Franz Schandl franz.schandl@uni-klu.ac.at

Bezierkurven

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Parametrische Kurven, Approximierende Kurven, Polynome, Differenzialrechnung

- Kurzzusammenfassung

  Durch die Verwendung von Funktionen ist man auf einen y-Wert je x-Wert limitiert, sodass solche geometrischen Objekte wie etwa Kreise nicht als Graphen einer Funktion dargestellt werden können. Diese Einschränkung fällt bei parametrischen Kurven wie beispielsweise Bezierkurven weg. Bezierkurven wurden aus dem Bedarf für Freiformkurven in der CAD/CAM/CAE-Technik entwickelt (P. de Casteljau (1959) bei Citroën, P. Bézier (1962) bei Renault). Standardmäßig sind Bezierkurven in vielen CAD-Paketen enthalten und spielen in der Computergraphik eine bedeutende Rolle.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, ab dem 3. Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  www.haw-hamburg.de/pers/Noack/lehre/Geo_obj1.pdf

Durch die Verwendung von Funktionen ist man auf einen y-Wert je x-Wert limitiert, sodass solche geometrischen Objekte wie etwa Kreise nicht als Graphen einer Funktion dargestellt werden können. Diese Einschränkung fällt bei parametrischen Kurven wie beispielsweise Bezierkurven weg. Bezierkurven wurden aus dem Bedarf für Freiform-kurven in der CAD/CAM/CAE-Technik entwickelt (P. de Casteljau (1959) bei Citroën, P. Bézier (1962) bei Renault). Standardmäßig sind Bezierkurven in vielen CAD-Paketen enthalten und spielen in der Computergraphik eine bedeutende Rolle.

Die wesentliche Änderung bei **parametrischen Kurven** ist, dass sowohl die x- wie auch die y-Koordinate als Funktion eines Parameters t aufzufassen sind. Für jeden Wert von t erhält man dann ein Wertepaar (x(t), y(t)). Die Menge dieser Wertepaare kann wiederum graphisch dargestellt werden.

Beispiel: Der **Einheitskreis** läßt sich mit $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ als parametrische Kurve darstellen. Eine **Ellipse** erhält man etwa, indem man die x-Koordinate um den Faktor a, die y-Koordinate um den Faktor b streckt: $x(t) = a\cdot\cos(t)$, $y(t) = b\cdot\sin(t)$.

Während Splinefunktionen interpolierende Kurven sind, stellen Bezierkurven **approximierende Kurven** dar (Abb. 1). Approximierende Kurven gehen nicht durch alle vorgegebenen Punkte. Der Verlauf der Punkte wird durch die Kurve nur angenähert.

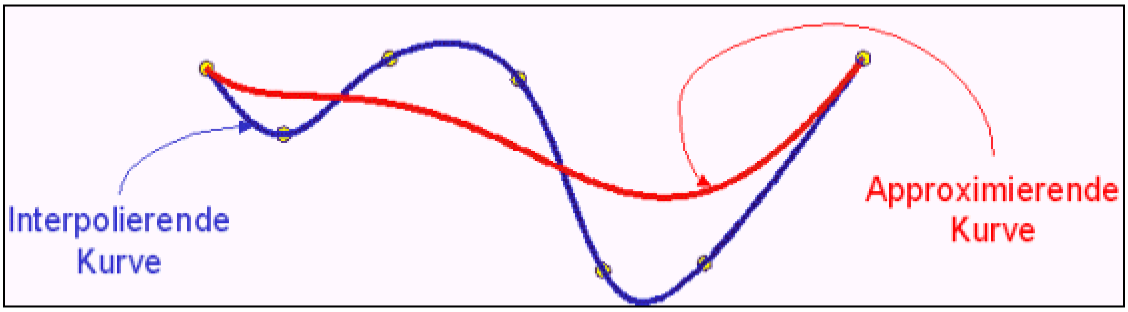

Abb. 1 : Vergleich interpolierender und approximierender Kurve

Bei Bezierkurven verläuft die Kurve nur durch einen ersten und einen letzten Datenpunkt. Diese Art von Kurven ist in der Computergraphik und im CAD-Bereich wichtig, da der Kurvenverlauf rein von der Lage der Punkte abhängt und nicht noch Bedingungen an erste oder zweite Ableitung zu stellen sind.

Wir betrachten zuerst den einfachtsten Fall von vier Datenpunkten $P_i = (x_i, y_i)$, i = 0, ...,3, bei denen die äußeren **Stützstellen** und die inneren zwei **Kontrollpunkte** der Kurve sind. Durch diese vier Punkte ist nun eine (kubische) Bezierkurve wie folgt definiert:

Definition: Gegeben seien vier Punkte $P_0, \ldots, P_3 \in R^2$. Dann nennt man die durch

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3}$$

für $t \in [0, 1]$ definierte Funktion eine **kubische Bezierkurve**. Die dabei auftretenden Faktoren $(1-t)^3$, $3t(1-t)^2$, $3t^2(1-t)$ und t^3 werden **Bernsteinpolynome 3.Grades** genannt.

Einige kubische Bezierkurven für gleichbleibende Stützstellen und einen verschobenen Kontrollpunkt sind in Abb. 2 dargestellt. Man kann daraus einige Eigenschaften von kubischen Bezierkurven ablesen, die man auch mathematisch überprüfen kann:

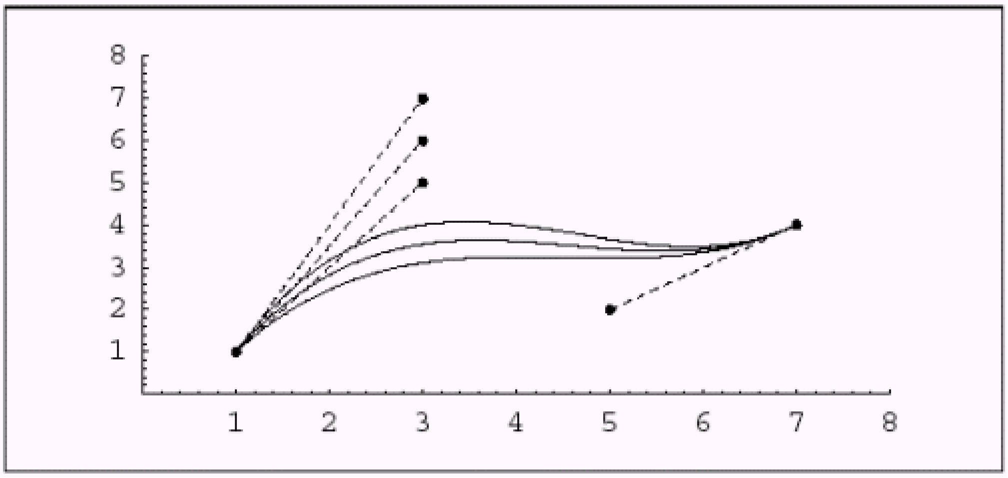

Abb. 2 : Kubische Bezierkurve mit zwei Stützstellen und zwei Kontrollpunkten.
Gestrichelt dargestellt sind die Verbindungen zwischen Stützstellen und Kontrollpunkten

- Die Kurve verläuft durch die beiden Stützstellen
- Die Tangentialvektoren an die Kurven in den Stützstellen zeigen in Richtung der Kontrollpunkte
- Je weiter die Kontrollpunkte von den Stützstellen entfernt sind, desto länger schmiegt sich die Kurve an die Tangenten in den Stützstellen an.
- Die Kurve verläuft gänzlich innerhalb der von den vier Punkten aufgespannten *konvexen Hülle* (dem von den vier Punkten aufgespannten Polygon) (Abb. 3)

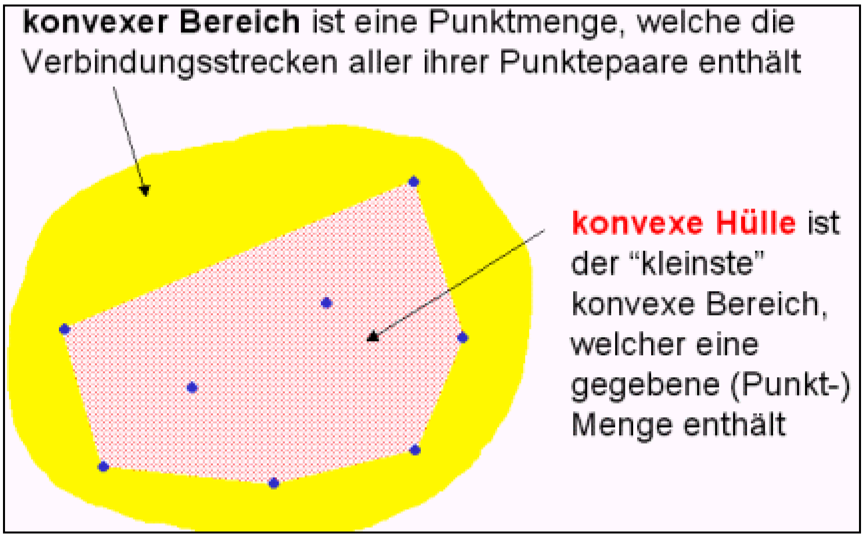

Abb. 3 : Konvexe Hülle

Die erwähnten Eigenschaften gelten auch für höhergradige Bezierkurven, die sich aus obiger Definition leicht verallgemeinern lassen. Für n+1 Datenpunkte $P_0, \ldots, P_n$ und $t \in [0, 1]$ ist die **Bezierkurve n-ten Grades** definiert durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

also wiederum eine durch Bernsteinpolynome gewichtete Summe der Datenpunkte. Ein Beispiel einer Bezierkurve 5. Grades ist in Abb. 4 zu sehen.

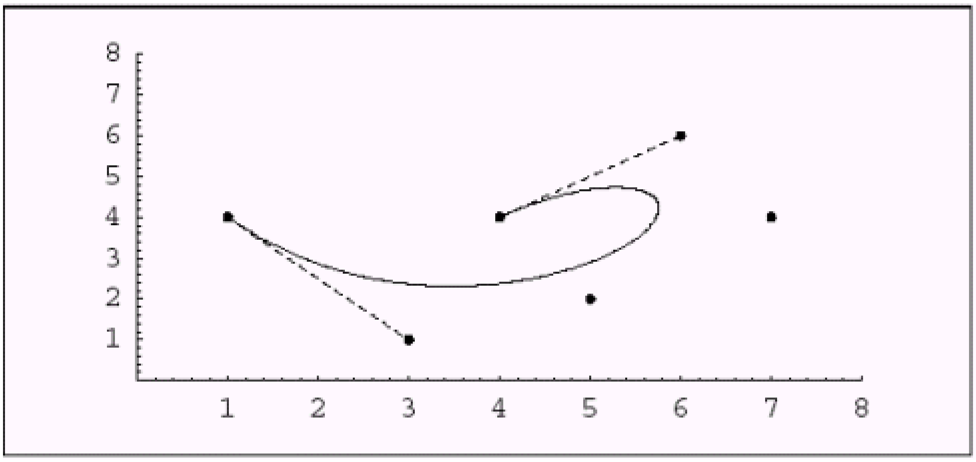

Abb. 4 : Durch sechs Datenpunkte definierte Bezierkurve 5. Grades.
Gestrichelt dargestellt sind die Verbindungen zwischen Stützstellen und benachbarten Kontrollpunkten.

Obwohl es aus Abb. 4 nicht ersichtlich ist, ergibt sich bei Bezierkurven höheren Grades wiederum ein Nachteil, welcher auch bei Interpolationspolynomen höheren Grades auftreten kann: Kurven höheren Grades können sehr stark oszillieren, d.h. geringe Veränderungen in den x-Werten rufen gewaltige Veränderungen in den y-Werten hervor - ein in der Praxis unerwünschter Effekt.

In der Praxis werden daher bei Bezierkurven stückweise kubische Lösungen bevorzugt. Diese Kurven verlaufen dann durch jeden vierten Datenpunkt. Die Tangenten in den Stützstellen werden durch die restlichen Kontrollpunkte festgelegt.

Bei stückweise kubischen Bezierkurven möchte man "glatte" Übergänge zwischen den Kurventeilen: die Ableitungen an den Stützstellen müssen also für zwei Kurvenstücke, die an diesem Punkt zusammentreffen, übereinstimmen (der letzte Kontrollpunkt des ersten Kurvenstücks muss auf der gleichen Geraden liegen wie der erste Kontrollpunkt des zweiten Kurvenstücks und der dazwischenliegende Stützpunkt). Eine stückweise kubische Bezierkurve durch sieben Datenpunkte ist in Abbildung 5 dargestellt.

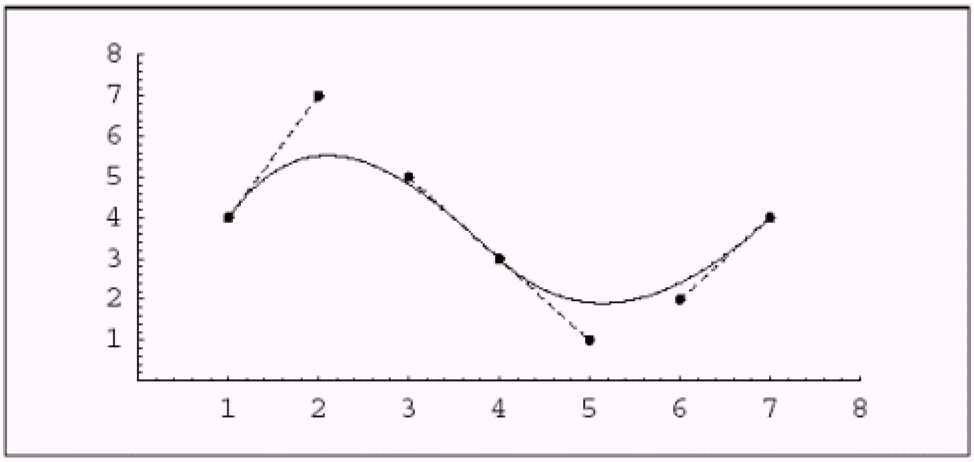

Abb. 5 : Stückweise kubische Bezierkurve.
Gestrichelt dargestellt sind die Verbindungen zwischen den Stützstellen und den Kontrollpunkten.

Beispiel 1: Gegeben seien die folgenden vier Punkte:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der kubischen Bezierkurve durch diese vier Punkte.
(b) Zeigen Sie, dass für t = 0 der Punkt P_0 und für t = 1 der Punkt P_3 gebildet wird.
(c) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in P_0 und P_3 und zeigen Sie, dass für t = 1/3 der Punkt P_1 und für t = 2/3 der Punkt P_2 erhalten wird. Hinweis: Sie erhalten die Tangente g in einem Punkt P = $(x(t_0), y(t_0))$ einer Kurve $(x(t), y(t))$ durch

$$g : X = P + \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} \cdot (t - t_0)$$

(d) Stellen Sie den Verlauf der Bezierkurve samt Tangenten in den beiden Stützpunkten graphisch dar.

Lösung von Beispiel 1:

In den folgenden Zeilen wird zuerst eine Funktion *Binomial* zur Berechnung von Binomialkoeffizienten definiert, danach der Grad n der Bezierkurve festgelegt und dann eine Funktion *Bernstein* zur Berechnung der Bernsteinpolynome definiert.

$$\mathrm{Binomial}(n,k) := \prod_{j=1}^{k} \frac{(n-j+1)}{j}$$

$$n := 3$$

$$\mathrm{Bernstein}(i,t) := \mathrm{Binomial}(n,i)\cdot t^{i}\cdot(1-t)^{n-i}$$

Als nächstes werden die Stütz- und Kontrollpunkte in einer Matrix P festgelegt, danach die parametrischen Funktionen x(t) und y(t) ermittelt und in einem xy-Diagramm dargestellt.

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x(t) := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Bernstein}(i,t)\cdot P_{0,i} \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 6\cdot t$$

$$y(t) := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Bernstein}(i,t)\cdot P_{1,i} \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 12\cdot t - 21\cdot t^{2} + 12\cdot t^{3}$$

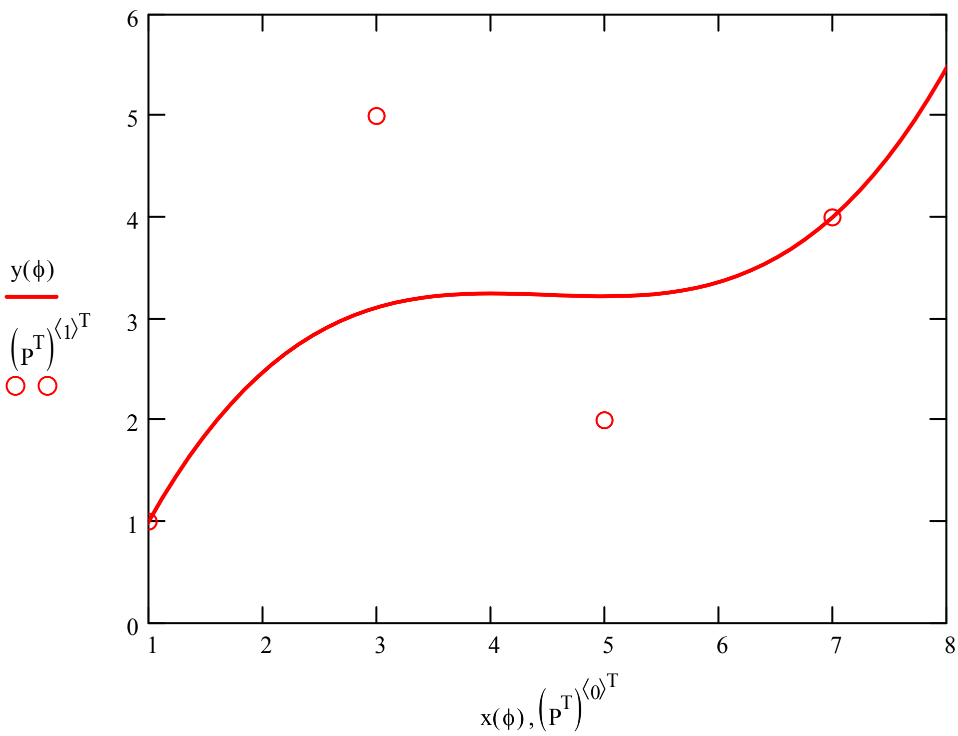

Abb. 6: Kubische Bezierkurve

ad b)

$x(0) = 1 \qquad x(1) = 7$

$y(0) = 1 \qquad y(1) = 4$

ad c)

Tangente im linken Stützpunkt:

$t := 0$

$a_1 := \frac{d}{dt}x(t) \text{ vereinfachen } \rightarrow 6$

$b_1 := \frac{d}{dt}y(t) \text{ vereinfachen } \rightarrow 12$

$x_1(t) := P_{0,0} + a_1 \cdot t \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 6 \cdot t$

$y_1(t) := P_{1,0} + b_1 \cdot t \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 12 \cdot t$

$x_1\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \qquad y_1\left(\frac{1}{3}\right) = 5$

Tangente im rechten Stützpunkt:

$t := 1$

$a_2 := \frac{d}{dt}x(t) \text{ vereinfachen } \rightarrow 6$

$b_2 := \frac{d}{dt}y(t) \text{ vereinfachen } \rightarrow 6$

$x_2(t) := P_{0,n} + a_2 \cdot (t - 1) \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 6 \cdot t$

$y_2(t) := P_{1,n} + b_2 \cdot (t - 1) \text{ vereinfachen } \rightarrow -2 + 6 \cdot t$

$x_2\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \qquad y_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

ad d)

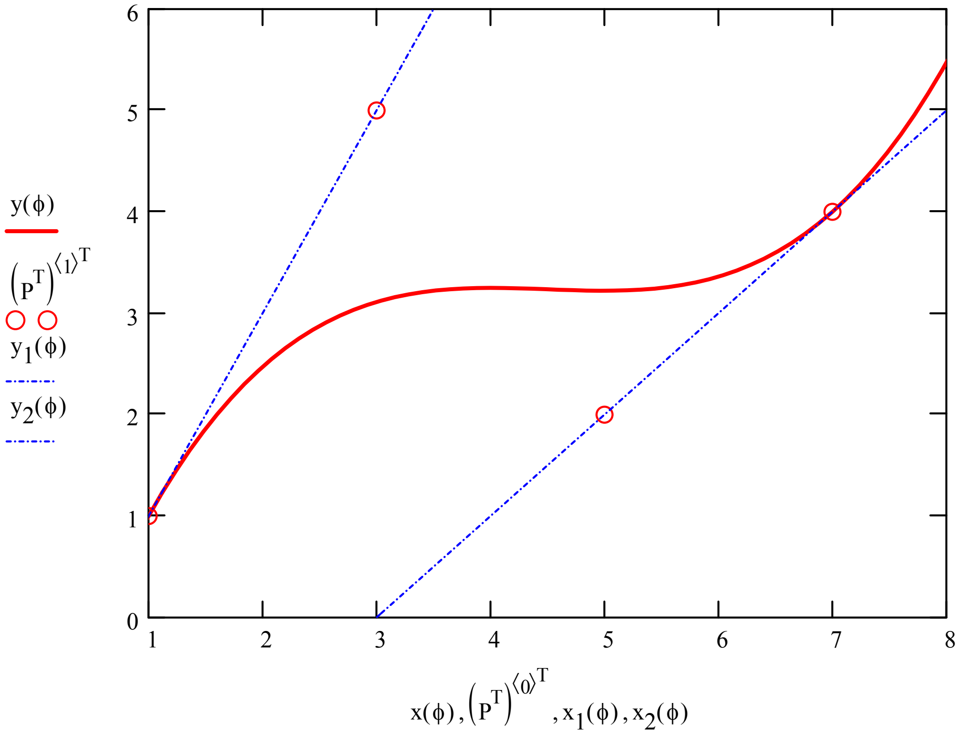

Abb. 7: Kubische Bezierkurve samt Tangenten in den Stützpunkten

Beispiel 2: Betrachten Sie die aus Abb. 4 ersichtlichen Datenpunkte.

(a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Bezierkurve 5. Grades.
(b) Stellen Sie den Verlauf der Bezierkurve samt Tangenten in den beiden Stützpunkten graphisch dar.

Hinweis: Achten Sie auf die Reihenfolge der Datenpunkte!

Lösung von Beispiel 2:

$n := 5$

$\mathrm{Bernstein}(i,t) := \mathrm{Binomial}(n,i)\cdot t^{i}\cdot(1-t)^{n-i}$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x(t) := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Bernstein}(i,t)\cdot P_{0,i} \text{ vereinfachen } \rightarrow 1 + 10\cdot t - 15\cdot t^4 + 8\cdot t^5$$

$$y(t) := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Bernstein}(i,t)\cdot P_{1,i} \text{ vereinfachen } \rightarrow 4 - 15\cdot t + 40\cdot t^2 - 30\cdot t^3 + 10\cdot t^4 - 5\cdot t^5$$

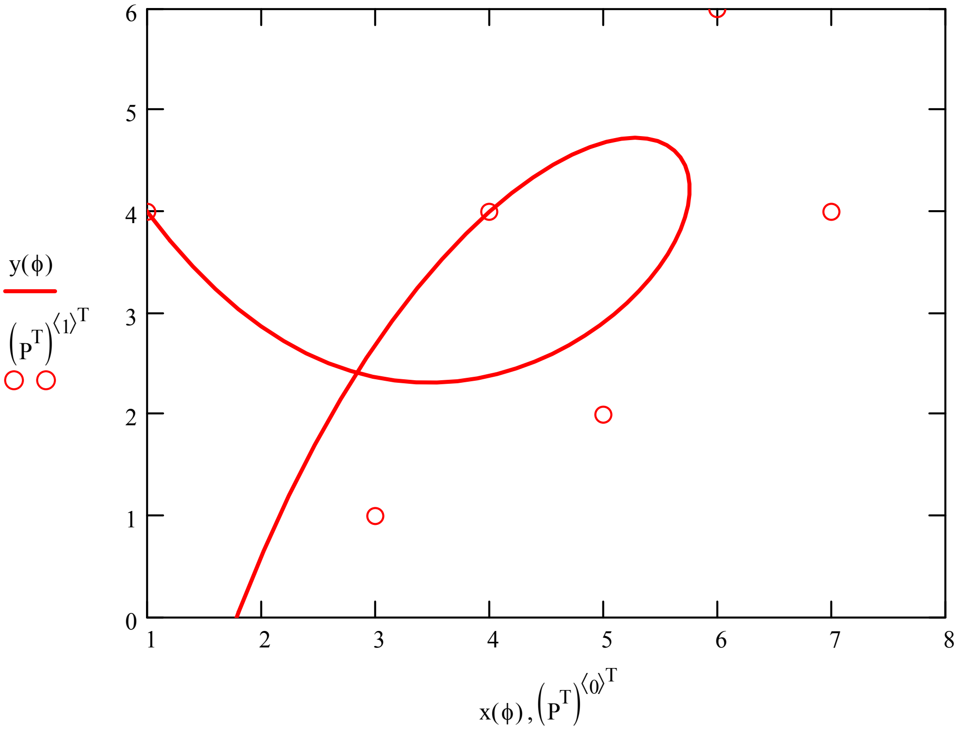

Abb. 8: Bezierkurve 5. Grades

Tangente im linken Stützpunkt:

$t := 0$

$a_1 := \frac{d}{dt}x(t)$ vereinfachen $\rightarrow 10$

$b_1 := \frac{d}{dt}y(t)$ vereinfachen $\rightarrow -15$

$x_1(t) := P_{0,0} + a_1 \cdot t$ vereinfachen $\rightarrow 1 + 10 \cdot t$

$y_1(t) := P_{1,0} + b_1 \cdot t$ vereinfachen $\rightarrow 4 - 15 \cdot t$

Tangente im rechten Stützpunkt:

$t := 1$

$a_2 := \frac{d}{dt}x(t)$ vereinfachen $\rightarrow -10$

$b_2 := \frac{d}{dt}y(t)$ vereinfachen $\rightarrow -10$

$x_2(t) := P_{0,n} + a_2 \cdot (t - 1)$ vereinfachen $\rightarrow 14 - 10 \cdot t$

$y_2(t) := P_{1,n} + b_2 \cdot (t - 1)$ vereinfachen $\rightarrow 14 - 10 \cdot t$

ad b)

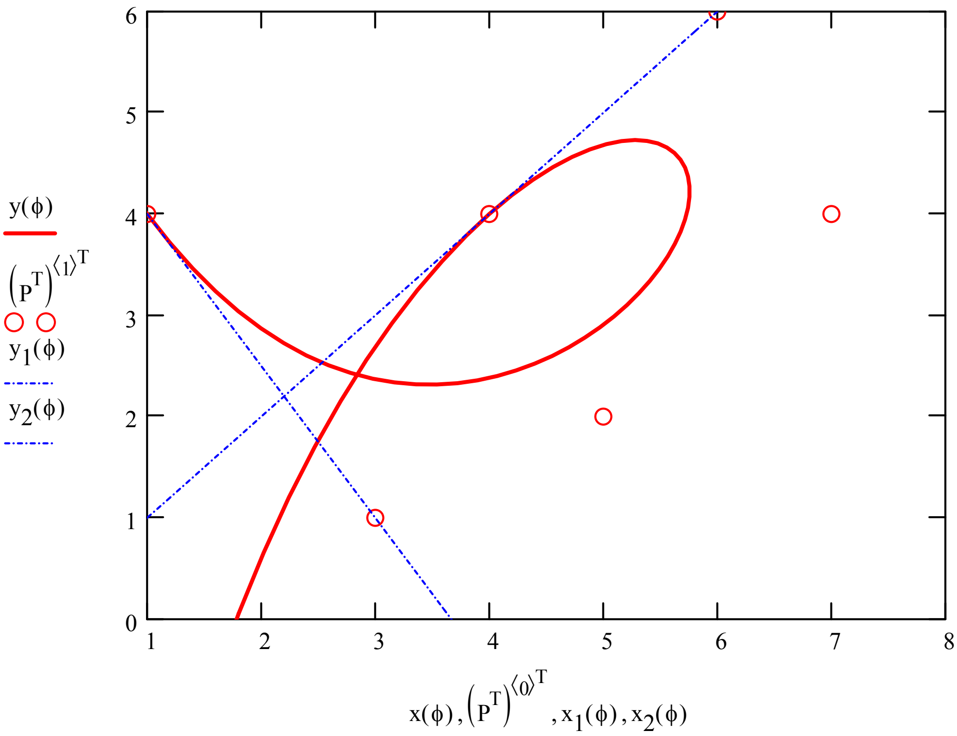

Abb. 9: Bezierkurve 5. Grades samt Tangenten in den Stützpunkten