) \quad \text{mit} \quad T_6 := T_2$$

Da das Arbeitsmedium nach dem Regenerationprozess in die Umgebung fließt handelt es sich um keinen echten Kreisprozess. Wir können allerdings die Lücke durch eine gedachte Wärmeabgabe schließen. Diese Wärmeabgabe ist die gefragte Verlustwärme und kann nach obiger Gleichung berechnet werden. Da es sich um eine abgegebene Wärme handelt (neg. Vorzeichen) indizieren wir mit "Verl" (Verlust) und drehen das Vorzeichen um.

$$c_{pV} := c_{pK}$$

$$q_{\text{Verl}} := c_{pV} \cdot (T_6 - T_1)$$

$$q_{\text{Verl}} = 129.798 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_{\text{Verl}} := m_{\text{st}} \cdot q_{\text{Verl}}$$

$$Q_{\text{Verl}} = 695.589 \text{ kW}$$

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)

2.3. Klimatisierung eines Raumes

Zur Klimatisierung eines Raumes werden $\dot{V}_{st} = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ Frischluft mit der Temperatur $t = 18^\circ\text{C}$ und der relativen Feuchte $\phi = 0.60$ beim Druck $p = 1 \text{ bar}$ benötigt. Dieser Luftstrom soll durch isobare Mischung von Umgebungsluft und abgesaugter Luft aus dem klimatisierten Raum erzeugt werden.

Die Umgebungsluft hat die Temperatur $t_1 = 12^\circ\text{C}$ und die Taupunkttemperatur $t_{1\text{Tau}} = 8^\circ\text{C}$ beim Druck $p_1 = 1 \text{ bar}$, während die Abluft bei der Temperatur $t_2 = 22^\circ\text{C}$ und der relativen Feuchte $\phi_2 = 0.65$ unter dem Druck $p_2 = 1 \text{ bar}$ zu Verfügung steht.

- Man bestimme die Volumenströme \dot{V}_{st1} der Umgebungsluft und \dot{V}_{st2} der Abluft, die bei der Mischung benötigt werden.
- Welcher Wärmestrom \dot{Q}_{st} ist der Mischkammer zu- oder abzuführen?

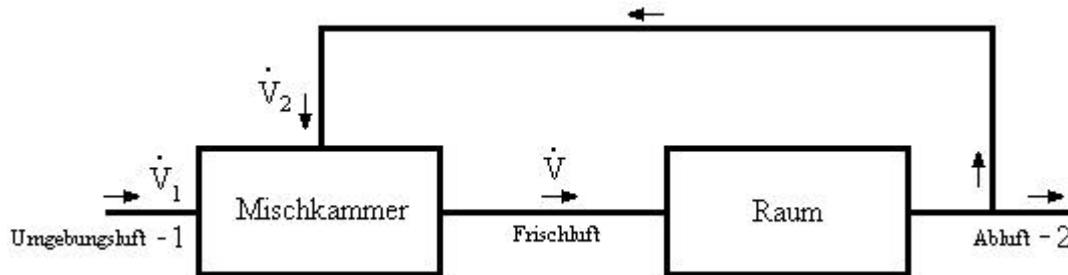


Fig. 14 Schaltbild Raumklimatisierung

Zustandsgrößen Frischluft

$$p := 1 \text{ bar} \quad T := 291 \text{ K} \quad t := T - T_0$$

$$\phi := 0.60 \quad V := 0.1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Zustandsgrößen Umgebungsluft

$$T_1 := 285 \text{ K} \quad t_1 := T_1 - T_0$$

Zustandsgrößen Abluft

$$T_2 := 295 \text{ K} \quad t_2 := T_2 - T_0 \quad \phi_2 := 0.65$$

Stoffgrößen: Luft

$$R_l := 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad c_{pl} := 1.00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Wasserdampf

$$R_d := 461.50 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad c_{pd} := 4.19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Verdampfungswärme

$$r_0 := 2500 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Sättigungdruck des Wasserdampfes bei 18°C

$$p'_{d18} := 0.02062 \text{ bar}$$

Sättigungdruck des Wasserdampfes bei 22°C

$$p'_{d22} := 0.02642 \text{ bar}$$

Sättigungdruck des Wasserdampfes bei 8°C

$$p'_{d8} := 0.010720 \text{ bar}$$

ad a. Die Volumenströme bekommen wir aus der Massenbilanz der Mischkammer.
(Da wir in diesem Beispiel immer mit Massen- und Volumenströmen rechnen schreiben wir nur m bzw V - ohne Punkt)

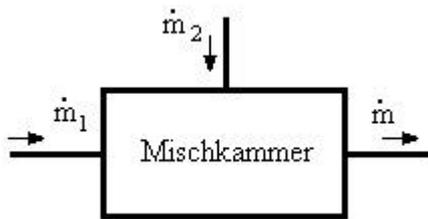


Fig. 15 Stoffströme der Mischkammer

$$m = m_1 + m_2$$

Da man Luft nicht in Wasserdampf und umgekehrt umwandeln kann muss auch eine Komponentenweise Massenbilanz erfüllt sein.

$$m_d = m_{d1} + m_{d2}$$

$$m_l = m_{l1} + m_{l2}$$

Mit der Definition des Feuchtegrades kann nun geschrieben werden.

$$x = \frac{m_d}{m_l}$$

$$x \cdot m_l = x_1 \cdot m_{l1} + x_2 \cdot m_{l2}$$

$$x \cdot m_l = x_1 \cdot m_{l1} + x_2 \cdot (m_l - m_{l1})$$

$$m_{l1} = m_l \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

Wir brauchen somit nur den Massestrom der trockenen Luft nach der Mischung und die Feuchtegrade der einzelnen Zustände zu berechnen.

Massenstrom der trockenen Luft

$$p_l \cdot V = m_l \cdot R_l \cdot T$$

$$p_l = p - p_d$$

$$p_l := p - \phi \cdot p'_{d18}$$

$$p_l = 0.988 \text{ bar}$$

$$m_l := \frac{p_l \cdot V}{R_l \cdot T}$$

$$m_l = 0.118 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Feuchtegrad der Frischluft

$$x = \frac{m_d}{m_l}$$

$$x = \frac{p_d \cdot R_l}{p_l \cdot R_d}$$

$$x := \frac{R_l}{R_d} \cdot \frac{p - p_l}{p_l}$$

$$x = 0.00779$$

Feuchtegrad der Abluft

$$p_{l2} := p - \phi_2 \cdot p'_{d22}$$

$$p_{l2} = 0.983 \text{ bar}$$

$$x_2 := \frac{R_l}{R_d} \cdot \frac{p - p_{l2}}{p_{l2}}$$

$$x_2 = 0.010866$$

Feuchtegrad der Umgebungsluft

$$p_{l1} := p - p'_{d8}$$

$$p_{l1} = 0.989 \text{ bar}$$

$$x_1 := \frac{R_l}{R_d} \cdot \frac{p - p_{l1}}{p_{l1}}$$

$$x_1 = 0.006739$$

Massenstrom der trockenen Umgebungsluft

$$m_{11} := m_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$m_{11} = 0.088 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Volumenstrom der trockenen Umgebungsluft

$$V_1 := m_{11} \cdot \frac{R_l \cdot T_1}{p_{l1}}$$

$$V_1 = 0.073 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Massenstrom der trockenen Abluft

$$m_{12} := m_1 - m_{11}$$

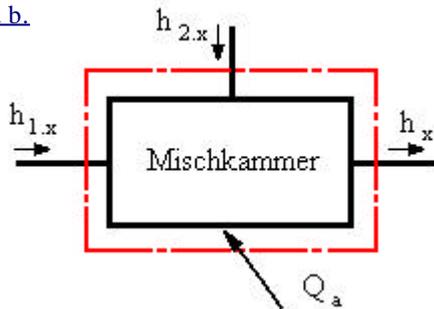
$$m_{12} = 0.03 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Volumenstrom der trockenen Umgebungsluft

$$V_2 := m_{12} \cdot \frac{R_l \cdot T_2}{p_{l2}}$$

$$V_2 = 0.026 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

ad b.



Um die Frage nach dem Wärmeaustausch der Mischkammer mit der Umgebung zu beantworten schauen wir uns den 1. HS angewendet auf die Mischkammer an. Wir beziehen dabei alle Größen auf 1 kg trockene Luft (Index "x" - in der Literatur "1+x").

$$h_{1,x} \cdot m_{11} + h_{2,x} \cdot m_{12} - h_x \cdot m_1 + Q_a = 0$$

Fig. 16 Mischkammer - stationärer Fließprozess

Die Enthalpie der feuchten Luft bezogen auf 1 kg trockene Luft errechnet sich mit

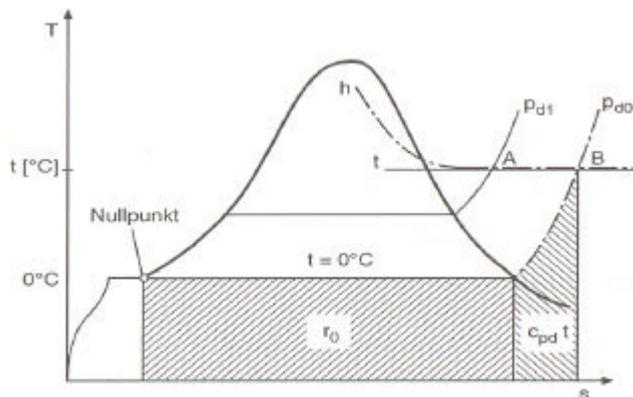


Fig. 17 T-s-Diagram für Wasser

$$h_x = h_l + x \cdot h_d$$

Legen wir den Nullpunkt bei 0°C (bei Wasser flüssiger Zustand) fest (siehe Fig. 17) dann kann man schreiben.

$$h_x = c_{pl} \cdot t + x \cdot (r_0 + c_{pd} \cdot t)$$

Enthalpie - Frischluft

$$h_x := c_{pl} \cdot t + x \cdot (r_0 + c_{pd} \cdot t)$$

$$h_x = 38.063 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Enthalpie - Umgebungsluft

$$h_{1,x} := c_{pl} \cdot t_1 + x_1 \cdot (r_0 + c_{pd} \cdot t_1)$$

$$h_{1,x} = 29.186 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Enthalpie - Abluft

$$h_{2,x} := c_{pl} \cdot t_2 + x_2 \cdot (r_0 + c_{pd} \cdot t_2)$$

$$h_{2,x} = 50.167 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

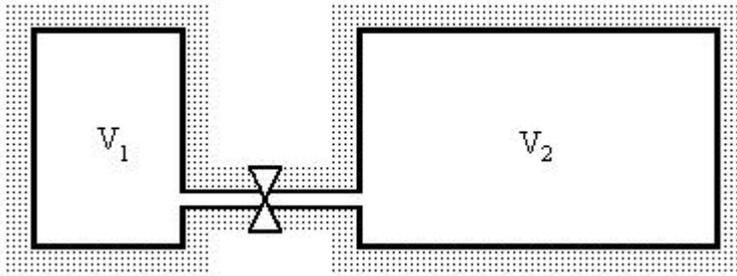
Abgegebene Wärme

$$Q_a := h_x \cdot m_1 - h_{1,x} \cdot m_{11} - h_{2,x} \cdot m_{12}$$

$$Q_a = 417.706 \text{ W}$$

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)

2.4. Ausgleichsvorgänge (Gay Lussac)



In zwei wärmeisolierten Behältern, die durch ein vorerst geschlossenes Ventil verbunden sind, befindet sich jeweils Luft mit folgendem Zustand:

Fig. 18 Wärmeisolierte Behälter

Behälter 1:	$V_1 := 3\text{l}$	Behälter 2:	$V_2 := 10\text{l}$	Stoffwerte:	$\kappa := 1.4$
	$p_{1v} := 12\text{bar}$		$p_{2v} := 4\text{bar}$		$R := 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
	$T_{1v} := 303\text{K}$		$T_{2v} := 323\text{K}$		
	$t_{1v} := 30^\circ\text{C}$		$t_{2v} := 50^\circ\text{C}$		

- 1.) Das Ventil wird so lange geöffnet, bis sich Druck und Temperatur ausgeglichen haben.
- 2.) Das Ventil wird nur so lange geöffnet, bis Druckgleichgewicht herrscht. Der Wärmefluss zwischen den beiden Behältern kann vernachlässigt werden.
 - a.) Welchen Zustand hat die Luft in den Behältern nach dem Überströmen
 - b.) Berechne die Entropiezunahme die durch den Ausgleichsvorgang verursacht wird.

ad a. Um die Frage nach dem Zustand zu beantworten, setzen wir zunächst den 1. HS an. Als System wählen wir beide Behälter zusammen.

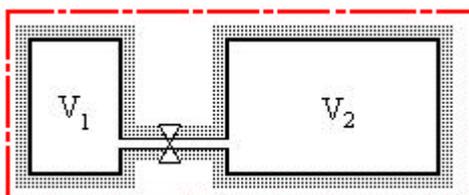


Fig. 19 Beide Behälter - abgeschlossenes System

$$dQ_a + dA = dE_a + dU$$

Da weder Arbeit noch Wärme über die Systemgrenzen fließen und sich auch die äußeren Energien nicht ändern vereinfacht sich die Gleichung zu.

$$dU = 0$$

Die gesamte Innere Energie die vor Öffnen des Ventils im System gespeichert ist bleibt auch nach den Ausgleichsvorgängen gleich. Wir setzen also an (v - vorher, n - nachher)

$$\text{Innere Energie im Behälter 1} \quad U_{1v} = m_{1v} \cdot u_{1v} \quad U_{1n} = m_{1n} \cdot u_{1n}$$

$$\text{Innere Energie im Behälter 2} \quad U_{2v} = m_{2v} \cdot u_{2v} \quad U_{2n} = m_{2n} \cdot u_{2n}$$

$$U_{1v} + U_{2v} = U_{1n} + U_{2n}$$

$$m_{1v} \cdot u_{1v} + m_{2v} \cdot u_{2v} = m_{1n} \cdot u_{1n} + m_{2n} \cdot u_{2n}$$

Da es sich um ein geschlossenes System handelt muss auch die Masse gleichbleiben. Es muss gelten

$$m_{1v} + m_{2v} = m_{1n} + m_{2n}$$

Da wir keine Absolutwerte für Innere Energien berechnen können, sehr wohl aber Differenzen, wählen wir einen Nullpunkt. Es soll gelten: bei 0°C ist die Innere Energie Null.

$$du = c_v \cdot dT$$

$$u - u_0 = c_v \cdot (T - T_0)$$

$$u = c_v \cdot t$$

ACHTUNG: t in °C

Masse im Behälter 1 - vor

$$m_{1v} := \frac{p_{1v} \cdot V_1}{R \cdot T_{1v}}$$

$$m_{1v} = 0.041 \text{ kg}$$

Masse im Behälter 2 - vor

$$m_{2v} := \frac{p_{2v} \cdot V_2}{R \cdot T_{2v}}$$

$$m_{2v} = 0.043 \text{ kg}$$

1.) Druck und Temperatur haben sich ausgeglichen

$$m_{1v} \cdot c_v \cdot t_{1v} + m_{2v} \cdot c_v \cdot t_{2v} = c_v \cdot t_n \cdot (m_{1n} + m_{2n})$$

$$t_n := \frac{m_{1v} \cdot t_{1v} + m_{2v} \cdot t_{2v}}{m_{1v} + m_{2v}}$$

$$t_n = 40.207^\circ\text{C}$$

$$T_n := t_n + T_0$$

Da sich in beiden Behältern Luft im gleichen Zustand befindet kann man die Gasgleichung für beide Behälter zusammen ansetzen.

$$p_n \cdot (V_1 + V_2) = (m_{1v} + m_{2v}) \cdot R \cdot T_n$$

$$p_n := \frac{(m_{1v} + m_{2v}) \cdot R \cdot T_n}{V_1 + V_2}$$

$$p_n = 5.846 \text{ bar}$$

2.) Nur der Druck hat sich ausgeglichen

Gasgleichung

$$p_n \cdot V_1 = m_{1n} \cdot R \cdot T_{1n}$$

$$m_{1n} = \frac{p_n \cdot V_1}{R \cdot T_{1n}}$$

Setzt man nun wieder in den 1. Hs ein, so erhält man

$$\frac{p_{1v} \cdot V_1}{R \cdot T_{1v}} \cdot c_v \cdot t_{1v} + \frac{p_{2v} \cdot V_2}{R \cdot T_{2v}} \cdot c_v \cdot t_{2v} = \frac{p_n \cdot V_1}{R \cdot T_{1n}} \cdot c_v \cdot t_{1n} + \frac{p_n \cdot V_2}{R \cdot T_{2n}} \cdot c_v \cdot t_{2n}$$

Rechnet man nun die Celsius-Temperaturen in Kelvin-Temperaturen um mit

$$t = T - T_0$$

und kürzt die Gleichung durch R, T₀ und c_v so erhält man

$$p_{1v} \cdot V_1 + p_{2v} \cdot V_2 = p_n \cdot (V_1 + V_2)$$

$$p_n := \frac{p_{1v} \cdot V_1 + p_{2v} \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

$$p_n = 5.846 \text{ bar}$$

Überraschenderweise ist der Druck der gleiche wie vorhin, obwohl in den Behältern noch unterschiedliche Temperaturen herrschen. Diese an sich nicht-triviale Tatsache hat Jacques Alexandre César Charles um 1783 entdeckt und Joseph Louis Gay-Lussac 1802 im Gay-Lussac'sche Gesetz formuliert, das folgendes besagt:

"Das Volumen (bei konstantem Druck) bzw. der Druck (bei konstantem Volumen) einer gegebenen Gasmenge ist direkt proportional zur absoluten Temperatur."

Angenommen die Expansion im Behälter 1 verläuft reibungsfrei, kann die Temperatur mittels Isentropengleichung leicht berechnet werden.

$$p_{1v} \cdot v_{1v}^{\kappa} = p_n \cdot v_{1n}^{\kappa}$$

$$\frac{p_n}{p_{1v}} = \left(\frac{v_{1v}}{v_{1n}} \right)^{\kappa}$$

mit der Gasgleichung folgt

$$\frac{p_n}{p_{1v}} = \left(\frac{T_{1v} \cdot p_n}{T_{1n} \cdot p_{1v}} \right)^{\kappa}$$

$$T_{1n} := T_{1v} \cdot \left(\frac{p_n}{p_{1v}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$t_{1n} := T_{1n} - T_0$$

$$t_{1n} = -26.276 \text{ °C}$$

Masse im Behälter 1 - nach

$$m_{1n} := \frac{p_n \cdot V_1}{R \cdot T_{1n}}$$

$$m_{1n} = 0.025 \text{ kg}$$

Masse im Behälter 2 - nach

$$m_{2n} := m_{1v} + m_{2v} - m_{1n}$$

$$m_{2n} = 0.06 \text{ kg}$$

Temperatur im Behälter 2 - nach

$$T_{2n} := \frac{p_n \cdot V_2}{m_{2n} \cdot R}$$

$$t_{2n} := T_{2n} - T_0$$

$$t_{2n} = 67.754 \text{ °C}$$

ad b. Definition der Entropie

$$ds = \frac{dq_{rev}}{T}$$

Definition der reversiblen Wärme

$$dq_{rev} = dh - v \cdot dp$$

Daraus ergibt sich durch einsetzen

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v \cdot dp}{T}$$

Setzt man nun die bekannte Beziehung für die Innere Energie und die Gasgleichung ein so erhält man

$$dh = c_p \cdot dT$$

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{p}$$

$$ds = c_p \cdot \frac{dT}{T} - R \cdot \frac{dp}{p}$$

Vernachlässigt man die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme so ergibt sich nach Integration

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Da sich die Massenverteilung ändert (Gesamtmasse bleibt konstant!) ist die absolute Entropiedifferenz anzuschreiben

$$\Delta S = (m_{1n} \cdot s_{1n} + m_{2n} \cdot s_{2n}) - (m_{1v} \cdot s_{1v} + m_{2v} \cdot s_{2v})$$

Entropie im Ausgangszustand

Wie aus der Definition des Entropie ersichtlich können wir nur Entropiedifferenzen berechnen. Wir wählen also einen beliebigen Nullpunkt für die Entropie - Zustand 0 (Diesen brauchen wir nicht näher zu spezifizieren, da sich diese Größen in der nachfolgenden Rechnung herauskürzen).

$$m_{1v} \cdot s_{1v} = m_{1v} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_{1v}}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_{1v}}{p_0}\right) \right)$$

$$m_{2v} \cdot s_{2v} = m_{2v} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_{2v}}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_{2v}}{p_0}\right) \right)$$

1.) Druck- und Temperatenausgleich

$$m_{1n} \cdot s_{1n} = m_{1n} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_n}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_0}\right) \right)$$

$$m_{2n} \cdot s_{2n} = m_{2n} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_n}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_0}\right) \right)$$

Löst man die Brüche in den Logarithmen auf, so fallen, unter Berücksichtigung der Massenbilanz, alle Größen mit Index "0" heraus und die Entropiedifferenz ergibt sich zu

$$\Delta S := c_p \cdot \left(m_{1v} \cdot \ln\left(\frac{T_n}{T_{1v}}\right) + m_{2v} \cdot \ln\left(\frac{T_n}{T_{2v}}\right) \right) - R \cdot \left(m_{1v} \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_{1v}}\right) + m_{2v} \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_{2v}}\right) \right)$$

$$\Delta S = 3.888 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

2.) Druckausgleich

$$m_{1n} \cdot s_{1n} = m_{1n} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_{1n}}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_0}\right) \right)$$

$$m_{2n} \cdot s_{2n} = m_{2n} \cdot \left(c_p \cdot \ln\left(\frac{T_{2n}}{T_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_n}{p_0}\right) \right)$$

$$\Delta S := c_p \left(m_{1n} \ln\left(\frac{T_{1n}}{K}\right) - m_{1v} \ln\left(\frac{T_{1v}}{K}\right) + m_{2n} \ln\left(\frac{T_{2n}}{K}\right) - m_{2v} \ln\left(\frac{T_{2v}}{K}\right) \right) - R \left(m_{1v} \ln\left(\frac{p_n}{p_{1v}}\right) + m_{2v} \ln\left(\frac{p_n}{p_{2v}}\right) \right)$$

$$\Delta S = 3.014 \text{ kg} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Anm: In MathCAD müssen Ausdrücke im Logarithmus dimensionslos sein, also dividiert man einfach durch die gewünschte Einheit - in diesem Fall sind die Temperaturen in Kelvin (K) einzusetzen!

Wir sehen, dass in beiden Fällen die Entropie zunimmt. Im Falle des Temperatur- und Druckausgleiches mehr als beim reinen Druckausgleich, d.h. sind Temperatur und Druck ausgeglichen, so befindet sich das System im stabilsten Zustand (Ohne Arbeitsaufwand wird sich der Ausgangszustand nicht mehr einstellen - 2. Hauptsatz !!)

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)

2.5. Ottomotor

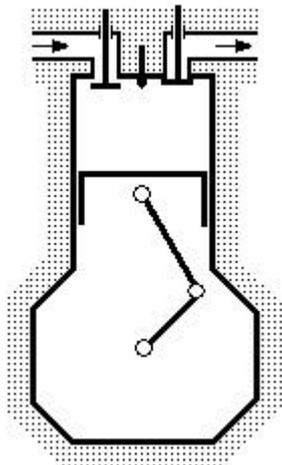


Fig. 20 Ottomotor - Viertakt

Es soll eine erste Näherungsrechnung für einen Ottomotor durchgeführt werden.

Verdichtungsverhältnis $\epsilon := 8$

Luftverhältnis $\lambda := 1$

Für diese Rechnung kann mit folgenden Stoffwerten gerechnet werden.

Eintrittszustand $p_1 := 1\text{bar}$ $T_1 := 293\text{K}$

Verdichtung $c_{p,V} := 1.029 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Verbrennung und Expansion $c_{p,E} := 1.2431 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Abgase $c_{p,A} := 1.1844 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Untere Heizwert $H_u := 40000 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Stöchiometrischer Luftbedarf $L_{\min} := 14.7$

Die Berechnung soll für folgende 3 verschiedene Prozessvarianten durchgeführt werden

- 1.) Gleichraumverbrennung
- 2.) Gleichdruckverbrennung
- 3.) 50% der Wärmezufuhr bei $V = \text{konst.}$
50% der Wärmezufuhr bei $p = \text{konst.}$

Wie groß sind die **maximale Temperatur und der maximale Druck** sowie **Druck und Temperatur am Expansionsende**?

Wie groß ist der **Wirkungsgrad** der vollkommenen Maschine?

Die Verdichtung von 1 nach 2 verläuft isentrop, d.h reibungsfrei und adiabat. Mit der Isentropengleichung kann man den Zustand 2 berechnen.

Als erstes wollen wir Druck und Temperatur nach dem Verdichtungstakt berechnen. Bei der vollkommenen Maschinen ist dieser Vorgang isentrop.

Isentropenexponent für Verdichtung $\kappa_V := \frac{c_{p,V}}{c_{p,V} - R}$ $\kappa_V = 1.387$

$$p_1 \cdot v_1^{\kappa_V} = p_2 \cdot v_2^{\kappa_V}$$

$$\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa_V} = \frac{p_2}{p_1}$$

Da sich die Masse im Zylinder nicht ändert, können die absoluten Volumina eingesetzt werden bzw. das Verdichtungsverhältnis.

$$p_2 := p_1 \cdot \epsilon^{\kappa_V} \quad \text{p}_2 = 17.881 \text{ bar}$$

Dividiert man die Gasgleichung im Zustand 2 durch die Gasgleichung im Zustand 1 so kann man die Temperatur berechnen

$$p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2 \quad p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

$$T_2 := T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

$$T_2 = 654.902 \text{ K}$$

Als nächstes interessiert uns der Zustand am Ende der Verbrennung bzw. der Wärmezufuhr beim idealisierten Prozess. Wir unterscheiden zwischen 3 verschiedenen Verbrennungsarten. Die zugeführte Wärmemenge soll bei allen drei Prozessen gleich sein um einen Vergleich zu ermöglichen, d.h. wir berechnen zunächst die zugeführte Wärmemenge.

Ausgehend von einer verlustfreien Verbrennung können wir folgenden vereinfachten Ansatz wählen

$$m_B \cdot H_u = Q_{zu}$$

Beziehen wir die zugeführte Wärme auf 1kg Gas so können wir auch schreiben

$$q_{zu} = \frac{m_B}{m_L + m_B} \cdot H_u$$

$$q_{zu} := \frac{H_u}{1 + \lambda \cdot L_{min}}$$

$$q_{zu} = 2547.771 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

1.) Gleichraumverbrennung

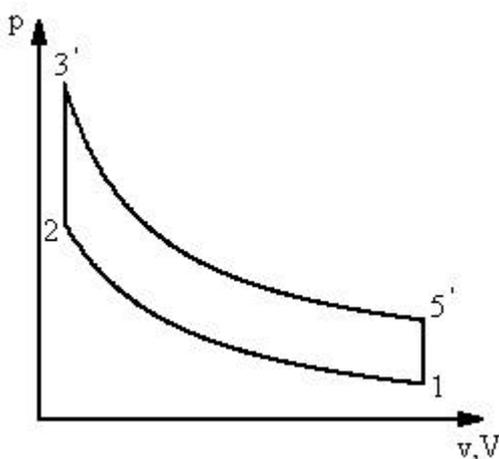


Fig. 21 a) p-v-Diagramm Gleichraumverbrennung

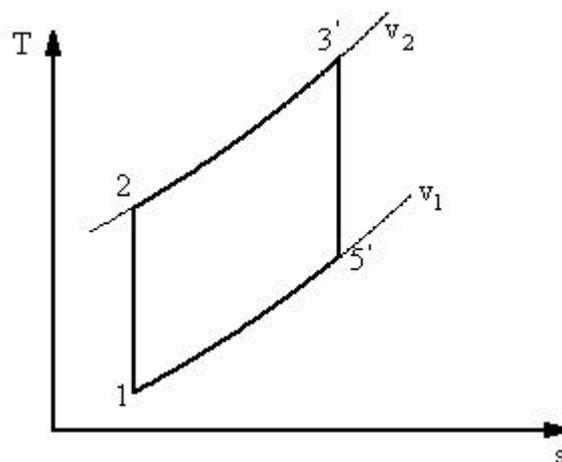


Fig. 21 b) T-s-Diagramm Gleichraumverbrennung

Die zugeführte Wärmemenge ist nun bekannt. Da der Vorgang verlustfrei, ohne Reibung, abläuft können wir die Definition der reversiblen Wärme heranziehen

$$dq_{rev} = dq_a = du + p \cdot dv$$

Da die Wärme bei konstantem Volumen zugeführt wird vereinfacht sich die Gleichung zu

$$dq_a = du$$

$$dq_{zu} = du$$

$$q_{zu} = c_{v,E} \cdot (T_3 - T_2)$$

$$T_3 := T_2 + \frac{q_{zu}}{c_{p,E} - R}$$

$$T_3 = 3319.655 \text{ K}$$

Der Druck errechnet sich aus der isochoren Beziehung

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p'_3}{T_3}$$

$$p'_3 := p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2}$$

$p'_3 = 90.639 \text{ bar}$

2.) Gleichdruckverbrennung

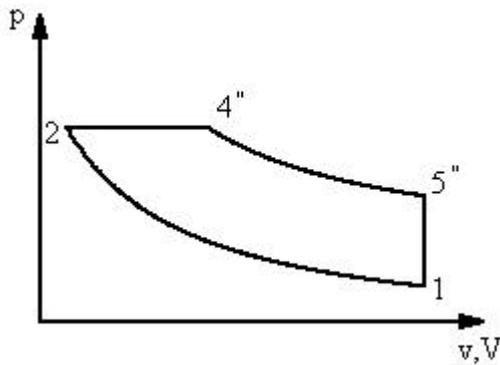


Fig. 22 a) p-v-Diagramm Gleichdruckverbrennung

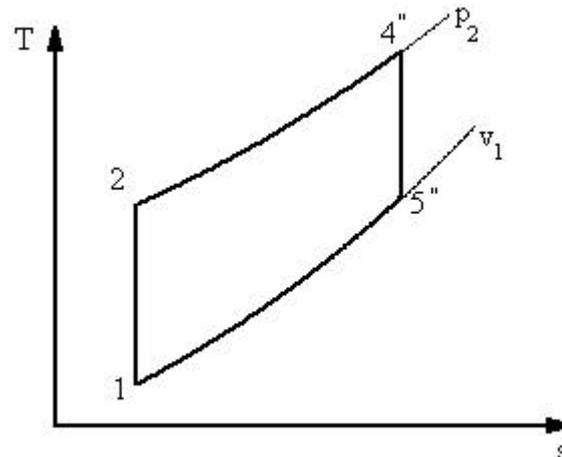


Fig. 22 b) T-s-Diagramm Gleichdruckverbrennung

Hier verwenden wir die zweite Defintiongleichung der reversiblen Wärme

$$dq_{rev} = dh - v \cdot dp$$

Da jetzt die Wärme bei konstantem Druck zugeführt wird kann man schreiben

$$dq_{zu} = dh$$

$$q_{zu} = c_{p,E} \cdot (T''_4 - T_2)$$

$$T''_4 := T_2 + \frac{q_{zu}}{c_{p,E}}$$

$T''_4 = 2704.432 \text{ K}$

Der Druck ändert sich nicht so daß gilt

$$p''_4 := p_2$$

$p''_4 = 17.881 \text{ bar}$

3.) Gemischte Verbrennung

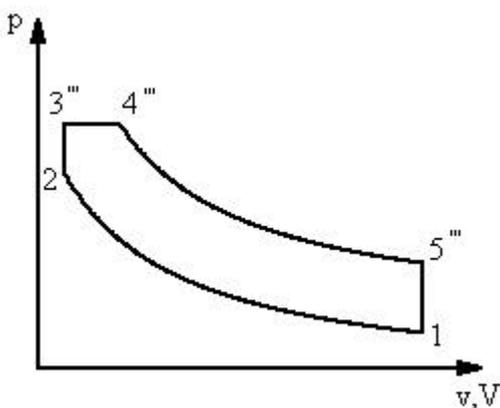


Fig. 23 a) p-v-Diagramm Gemischte Verbrennung

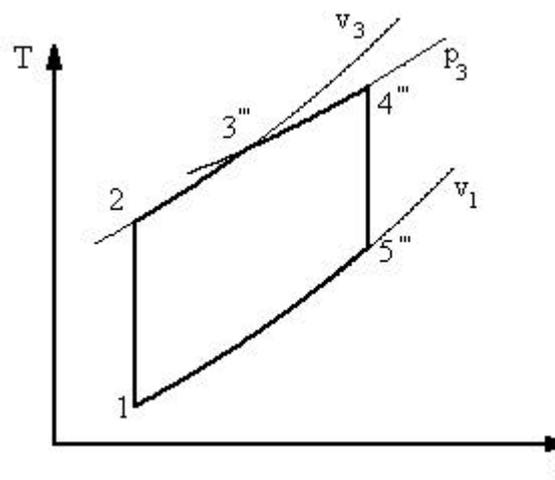


Fig. 23 b) T-s-Diagramm Gemischte Verbrennung

Laut Angabe werden 50% der Wärme bei konstanten Volumen (siehe 1.) und die anderen 50% bei konstantem Druck (siehe 2.) zugeführt. Es ergeben sich daraus folgende Zustände.

$$T'''_3 := T_2 + \frac{0.5q_{zu}}{c_{p,E} - R}$$

$$T'''_3 = 1987.278 \text{ K}$$

$$p'''_3 := p_2 \cdot \frac{T'''_3}{T_2}$$

$$p'''_3 = 54.26 \text{ bar}$$

$$T''_4 := T'''_3 + \frac{0.5q_{zu}}{c_{p,E}}$$

$$T''_4 = 3012.043 \text{ K}$$

$$p''_4 := p'''_3$$

$$p''_4 = 54.26 \text{ bar}$$

Die Expansion verläuft in allen drei Fällen auf einer Isentropen. Die Berechnung folgt dem gleichem Schema wie bei der Kompression.

Isentropenexponent für Expansion $\kappa_E := \frac{c_{p,E}}{c_{p,E} - R}$

$$\kappa_E = 1.3$$

Isentropengleichung $p_3 \cdot v_3^{\kappa_E} = p_5 \cdot v_5^{\kappa_E}$

$$\frac{p_3}{p_5} = \left(\frac{v_5}{v_3} \right)^{\kappa_E}$$

spezifische Volumen im Zustand 5 $v_5 = v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1}$

spezifische Volumen im Zustand 3 bzw 4 $v_3 = \frac{R \cdot T_3}{p_3}$

Druck nach der Expansion $p_5 = p_3 \cdot \left(\frac{T_1 \cdot p_3}{T_3 \cdot p_1} \right)^{-\kappa_E}$

Temperatur nach der Expansion $T_5 = \frac{p_5 \cdot v_5}{R} = T_1 \cdot \frac{p_5}{p_1}$

1.) Nach Gleichraumverbrennung

$$p'_5 := p'_3 \cdot \left(\frac{T_1 \cdot p'_3}{T_3 \cdot p_1} \right)^{-\kappa_E}$$

$$p'_5 = 6.069 \text{ bar}$$

$$T'_5 := T_1 \cdot \frac{p'_5}{p_1}$$

$$T'_5 = 1778.301 \text{ K}$$

2.) Nach Gleichdruckverbrennung

$$p''_5 := p''_4 \cdot \left(\frac{T_1 \cdot p''_4}{T''_4 \cdot p_1} \right)^{-\kappa_E}$$

$$p''_5 = 7.568 \text{ bar}$$

$$T''_5 := T_1 \cdot \frac{p''_5}{p_1}$$

$$T''_5 = 2217.522 \text{ K}$$

3.) Nach Gemischter Verbrennung

$$p'''_5 := p'''_4 \cdot \left(\frac{T_1 \cdot p'''_4}{T'''_4 \cdot p_1} \right)^{-\kappa_E}$$

$$p'''_5 = 6.239 \text{ bar}$$

$$T'''_5 := T_1 \cdot \frac{p'''_5}{p_1}$$

$$T'''_5 = 1828.043 \text{ K}$$

Der Wirkungsgrad ist bekannterweise als Nutzen dividiert durch Aufwand definiert.
Für Kreisprozesse ist die Arbeit die Differenz zwischen zu- und abgeführter Wärme.

$$\eta_i = \frac{q_{zu} - q_{ab}}{q_{zu}} = 1 - \frac{q_{ab}}{q_{zu}}$$

Die zugeführte Wärme kennen wir schon und ist für alle drei Varianten gleich groß. Die abgeführte Arbeit können wir wieder aus der Definition für die reversible Wärme berechnen.

$$dq_{rev} = dq_{ab} = du + p \cdot dv$$

Da die Wärmeabgabe ein isochorer Prozess ist, vereinfacht sich die Gleichung wieder

$$q_{ab} = c_v \cdot (T_5 - T_1)$$

1.) Nach Gleichraumverbrennung

$$\eta_i := 1 - \frac{(c_{p,A} - R) \cdot (T_5 - T_1)}{q_{zu}}$$

$$\eta_i = 0.477$$

2.) Nach Gleichdruckverbrennung

$$\eta_i := 1 - \frac{(c_{p,A} - R) \cdot (T'_5 - T_1)}{q_{zu}}$$

$$\eta_i = 0.322$$

3.) Nach Gemischter Verbrennung

$$\eta_i := 1 - \frac{(c_{p,A} - R) \cdot (T'''_5 - T_1)}{q_{zu}}$$

$$\eta_i = 0.459$$

Gibt es keine Begrenzung für den Spitzdruck, dann erreicht ein Prozess mit Gleichraumverbrennung den besten Wirkungsgrad. Die thermische und mechanische Beanspruchung ist allerdings sehr hoch. Da die Leistungsfähigkeit der Werkstoffe nicht unerschöpflich ist und eine Steigerung des Verdichtungsverhältnis bei Ottomotoren sehr bald zu der unerwünschten Erscheinung des Klopfens führt ist der Spitzendruck nach oben beschränkt. Somit würde ein Prozess mit Gleichdruckverbrennung einen besseren Wirkungsgrad erzielen.

In der Praxis wird eine Mischung aus diesen beiden Extremfällen als Idealprozess für den tatsächlichen Arbeitsprozess herangezogen.

[zurück zum Inhaltsverzeichnis](#)