Herwig Schwarz herwig.schwarz@htl-kapfenberg.ac.at

Die Lavaldüse

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Energiesatz der Mechanik, thermodynamische Zustandsänderungen, Ausflussfunktion (ψ - Funktion) der Thermodynamik, nummerisches Gleichungslösen

- Kurzzusammenfassung

  Bestimmung der Strömungsverhältnisse der Lavaldüse und anschließende Visualisierung des Druck- und Geschwindigkeitsverlaufes in Abhängigkeit der Geometrie.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Strömungsmaschinen & Mechanik, 4. & 5.Jahrgang, Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

Allgemeine Ableitung

Zustand im Eintritt: p_i, T_i, v_i

Zustand im Austritt: p_a, T_a, v_a

Zustand im Inneren: p, T, v

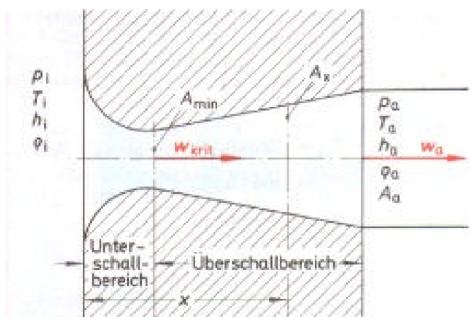


Bild 1

Energiegleichung **Enthalpie + kin. Energie = konstant (*)**

$$h_i + \frac{w_i^2}{2} = h_a + \frac{w_a^2}{2} \qquad \text{(Gl. 1)}$$

(*) Die pot. Energie ist verhältnissmäßig klein und kann vernachläßigt werden.

Da die Geschwindigkeit am Eintritt im Verhältnis zu der Austrittsgeschwindigkeit sehr klein ist, kannn (Gl. 1) auch wie folgt geschrieben werden.

$$\frac{w_a^2}{2} = h_i - h_a = \Delta h_S$$

Für die Isentrope Zustandsänderung ist uns der Zusammenhang

$$\Delta h_S = c_p \cdot T_i \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]$$

bekannt. Es kann also geschrieben werden.

$$\frac{w_a^{\,2}}{2} = c_p \cdot T_i \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

Die Austrittsgeschwindigkeit "w_a" lautet somit:

$$w_a = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot T_i \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

Führt man nun die folgenden Substitutionen durch,

$$v = \frac{1}{\rho} \quad a = \frac{p \cdot v}{\kappa - 1}$$

erhalten wir nun die gewünschte Form:

$$w_a = \sqrt{2 \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$ (Gl. 2)

Massenstrom

$$m_p = \frac{amp \cdot w}{v}$$ (Gl. 3)

Für Isentrope Zustandsänderungen gilt: $p_i \cdot v_i^{\kappa} = p_a \cdot v_a^{\kappa}$

$$\frac{p_i}{p_a} = \left(\frac{v_a}{v_i} \right)^{\kappa}$$

$$v_a = v_i \cdot \left(\frac{p_i}{p_a} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{p_i}{p_a} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

In (Gl. 3) eingesetzt ergibt sich:

$$m_p = \frac{A_a \cdot w_a}{\frac{1}{\rho_i} \cdot \left(\frac{p_i}{p_a} \right)^{\frac{1}{\kappa}}}$$ (Gl. 4)

Flechtet man auch noch (Gl. 2) mit ein, so erhält man für den Massenstrom:

$$m_p = A_a \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \qquad m_p = A_a \cdot \sqrt{2 \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}$$

Definiert man nun die Ausflußgleichung mit

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left[\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} \qquad \text{(Gl. 5)}$$

so kann geschrieben werden:

$$m_p = A_a\cdot\psi\cdot\sqrt{2\cdot p_i\cdot\rho_i} \qquad \text{(Gl. 6)}$$

Angaben für ein Beispiel:

Isentropenexponent für Luft $\kappa := 1.4$

Einheitendefinitionen:

Gaskonstante $R := 287\frac{joule}{kg\cdot K}$

$bar := 10^5\cdot\frac{newton}{m^2}$

Druck beim Eintritt $p_i := 6bar$

Druck beim Austritt $p_a := 1bar$

Temperatur beim Eintritt $T_i := 300K$

Massenstrom $m_p := 0.15\frac{kg}{sec}$

Erweiterungswinkel $\beta := 3deg$ (β ist die Hälfte des Winkels α aus Bild 3)

Fragestellung:

Gesucht wird der Druck- bzw. Geschwindigkeitsverlauf innerhalb der Lavaldüse, in Abhängigkeit von der Geometrie (vom Durchmesser). Es sind auch noch folgende konkreten Werte zu berechen:

- kleinste Querschnitt d_{min}
- Austrittsquerschnitt d_a
- kritische Geschwindigkeit w_{krit}
- Austrittsgeschwindigkeit w_a

Kleinste Querschnitt:

Ausflußgleichung

$$\psi(p_v) := \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left(p_v^{\frac{2}{\kappa}} - p_v^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} \qquad p_v := 0, 0.001..1$$

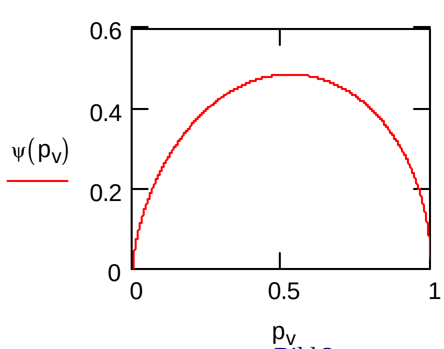


Bild 2

$$\psi_d(p_v) := \frac{d}{dp_v}\psi(p_v)$$

$$p_{tmp} := 0.5$$

$$p_{tmp} := root(\psi_d(p_{tmp}), p_{tmp})$$

$$\psi_{max} := \psi(p_{tmp})$$

$$\psi_{max} = 0.484$$

Dichte der Luft beim Eintritt (aus Gasgleichung)

$$\rho_i := \frac{p_i}{R \cdot T_i}$$

$$\rho_i = 6.969 \frac{kg}{m^3}$$

Kleinste Querschnitt aus (Gl. 6)

$$A_{min} := \frac{m_p}{\psi_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot p_i \cdot \rho_i}}$$

$$d_{min} := \sqrt{\frac{4 \cdot A_{min}}{\pi}}$$

$$d_{min} = 11.679\,mm$$

Austrittsquerschnitt:

Wert der Ausflußfunktion am Austritt

$$\psi_a := \psi\left(\frac{p_a}{p_i}\right)$$

$$\psi_a = 0.329$$

Austrittsquerschnitt laut (Gl. 6)

$$A_{min} \cdot \psi_{max} = A_a \cdot \psi_a$$

$$A_a := A_{min} \cdot \frac{\psi_{max}}{\psi_a}$$

$$d_a := \sqrt{\frac{4 \cdot A_a}{\pi}}$$

$$d_a = 14.162\,mm$$

Druck- und Geschwindigkeitsverlauf:

Um im Vorhinein ein unnötige Fehlerquelle zu eliminieren, wird in diesem Teilabschnitt ohne Dimensionen gerechnet.

$$d_{min} := \frac{d_{min}}{mm} \qquad d_a := \frac{d_a}{mm} \qquad m_p := m_p \cdot \frac{sec}{kg} \qquad p_i := p_i \cdot \frac{m^2}{newton} \qquad \rho_i := \rho_i \cdot \frac{m^3}{kg}$$

$$p_a := p_a \cdot \frac{m^2}{newton} \qquad A_a := \frac{A_a}{m^2}$$

Abrundungsradius (divergierender Düsenteil)

$$r_{ab} := d_{min}$$

Offsets des Abrundungsradiuses

$$o_x := r_{ab} \qquad o_y := \frac{3 \cdot d_{min}}{2}$$

Teilfunktion: divergierender Düsenteil

$$r1(x) := -\sqrt{r_{ab}^{2} - (x - o_x)^{2}} + o_y$$

Schnittpunkt der beiden Teilfunktionen

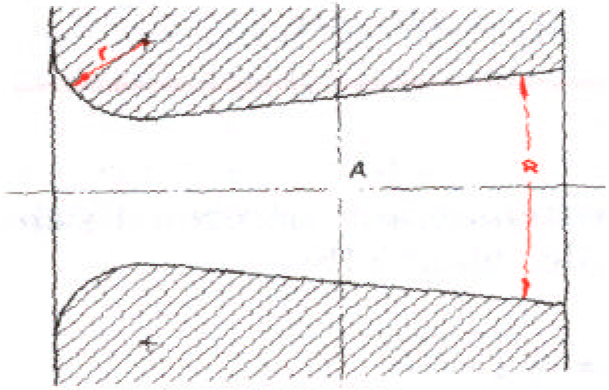


Bild 3

$$x := 2$$

Given

$$\frac{d}{dx} r1(x) = \tan(\beta)$$

$$x_s := \mathrm{find}(x)$$

$$x_s = 12.291$$

Gesamtlänge der Düse

$$ll := \frac{d_a - 2 \cdot r1(x_s)}{\tan(\beta \cdot 2)} + x_s$$

Teilfunktion: erweiteter Düsenteil

$$r2(x) := \frac{d_a}{2} - ll \cdot \tan(\beta) + \tan(\beta) \cdot x$$

Gesamte Durchmesserfunktion

$$r(x) := \mathrm{if}(x \le x_s, r1(x), r2(x))$$

Ausflußfunktion abhängig vom Durchmesser (Gl. 6)

$$\psi_{dm}(x) := \frac{m_p}{\frac{\pi \cdot \left(2 \cdot r(x) \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot p_i \cdot \rho_i}}$$

Druckfunktion: divergierender Düsenteil

$$p_{tmp} := 0.6$$

Given

$$\psi_{dm}(x) = \psi(p_{tmp})$$

$$p1(x) := \mathrm{find}(p_{tmp}) \cdot p_i \cdot 10^{-5}$$

Druckfunktion: erweiteter Düsenteil

$$p_{tmp} := 0.1$$

Given

$$\psi_{dm}(x) = \psi(p_{tmp})$$

$$p2(x) := \mathrm{find}(p_{tmp}) \cdot p_i \cdot 10^{-5}$$

Gesamte Druckfunktion

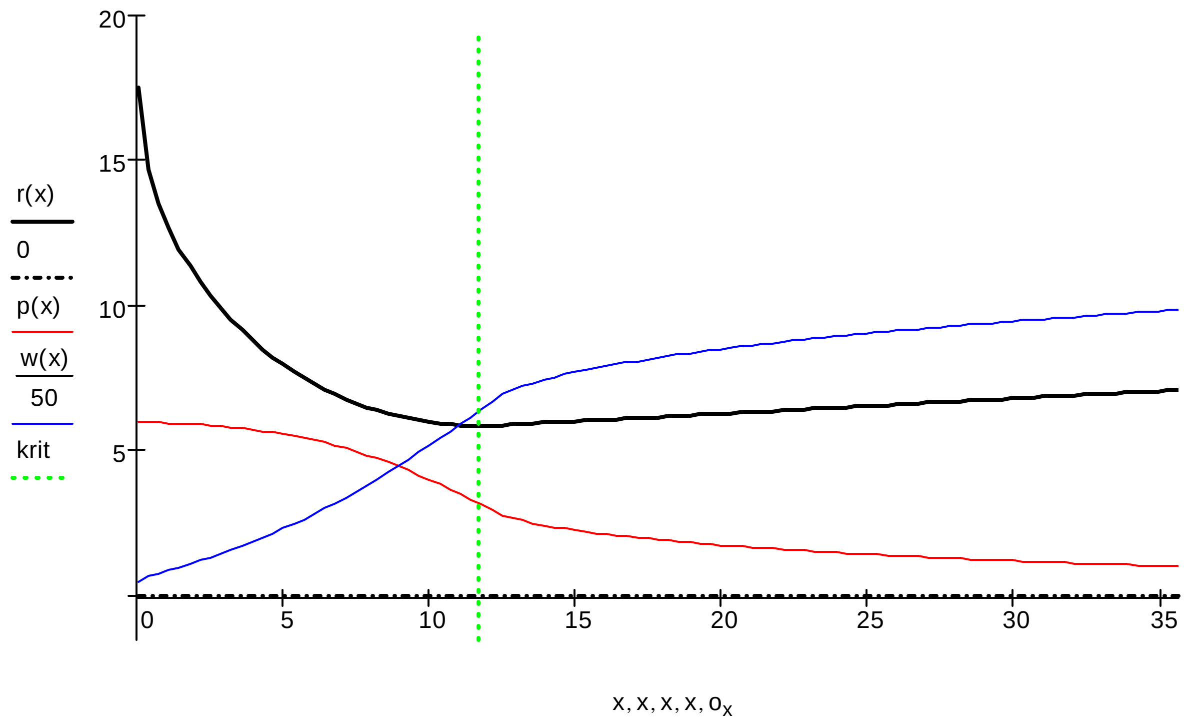
$$p(x) := \mathrm{if}(x \le d_{min}, p1(x), p2(x))$$

Geschwindigkeitsfunktion (Gl. 2)

$$w(x) := \sqrt{2\cdot\frac{p_i}{\rho_i}\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left[1-\left(\frac{p(x)\cdot 10^5}{p_i}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

Druck- und Geschwindigkeitsverlauf

$x := 0, \frac{ll}{100} .. ll \qquad krit := -1.5 .. 20$



Geometrie der Lavaldüse im Halbschnitt [mm]
Mittellinie der Lavaldüse
Druckverlauf p(x) [bar]
Geschwindigkeitsverlauf w(x) (M 1:50) [m/s]
Kritischer Punkt

Bild 4

Austrittsgeschwindigkeit aus (Gl. 4) [m/s]:

$$w_a := \frac{m_p}{(A_a\cdot\rho_i)}\cdot\left(\frac{p_i}{p_a}\right)^{\left(\frac{1}{\kappa}\right)}$$

$w_a = 491.406$

Austrittsgeschwindigkeit aus w(x) [m/s]: $w(ll) = 491.406$

Kritische Geschwindigkeit [m/s]: $w(o_x) = 316.929$