Heinz Slepcevic slep@htlortwein-graz.ac.at

Biegelinie eines Trägers

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Biegelinie, Differentialgleichung, Krümmung, Lastfälle

- Kurzzusammenfassung

  Berechnung der Gleichung einer Biegelinie eines Balkens in verschiedenen einfachen Lastfällen mit Hilfe der Differentialrechnung. In einem kleinen theoretischen Teil wird die Gleichung der Biegelinie kurz hergeleitet. Die Ermittlung der Querkraft- und Momentenfunktion wird (in 2 Varianten) am Beispiel mit einer mittigen Kraft vorgeführt.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Die Theorie und die anschließenden Beispiele sollen als Anregung dienen, wie dieses Kapitel behandelt werden kann. Die Ausführung ist als Unterstützung zum Theorie-Vortrag gedacht und nicht zum Selbststudium.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Bautechnik: Statik, Angewandte Mathematik

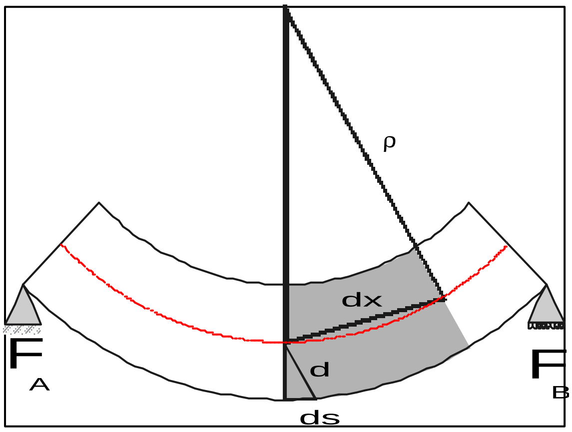
- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

INHALT :

Theorie

zurück zum INHALT



Bei gegebnener Durchbiegungsfunktion

$v = f(x)$

berechnet sich die Krümmung in einem Kurvenpunkt aus:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{v'}{\sqrt{\left(1 - v^2\right)^3}}$$

Hinweis : v'' gibt man mit v <Strg><Shift><K> '' <Strg><Shift><K> ein
Leider funktioniert v' nicht, es funktioniert aber mit
v <Strg><Shift><K> 'x <Backspace> <Strg><Shift><K>.
(als Apostroph muß der linksgerichtete hergenommen werden!)

In der spannungslosen neutralen Faser tritt keine Dehnung auf, ihr Verlauf wird Biegelienie genannt.
Bei kleinen Verformungen gilt das HOOK'scher Gesetz

$\sigma = E \cdot \varepsilon_0$

E : Elastizitätsmodul
ε_0: Dehnung

Aus den ähnlichen Dreicken folgt:

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{ds}{d} \text{ auflösen}, ds \rightarrow \frac{dx}{\rho} \cdot d$$

$$\frac{dx}{\rho} \cdot d = \frac{\sigma \cdot dx}{E} \text{ auflösen}, \rho \rightarrow d \cdot \frac{E}{\sigma}$$

$$\frac{\sqrt{\left[1 + (v')^2\right]^3}}{v'} = d \cdot \frac{E}{\sigma} \left| \begin{matrix} \text{ersetzen}, v' = 0 \\ \text{auflösen}, v' \end{matrix} \right. \rightarrow \frac{\sigma}{d \cdot E}$$

Nach HOOK gilt:

$$\varepsilon_0 = \frac{ds}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

Für die Spannung σ kann nun eingesetzt werden: $\sigma = \frac{M(x) \cdot d}{J}$

Daraus ergibt sich schließlich die Gleichung der Biegelinie: $v' = \frac{-M(x)}{E \cdot J}$

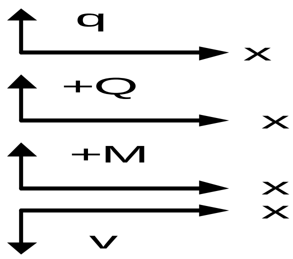
Es gelten - nun ohne weitere Begründungen - die folgenden Beziehungen:

$E \cdot J \cdot v'''' = q(x)$ q(x) Belastungsfunktion

$E \cdot J \cdot v''' = -Q(x)$ Q(x) Querkraftsfunktion

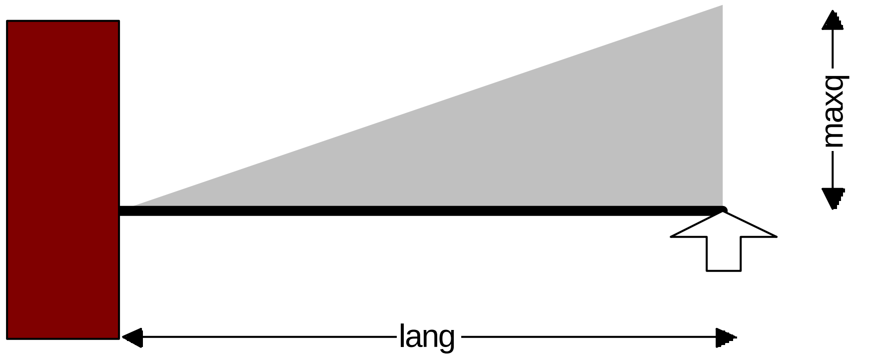
$E \cdot J \cdot v'' = -M(x)$ M(x) Momentenfunktion

$v = f(x)$ v Verformung (Durchbiegung)



Einseitig eingespannter Träger mit Dreieckslast

zurück zum INHALT



Belastungsfunktion $q(x) := \frac{maxq}{lang} \cdot x$

$E \cdot J \cdot v'''' = q(x)$

Es soll $E \cdot J$ weggelassen werden.
Nur die Differentialgleichung $v'''' = q(x)$ wird betrachtet.

$$\int \left(\frac{maxq}{lang} \cdot x\right) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^2$$

Es ist nun $E \cdot J \cdot v''' = -Q(x)$ wenn man $\_Q(x) := \frac{-Q(x)}{E \cdot J}$ setzt folgt:

$$\_Q(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^2 + C_1$$

$$\int \_Q(x)\, dx \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^3 + C_1 \cdot x$$

Es ist nun $E \cdot J \cdot v'' = -M(x)$ wenn man $\_M(x) := \frac{-M(x)}{E \cdot J}$ setzt folgt:

$$\_M(x) := \frac{1}{6} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\int \_M(x)\, dx \rightarrow \frac{1}{24} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x$$

Es folgt somit v:

$$v(x) := \frac{1}{24} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\int v(x)\, dx \rightarrow \frac{1}{120} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^5 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x$$

Damit ist die Funktion der Biegelinie bis auf die Konstanten C bestimmt.

$$v(x) := \frac{1}{120} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^5 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

Konstante durch die folgenden Randbedingungen festlegen

Wenn x = 0 gilt v = 0

$$0 = v(x) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = 0 \\ \text{auflösen}, C_4 \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$C_4 := 0$$

Wenn x = 0 gilt v'' = 0

$$0 = \frac{1}{24} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3 \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = 0 \\ \text{auflösen}, C_3 \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$C_3 := 0$$

Wenn z = lang gilt Moment v'' =0

$$0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \text{ ersetzen}, x = lang \rightarrow 0 = \frac{1}{6} \cdot maxq \cdot lang^2 + C_1 \cdot lang + C_2$$

Wenn z = lang gilt Durchbiegung v=0

C3 = 0 und C4 = 0 sind schon berücksichtigt

$$0 = \frac{1}{120} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^5 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \text{ ersetzen}, x = lang \rightarrow 0 = \frac{1}{120} \cdot maxq \cdot la$$

Berechnen von C1 und C2

Vorgabe

$$0 = \frac{1}{6} \cdot maxq \cdot lang^2 + C_1 \cdot lang + C_2$$

$$0 = \frac{1}{120} \cdot maxq \cdot lang^4 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot lang^3 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot lang^2$$

$$suchen(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-9}{40} \cdot maxq \cdot lang \\ \frac{7}{120} \cdot maxq \cdot lang^2 \end{pmatrix}$$

Nun können die Funktionen Q(x), M(x) und v(x) angegeben werden.

Querkraftsfunktion

$$Q(x) := -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^2 + \frac{-9}{40} \cdot maxq \cdot lang\right)$$

Momentenlinie

$$-\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{maxq}{lang} \cdot x^3 + \frac{-9}{40} \cdot maxq \cdot lang \cdot x + \frac{7}{120} \cdot maxq \cdot lang^2\right)$$

$$M(x) := \frac{-1}{120} \cdot maxq \cdot \frac{\left(20 \cdot x^3 - 27 \cdot lang^2 \cdot x + 7 \cdot lang^3\right)}{lang}$$

Biegelinie

$$\frac{1}{120}\cdot\frac{maxq}{lang}\cdot x^5+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{40}\cdot maxq\cdot lang\right)\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{120}\cdot maxq\cdot lang^2\right)\cdot x^2$$

$$v(x) := \frac{1}{240}\cdot maxq\cdot x^2\cdot\frac{\left(2\cdot x^3-9\cdot lang^2\cdot x+7\cdot lang^3\right)}{lang}$$

Nun die fehlenden Parameter für die Belastung und die Länge definieren:

$maxq := 1$ $lang := 5$

$$q(x) := \frac{maxq}{lang}\cdot x$$

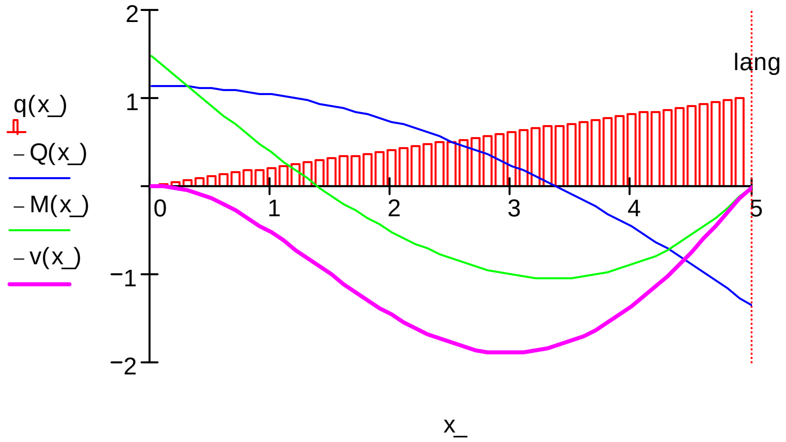
$$Q(x) := \frac{1}{2}\cdot\frac{maxq}{lang}\cdot x^2+\frac{-9}{40}\cdot maxq\cdot lang$$

$$M(x) := \frac{-1}{120}\cdot maxq\cdot\frac{\left(20\cdot x^3-27\cdot lang^2\cdot x+7\cdot lang^3\right)}{lang}$$

$$v(x) := \frac{1}{240}\cdot maxq\cdot x^2\cdot\frac{\left(2\cdot x^3-9\cdot lang^2\cdot x+7\cdot lang^3\right)}{lang}$$

$x\_ := 0, 0.1 .. lang$

Bemerkung: "x_" statt "x" wird hier verwendet, weil weiter unten mit "x" wieder symbolisch gerechnet wird



Biegelinie eines Trägers mit mittiger Einzellast.

zurück zum INHALT

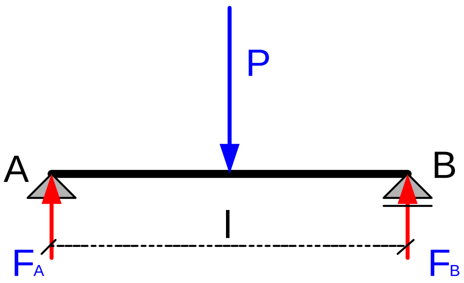
$v = f(x)$ v Verformung (Durchbiegung)

$E \cdot J \cdot v'' = -M(x)$ M(x) Momentenfunktion

$E \cdot J \cdot v''' = -Q(x)$ Q(x) Querkraftsfunktion

$E \cdot J \cdot v'''' = q(x)$ q(x) Belastungsfunktion

Gegeben : Einzellast P
Länge l



Die Momentenfunktion hat daher folgende Form:

$$M(x) := \frac{P \cdot x}{2}$$

x ist nur im Intervall 0 bis l/2 definiert !

Ableitung der Momentenlinie

$$\int \frac{-P \cdot x}{2 \cdot E \cdot J}\,dx \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot P \cdot \frac{x^2}{E \cdot J}$$

An der Stelle x=l/2 hat die Biegelinie die Steigung 0; daher kann C1 berechnet werden.

$$\frac{-1}{4} \cdot P \cdot \frac{x^2}{E \cdot J} + C1 = 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, C1 \\ \text{ersetzen}, x = \frac{l}{2} \end{array}\right. \rightarrow \frac{1}{16} \cdot P \cdot \frac{l^2}{E \cdot J}$$

$$\frac{-1}{4}\cdot P\cdot\frac{x^2}{E\cdot J}+\frac{1}{16}\cdot P\cdot\frac{l^2}{(E\cdot J)} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{-1}{16}\cdot P\cdot\frac{\left(4\cdot x^2-l^2\right)}{E\cdot J}$$

....v´

$$\int \frac{-1}{16}\cdot P\cdot\frac{\left(4\cdot x^2-l^2\right)}{(E\cdot J)}\,dx \rightarrow \frac{-1}{16}\cdot\frac{P}{E\cdot J}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot x^3-l^2\cdot x\right)$$

Die Biegelienie hat im Auflager x=0 die Durchbiegung 0

$$\frac{-1}{16}\cdot\frac{P}{(E\cdot J)}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot x^3-l^2\cdot x\right)+C2=0 \;\left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, x=0\\ \text{auflösen}, C2\end{array}\right. \rightarrow 0$$

Durchbiegungsfunktion

$$\text{fdurch}(x) := \frac{-1}{16}\cdot\frac{P}{E\cdot J}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot x^3-l^2\cdot x\right)$$

Berechnung der Maximaldurchbiegung an der Stelle x=l/2

$$\frac{-1}{16}\cdot\frac{P}{(E\cdot J)}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot x^3-l^2\cdot x\right) \text{ ersetzen}, x=\frac{l}{2} \rightarrow \frac{1}{48}\cdot\frac{P}{E\cdot J}\cdot l^3$$

Beispiel

$l := 500 \qquad P := 100 \qquad E := 2100 \qquad J := 10000$

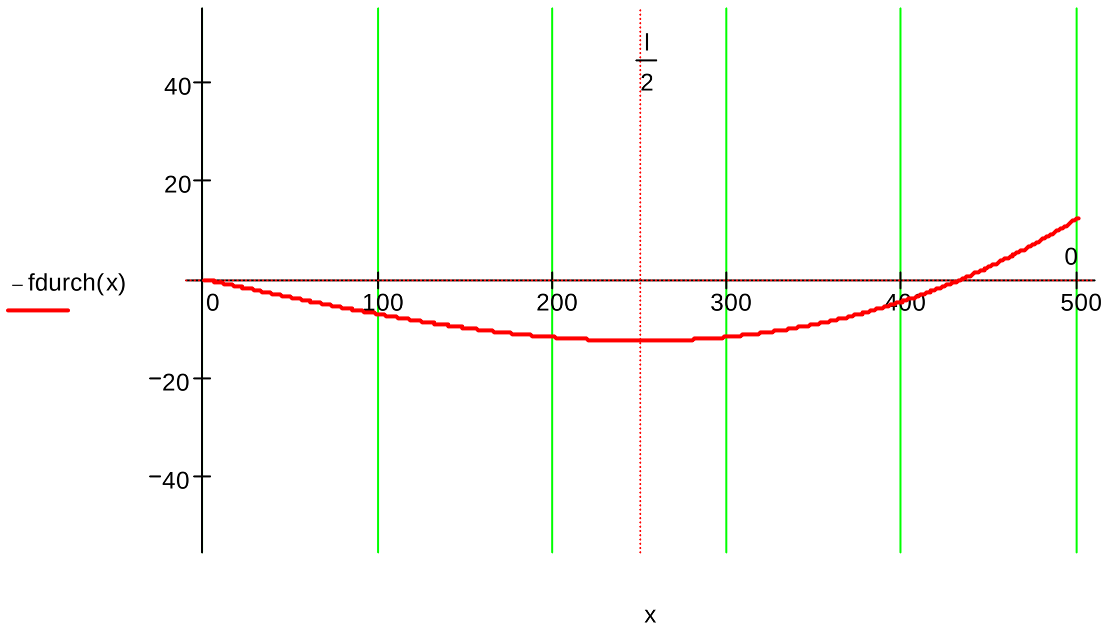
$x := 0, 1 .. 500$

$$\mathrm{fdurch}(x) := \frac{-1}{16} \cdot \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot x^3 - l^2 \cdot x \right)$$

$\mathrm{fdurch}(0) = 0$

$\mathrm{fdurch}(100) = 7.044$

$\mathrm{fdurch}\left(\frac{l}{2}\right) = 12.401$



Achtung Die Durchbiegungsfunktion ist nur im Intervall [0,l/2] definiert!

$\mathrm{fdurch}(l) = -12.401$

Bemerkungen zur Bestimmung von Q und M bei Träger mit Einzellasten am Beispiel mit einer mittigen Kraft

zurück zum INHALT

$l := 10 \qquad P := 5$

Unstetigkeitsstellen der Einzellast werden mit der "wenn()" Funktion behandelt

$$F_A := -\frac{P}{2} \qquad F_B := F_A$$

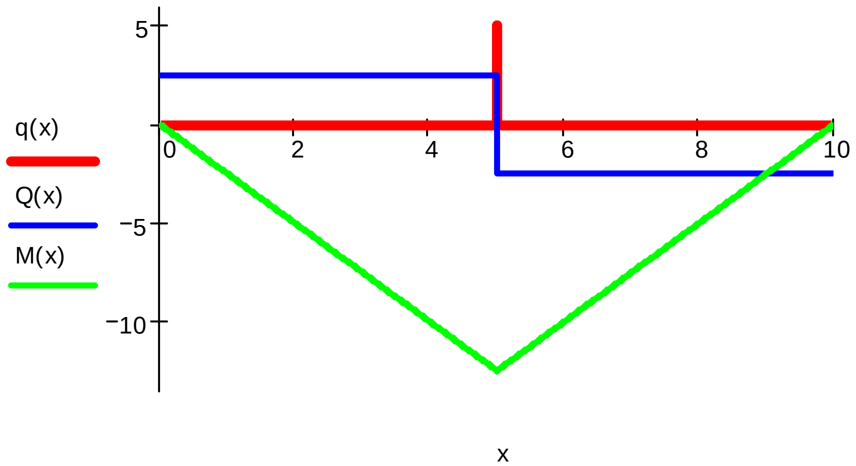
Belastungsfunktion $q(x) := \text{wenn}\left(x = \frac{l}{2}, P, 0\right)$

$P + F_A + F_B = 0 \qquad q(5) = 5$

Querkraftlinie $Q(x) := \text{wenn}\left(x \le \frac{l}{2}, -F_A, F_B\right)$

Momentenlinie $M(x) := \text{wenn}\left[x \le \frac{l}{2}, F_A \cdot x, F_B \cdot (l - x)\right]$

$x := 0, 0.01 .. l \qquad M(5) = -12.5$



Ansatz mit Vektoren für die x-Koordinaten.

Der Träger wird bei diesem Ansatz in N gleiche Teile geteilt.
Für die Anschaulichkeit dieser Darstellung soll:

- die Länge l ganzzahlig sein
- die Anzahl N der Teilungen gleich der Länge des Trägers sein.

Aufbau des x-Vektors
Die einzelnen Elemente enthalten die x-Koordinaten der Trägerunterteilungen

$l := 10$ **Länge l muß für diesen Ansatz ganzzahlig und positiv sein**

$N := l$

$x := 1 .. N$ **Diese ist ein Bereich und kein Vektor!**

Erzeugen des x-Vektors $i := 0 .. N$

$xvek_i := i$

$xvek^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Belastungsvektor Pvek

Kraft im Punkt x=a

$$kraft(a, P, N) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} kraft_i \leftarrow P \text{ if } i = a \\ kraft_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ kraft \end{array} \right.$$

$$Pvek := kraft\left(\frac{l}{2}, P, N\right)$$

$Pvek^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0

Auflagerkräfte in die Elemene mit den Index 0 und N eintragen:

$Pvek_0 := F_A$ $Pvek_N := F_B$

Vektor der Einzelkräfte

$Pvek^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-2.5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-2.5

Querkraftvektor

$$Q(Pvek, N) := \left| \begin{array}{l} Qvek_0 \leftarrow (-Pvek)_0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad Qvek_i \leftarrow Qvek_{i-1} - Pvek_i \\ Qvek \end{array} \right.$$

$Qvek := Q(Pvek, N)$ $\quad Qvek^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	0

Momentenvektor

$$M(Qvek, N) := \left| \begin{array}{l} M_0 \leftarrow 0 \\ sq \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} sq \leftarrow sq + Qvek_{i-1} \\ M_i \leftarrow -sq \end{array} \right. \\ M \end{array} \right.$$

$Mvek := M(Qvek, N)$

$Mvek^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	-2.5	-5	-7.5	-10	-12.5	-10	-7.5	-5	-2.5	0

Darstellung der Vektoren $\quad i := 0..N$