Wolfgang Triebel / Heinz Slepcevic wolfgang.triebel.aon.at

Ergiebigkeit eines Vertikalbrunnens

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Brunnenformel, Grundwasserabsenkung, Kontinuitätsgleichung (Integralgleichung)

- Kurzzusammenfassung

  Die Ergiebigkeit eines Vertikalbrunnens wird nach der Dupuit -Thiemsche Brunnenformel unter der Kontinuitätsbedingung von Sichardt berechnet. Zunächst wird von theoretischen Ansätzen und Überlegungen ausgegangen.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Die Theorie und das angeschlossene Beispiel sollen als Anregung dienen. Die Ausführungen sind als Unterstützung im Fachunterricht gedacht. Ein Selbststudium wäre nur mit Hilfe der genannten Literaturhinweise sinnvoll.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Bautechnik (Hoch- und Tiefbau): Grund- und Wasserbau, Tiefbaukunde [GW, TK]

- Mathcad-Version:

  Mathcad 8 / 2000

- Literaturangaben:

  K. Simmer; Grundbau Teil 2 **" Baugruben und Gründungen",** 17., neubearbeitete und erweiterte Auflage B.G. Teubner Stuttgart 1992 **Seite 128**

  Damrath/ Cord-Landwehr; Wasserversorgung, 10., neubearbeitete und erweiterte Auflage B.G. Teubner Stuttgart, Seite 33: **Beispiel 3.**13

Theoretische Ansätze

Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f

a. Die Strömung des Grundwassers ist - solange sich das Wasser nicht in klüftigem Gestein bewegt und das Grundwasserspiegelgefälle nicht zu groß ist - ausschließlich **laminar**.

Für die Durchgangsgeschwindigkeit gilt dann das Filtergesetz nach Darcy:

$$v = k_f \cdot J$$

k_f ist der Durchlässigkeitsbeiwert

Kies (Flußschotter)	$k_f := 0.015 .. 0.005$	m/ s
sandiger Kies (Urstromtäler)	$k_f := 0.001 .. 0.009$	m/ s
kiesiger Sand (Urstromtäler)	$k_f := 0.002 .. 0.0003$	m/ s
mittlerer Sand (Heisesand)	$k_f := 0.0002 .. 0.0008$	m/ s
feiner Sand (Dünensand)	$k_f := 0.0002 .. 0.00004$	m/ s
schluffiger Ton	$k_f := 0.00000001$	m/ s

J ist das Grundwasserspiegelgefälle (dimensionslos)

Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f im Labor

b. Im Labor kann der k_f-Wert mittels einer Durchflußanalyse an einer ungestörten Bodenprobe bestimmt werden. Diese Probe wurde aus einem homogenen Grundwasserleiter entnommen.

Annahmen für das folgende Beispiel:

Durchlässigkeitsbeiwert		$k_f := 0.0073$	m/ s
Länge des zu durchströmenden Weges		$l := 150$	m
Druckhöhenunterschied innerhalb der Strecke		$\Delta h := 1.5$	m
Grundwasserspiegelgefälle	$J := \frac{\Delta h}{l}$	$J = 0.010$	
Gesamtquerschnitt		$A := 3.00$	m²
Durchflußgeschwindigkeit	$v := k_f \cdot \frac{\Delta h \cdot 86400}{l}$	$v = 6.31$	m/ d

Die Filtergeschwindigkeit wird örtlich gemessen und der **k_f-Wert** rückgerechnet.

c. Ist eine ungestörte Bodenprobe nicht vorhanden, läßt sich der **k_f-Wert** auch aus der Siebanalyse näherungsweise nach der **Formel von Hazen** ermitteln.

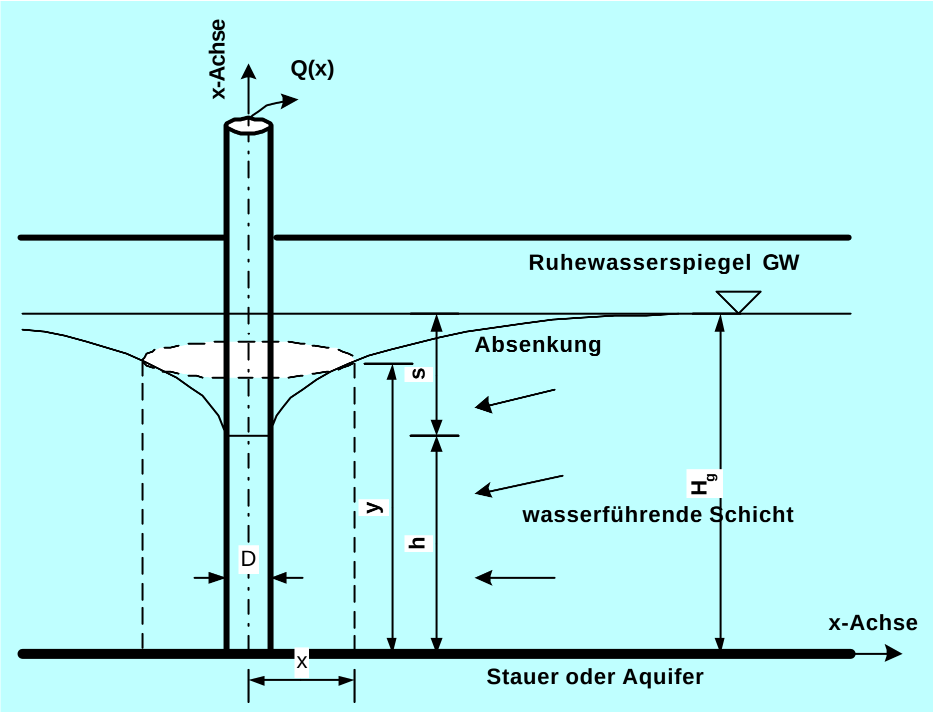
Der Korndurchmesser **d_{60}** in mm, bei dem **10 %** Siebdurchgang erfolgt, ist für den Durchlässigkeitsbeiwert **maßgebend**, allerdings unter der Einschränkung, daß die **Ungleichförmigkeitszahl U** (Kornverteilung) **kleiner als 5** ist.

Annahmen für das folgende Beispiel:

$d_{10} := 0.07$	$d_{60} := 1.2$	$U := \frac{d_{60}}{d_{10}}$	$U = 17.1$	**> 5**
	damit wird	$k_f := 0.0116 \cdot d_{10}^{\,2}$	$k_f = 0.000057$	m/ s

Theoretische Überlegungen

Ableitung der Dupuit-Thiemschen Brunnenformel



$s := 1$ $H_g := 1$

Kontinuitätsgleichung: $Q := k_f \cdot J \cdot A$ $R := 3000 \cdot s \cdot \sqrt{k_f}$

$y := H_g - s$ R .. Reichweite

$$\int_h^{H_g} (y)\, dy = \frac{Q}{k_f \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \int_r^R \frac{1}{x}\, dx$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt nachstehende Dupuit-Thiemsche Brunnenformel:

Ergiebigkeit eines Vertikalbrunnens (Zahlenbeispiel)

Zufallszahl zur Streuung der Eingabedaten im Schulbetrieb: $ZZ := 0$

Angaben:

Mächtigkeit des Aquifers	$H_g := 9.75 + \frac{ZZ}{20}$	$H_g = 9.75$	m
Durchlässigkeitskoefizient des Bodens	$k_f := 0.00075 + \frac{ZZ}{10^4}$	$k_f = 0.000750$	m/s

betrachteter Tiefen-Bereich:

Brunnendurchmesser	$D := 0.5$	$r := \frac{D}{2}$	m

Gesucht: Wie groß darf die Absenkung s maximal sein ?

Bereich: $s := 0, 0.2 .. H_g$

1. Faßbare Wassermenge Q_f:

$$Q_f(s) := \frac{2}{15} \cdot \pi \cdot \frac{D}{2} \cdot (H_g - s) \cdot \sqrt{k_f}$$

Gewährleistung der Kontinuität des Zuflusses

2. Ergiebigkeitsgleichung nach Sichhardt

$$Q(s) := \begin{cases} 0 & \text{if } s = 0 \\ (2 \cdot H_g - s) \cdot s \cdot \dfrac{\pi \cdot k_f}{\ln\left(\dfrac{3000 \cdot s \cdot \sqrt{k_f}}{r}\right)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. Grafische Begrenzung durch den Aquifer: $xg := H_g \quad x0 := 0$

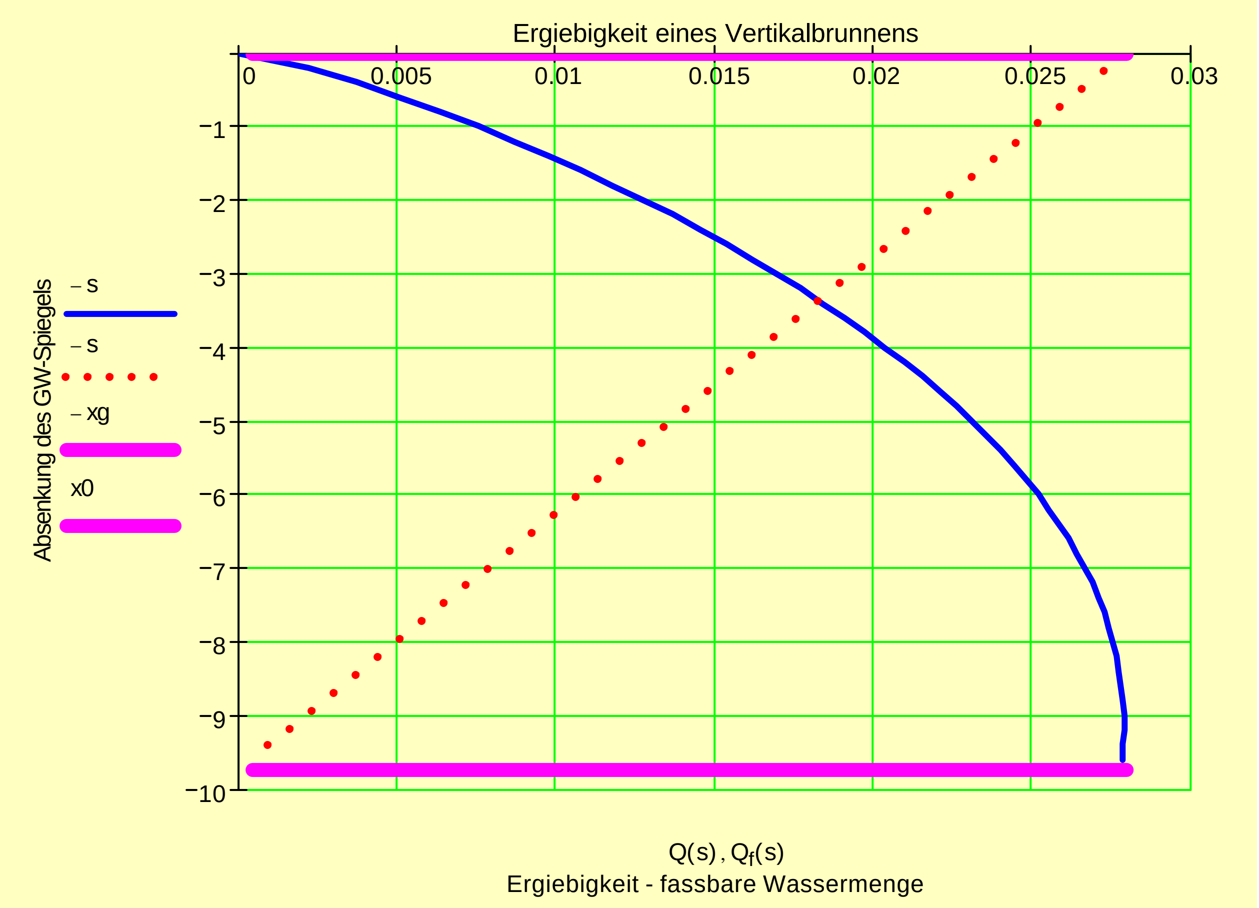
Schnittpunktes der Funktionen $Q(x) = Q_f(x)$ $Q(s) = Q_f(s)$

Unter Gewährleistung der Kontinuität ist s_{max} die maximal mögliche GW-Einsenkung

Die Lösung erbibt sich durch Iteration $x_{max} := 3.374$ m

$Q(x_{max}) = 0.01829 \qquad Q_f(x_{max}) = 0.01829$ m³/ s

oder mit Symbol Diagramm/ Schnittpunkt aus X-Y-Koordinaten ablesen:



$s =$	$Q(s) =$	$Q_f(s) =$
0.00	0.00000	0.02796
0.20	0.00217	0.02739
0.40	0.00369	0.02681
0.60	0.00506	0.02624
0.80	0.00633	0.02567
1.00	0.00752	0.02509
1.20	0.00866	0.02452
1.40	0.00974	0.02395
1.60	0.01077	0.02337
1.80	0.01176	0.02280
2.00	0.01271	0.02223
2.20	0.01362	0.02165
2.40	0.01450	0.02108
2.60	0.01534	0.02051
2.80	0.01614	0.01993
3.00	0.01692	0.01936
3.20	0.01766	0.01878
3.40	0.01838	0.01821
3.60	0.01906	0.01764
3.80	0.01972	0.01706

Bemerkungen zur Lösung von $Q(s) = Q_f(s)$

Die symbolische Lösung ist leider nicht möglich

$Q(s) = Q_f(s)$ auflösen, s $\rightarrow$

Die numerische Lösung ergibt einen Wert, wenn $s \neq 0$ **angenommen wird.**

$s := 1$

Vorgabe

$Q(s) = Q_f(s)$

$lsg := \text{suchen}(s)$

$lsg = 3.374048907849530$

$Q(lsg) = 0.018$

$Q_f(lsg) = 0.018$

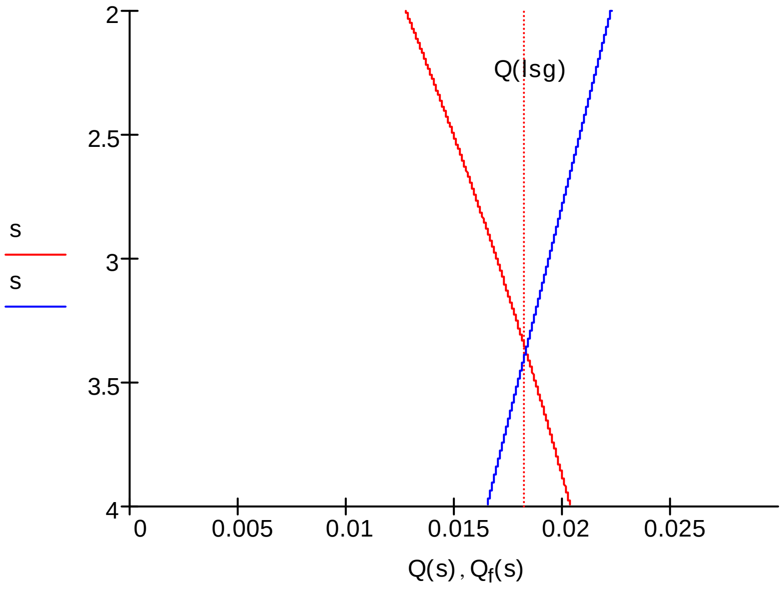
$Q(lsg) - Q_f(lsg) = 5.886 \times 10^{-9}$

Die Darstellung der Kurven

sStart := 2   sEnd := 4   delta := 0.0002

qMin := 0   qMax := 0.03

s := sStart, (sStart + delta) .. sEnd



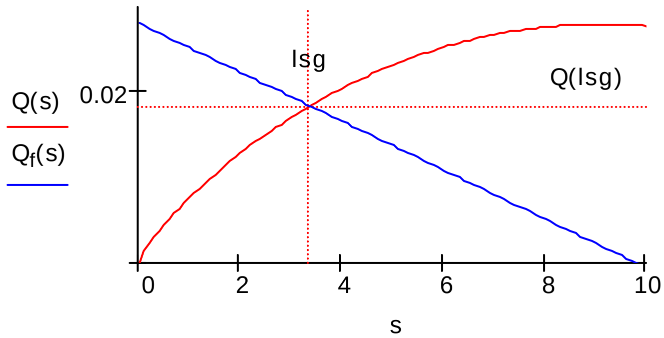
Wenn man die Darstellung der Funktionen in dieser Art angiebt werden die Markierungen für die "y" - Achse (in diesem Fall der Wert von Isg nixht angezeigt.

Will man die Lösung markieren, dann muss diese Darstellungsform verwendet werden.

sStart := 0   sEnd := 10   delta := 0.1

qMin := 0   qMax := 0.03

s := sStart, (sStart + delta) .. sEnd



Für den Mathematiker ergibt sich noch eine weiter Lösung. Der Schüler sollte lernen eine Funktion auch global zu betrachten.

$s := 20$

Vorgabe

$Q(s) = Q_f(s)$

$Isg := suchen(s)$

$Isg = 26.474922197798600$

$Q(Isg) = -0.048$

$Q_f(Isg) = -0.048$

$Q(Isg) - Q_f(Isg) = 9.615 \times 10^{-9}$

$sStart := 0$ $sEnd := 30$ $delta := 0.1$

$qMin := -0.1$ $qMax := 0.03$

$s := sStart, (sStart + delta) .. sEnd$