Peter Schüller peter.schueller@bmbwk.gv.at

Freie Schwingung - Lösungsfälle

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Schwingung

- Kurzzusammenfassung

  Die Lösungsfälle der Freien Schwingung werden rechnerisch und graphisch analysiert - die Grafiken erlauben die selbständige Veränderung der Parameter k (Federkonstante), d (Dämpfungsfaktor) und m (Masse)

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Üblicherweise werden die Konstanten k, d, und m durch w und k bzw. d ersetzt. Dies erfolgt hier absichtlich nicht, um eine anschaulichere Variation und Interpretation der Parameter in der Grafik zu ermöglichen!

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 7 / 8 / 2000 / 2001

Aufstellen der Schwingungsgleichung

Federkraft bei Auslenkung - proportional dem Weg s $k \cdot s$ k...Federkonstante

Dämpfung - proportional der Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}s \cdot d$ d... Dämpfungsfaktor

Massenträgheit $\frac{d^2}{dt^2}s \cdot m$

dies ergibt die Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}s \cdot m + \frac{d}{dt}s \cdot d + k \cdot s = 0$$

dies ist eine lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

nach Division durch m erhalten wir

$$\frac{d^2}{dt^2}s + \frac{d}{dt}s \cdot \frac{d}{m} + \frac{k \cdot s}{m} = 0$$

und mit dem Ansatz $s(t) = e^{\lambda \cdot t}$ **daraus**
die charakteristische Gleichung

$$\boxed{\lambda^2 + \lambda \cdot \frac{d}{m} + \frac{k}{m} = 0}$$

Bestimmung der Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda \cdot \frac{d}{m} + \frac{k}{m} = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left[-d + \left(d^2 - 4 \cdot m \cdot k\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left[-d - \left(d^2 - 4 \cdot m \cdot k\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{.... l1} \\ \text{.... l 2} \end{matrix}$$

nun müssen wir 3 Fälle unterscheiden, in Abhängigkeit der Diskriminante

<u>1. Fall :</u> l 1 und l 2 sind komplex

In der Regel wird die Diskriminante negativ sein, da der Dämpfungsfaktor (deutlich) kleiner sein wird als das Produft aus k*m (Federkonstante*Masse).

somit erhalten wir, da λ_1, λ_2 ja komplex sind, als Lösung der DG

$$s(t) = e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m} \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) \right)$$

wir versuchen nun die Koeefizienten C_1 und C_2 auszurechnen.

Randbedingung 1: Auslenkung zum Zeitpunft $t_0 = 0$ ist 0

$$0 = e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m} \cdot 0} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot 0 \right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot 0 \right) \right)$$

ergibt $0 = C_1$

Somit lautet nun die neue Funktionsgleichung

$$s(t) = e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m} \cdot t} \cdot \left(C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) \right)$$

Randbedingung 2: Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t0 = 0 sei v0

wir leiten also ab

$$s(t) = e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m} \cdot t} \cdot \left(C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) \right)$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \frac{-1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m} \cdot t \right) \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot d \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) - \frac{1}{m} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m} \cdot t \right) \cdot \sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2} \right)$$

Einsetzen von $s(t)=v_0$ und t=0 ergibt

$$v_0 = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{m}$$

Auflösen nach C_2

$$C_2 = 2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}} \cdot m$$

somit erhalten wir die endgültige (Schwingungs)Gleichung mit

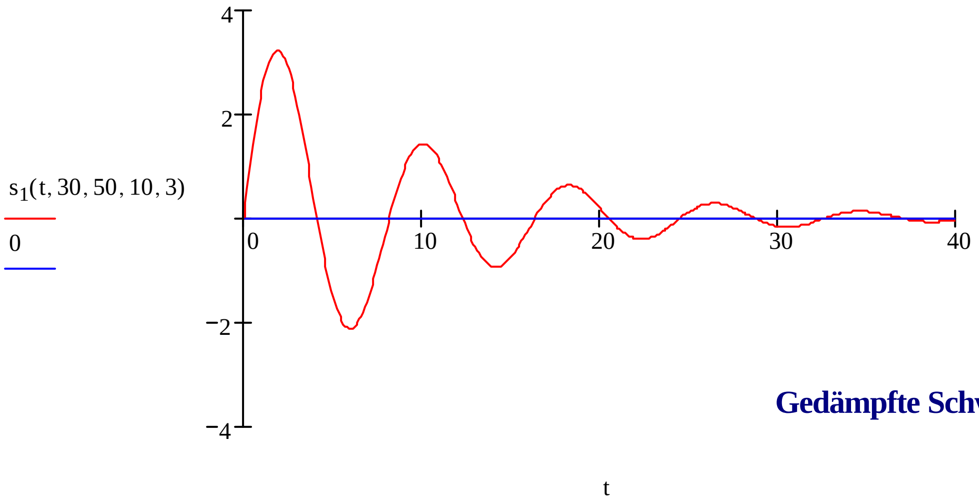
$$s(t) = e^{\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t}\cdot\left(C_2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4\cdot k\cdot m - d^2}}{m}\cdot t\right)\right)$$

oder
$$s(t) = 2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t\right)\cdot\frac{v_0}{\sqrt{4\cdot k\cdot m - d^2}}\cdot m\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4\cdot k\cdot m - d^2}}{m}\cdot t\right)$$

Wir definieren die Gleichung nun so, daß wir die Parameter variieren können. Zur Kennzeichnung des Lösungsfalles 1 nennen wir die Funktion s1

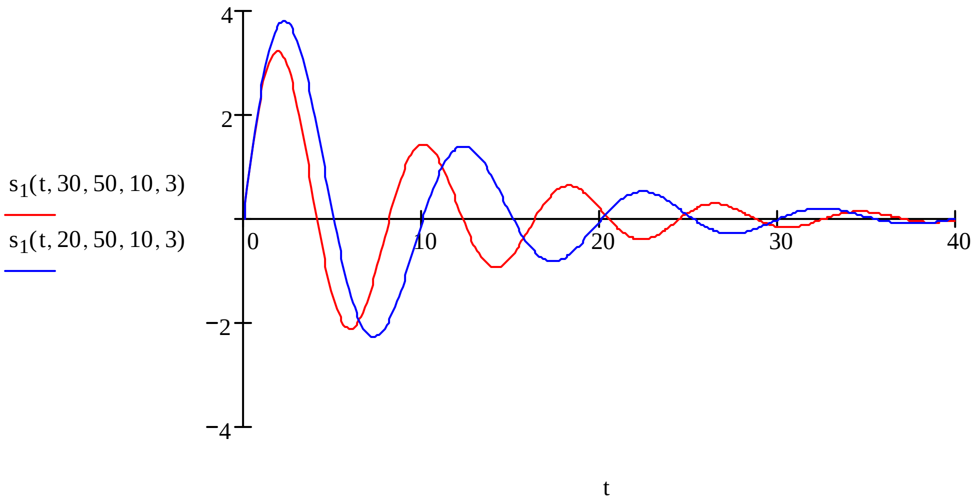
$$s_1(t, k, m, d, v_0) := 2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t\right)\cdot\frac{v_0}{\sqrt{4\cdot k\cdot m - d^2}}\cdot m\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4\cdot k\cdot m - d^2}}{m}\cdot t\right)$$

Definition Bereichsvariable t $\qquad t := 0, 0.1 .. 40$



Gedämpfte Schwingung

HINWEIS: In der obigen Grafik ist eine zweite Funktionsgleichung vorgesehen , die oben "0" gesetzt wurde. Durch Variation der Parameter ist nun eine interessante Möglichkeit gegeben, interaktiv das Verhalten der gedämpften Schwingung zu analysieren. Als Beispiel ist unten die Federkonstante k verändert worden, was sich (siehe Funktionsgleichung) auf Amplitude UND Frequenz auswirken muß!



2. Fall: ı 1 und ı 2 sind verschieden reell

Was geschieht nun, wenn die Dämpfungskonstante größer wird (Dämpfung d größer als k*m), also die Diskriminante positiv wird und somit gilt λ_1, λ_2 verschieden reell ?

dann erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{s(t) = C_1 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t}}$$

Randbedingungen wie im ersten Fall: **$s(t_0)=0$ und $v(t_0)=v0$**

$s(t_0)=0$:

$$0 = C_1 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t} \quad ==> \quad 0 = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_2 = -C_1}$$

$v(t_0)=v0$:

$$s(t) = C_1 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t} - C_1 \cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{d^2-4\cdot k\cdot m}}{m}\right)\cdot t}$$

die Ableitung ergibt

$$\frac{d}{dt}s(t) = C_1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right)\cdot \exp\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right)\cdot t\right] \ldots$$
$$+ -\left[C_1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right)\cdot \exp\left[\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right)\cdot t\right]\right]$$

v_0 eingesetzt zur Zeit t=0 :

$$v_0 = C_1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right) - C_1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}{m}\right)$$

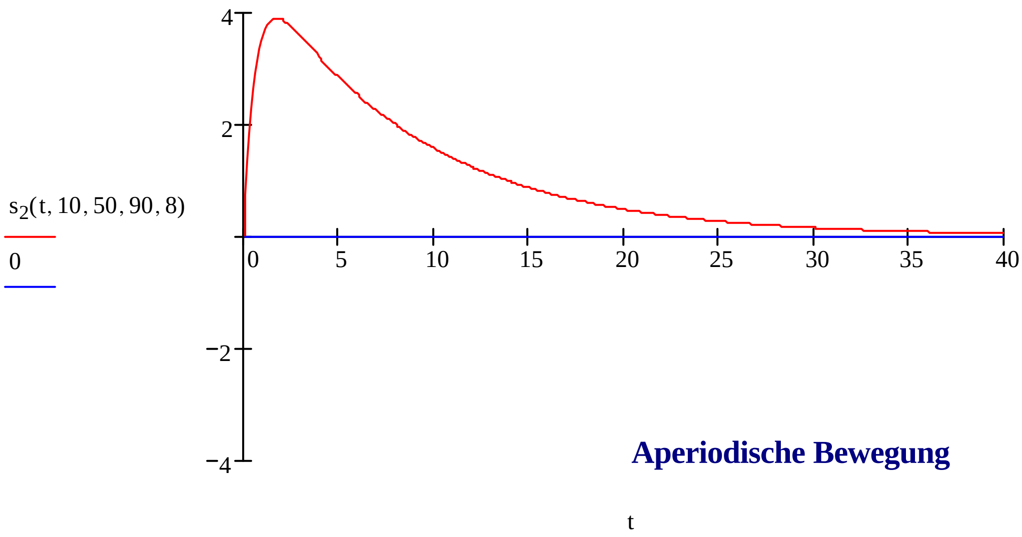
$$\boxed{C_1 = \frac{v_0}{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}\cdot m}$$

wir setzen die berechneten Konstanten in die Ausgangsgleichung ein:

$$s(t) = v_0 \cdot m \cdot \frac{\left[\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(d-\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}\right)\cdot\frac{t}{m}\right] - \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(d+\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}\right)\cdot\frac{t}{m}\right]\right]}{\sqrt{-4\cdot k\cdot m+d^2}}$$

und so erhalten wir die Funktion

$$s_2(t,k,m,d,v_0) := v_0 \cdot m \cdot \frac{\left[\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(d - \sqrt{-4\cdot k\cdot m + d^2}\right)\cdot\frac{t}{m}\right] - \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(d + \sqrt{-4\cdot k\cdot m + d^2}\right)\cdot\frac{t}{m}\right]\right]}{\sqrt{-4\cdot k\cdot m + d^2}}$$



<u>3. Fall:</u> $\lambda_1=\lambda_2$

Als letzter Fall bleibt offen, daß die **Dämpfung d gleich 4*k*m** wird, also die Diskriminante 0 wird und in der Folge λ_1, λ_2 gleich reell werden. Was für einen Funktionsverlauf erhalten wir dann ?

wir erhalten als Lösung der Differentialgleichung

$$s(t) = (C_1\cdot t + C_2)\cdot e^{\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\right)\cdot t}$$

Randbedingungen wiederuml: **$s(t_0)=0$ und $v(t_0)=0$**

$s(t_0)=0$:

$$0 = C_2$$

$v(t_0)=v_0$ und $C_2=0$:

$$s(t) = C_1\cdot t\cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t\right)$$

abgeleitet und eingesetzt

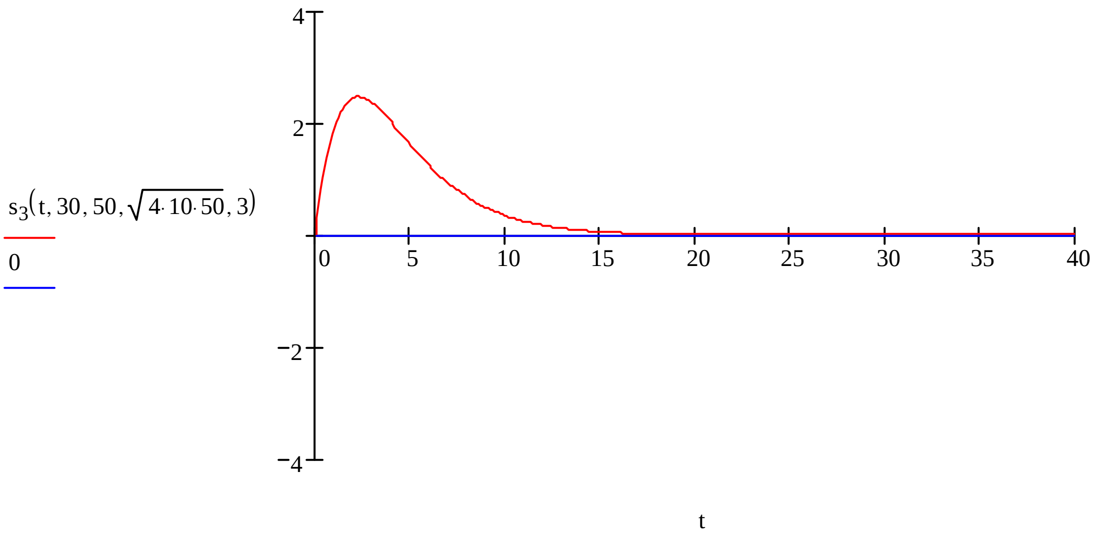
$$\frac{d}{dt}s(t) = C_1\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t\right) - \frac{1}{2}\cdot C_1\cdot t\cdot\frac{d}{m}\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{d}{m}\cdot t\right)$$

$$v_0 = C_1$$

wir erhalten die Funktion

$\sqrt{4 \cdot 10 \cdot 50} = 44.721$

$$s_3(t, k, m, d, v_0) := (v_0 \cdot t) \cdot e^{\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{d}{m}\right) \cdot t}$$



dieser "Übergangsfall" beginnt wie ein Schwingung, geht aber dann doch in eine Dämpfung ohne Nulldurchgang über. **("Aperiodischer Grenzfall")**

Gegenüberstellung der Fälle für verschiedene Werte der Dämpfung d