Schmidhuber Heinrich heinrich_schmidhuber@hotmail.com

Berechnungen am Wankelmotor

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Linienintegral, Volumsintegrale, Parameterdarstellung, Näherungen bei Integralen

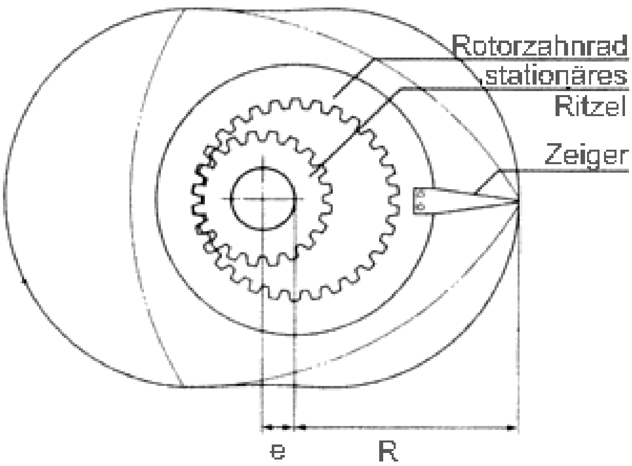
- Kurzzusammenfassung

  Es sollen einige Berechnungen am Wankelmotor durchgeführt werden, wie z.B. Hubraum, max. Geschwindigkeit der Kolbenspitzen, Umlaufweg der Spitze.

- Lehrplanbezug

  Angew. Mathematik, 5.Jahrgang, Abteilung Mechatronik oder Maschinenbau

Der Wankelmotor (auch: Kreiskolbenmotor) ist ein Verbrennungsmotor, bei dem keine zylindrischen Kolben in axialer Richtung hin- und herbewegt werden. Stattdessen findet sich die umkehrfreie Bewegung eines so genannten Kreiskolbens, der auf einer Exzenterwelle angeordnet in einem Trochoidgehäuse kreist und gleichzeitig um seine eigene Achse rotiert. Die Kontur des Kreiskolbens besteht aus drei abgeflachten Kreisbögen. Die Ecken stehen ständig in Kontakt mit dem Trochoidgehäuse und bilden so drei unabhängige Arbeitsräume. Benannt ist der Wankelmotor nach seinem Erfinder Felix Wankel, der ihn ab 1957 entwickelt hatte.
Der Mazda RX-8 ist das modernste Auto mit einem Kreiskolbenmotor (mehrfach ausgezeichnet). Der RENESIS-Kreiskolbenmotor von Mazda (zwei Rotoren mit jeweils 654,7 cm^3 Hubraum) leistet bis zu 170kW!



R...erzeugender Radius: Abstand Rotorspitze Mittelpunkt

a....großer Zahnkreisradius

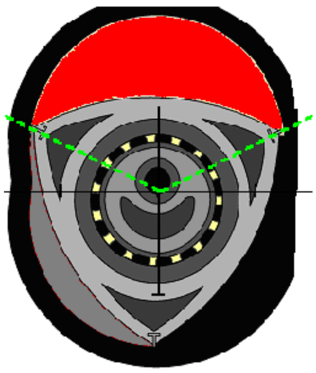
b....kleiner Zahnkreisradius

e...Exzentrizitiät

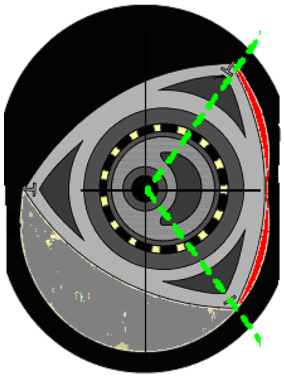
Die äußere Kontur des Wankelmotors wird durch die Raumkurve der Spitze des Kolbens beschrieben, und ist eine Epitrochoide. Will man eine Parameterdarstellung dieser Kurve gewinnen muss man zunächst die Beziehung zwischen den Abrollwinkel des Kolbens und den Abrollwinkel der Achse gefunden werden. Die Parameter-darstellung, die die Kontur des Brennraums beschreibt findet man unter Ausnutzen der trigonometrischen Winkelbeziehungen, der Koordinatentransformation und der Beziehung der Abrollwinkel.
Daraus ergibt sich folgende Parameterdarstellung der Kurve:

$x(t) = R \cdot \cos(t) - (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)$

$y(t) = R \cdot \sin(t) - (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)$



Maximales Hubraumvolumen von t [π/6 ; 5π/6]



Minimales Hubraumvolumen von t [-π/3; π/3]

Aufgabestellung:

- **Bestimmen Sie allgemein den Hubraum eines Kreiskolbenmotors mit den Parametern R,a,b,h und eine möglichst einfache Darstellung der Geschwindigkeit der Spitze.**
- **Bestimmen Sie die Parameter R, a und b, wenn gilt: h = 80 mm und e = 15 mm**
- **Bestimmen Sie die Weglänge eines Eckpunktes des Kolbens während einer Umdrehung.**
- **Stellen Sie die Kontur des Gehäuse graphisch dar und bestimmen Sie die Zeitpunkte der größten Geschwindigkeit (der Eckpunkte).**
- **Erklären Sie, wie man die Integrationsgrenzen bei max./min. Hubvolumen bestimmen kann.**

Hubraum und Geschwindigkeit; allgemeine Berechnungen

$y(t) := R \cdot \sin(t) - (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)$

Parameterdarstellung der Kolbenspitze

$x(t) := R \cdot \cos(t) - (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)$

einfache Darstellung der Geschwindigkeit

$x_a(t) := \frac{d}{dt}x(t)$ $\qquad x_a(t) \rightarrow -R \cdot \sin(t) + 3 \cdot (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)$

$y_a(t) := \frac{d}{dt}y(t)$ $\qquad y_a(t) \rightarrow R \cdot \cos(t) - 3 \cdot (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)$

$v(t) := \sqrt{x_a(t)^2 + y_a(t)^2}$ Geschwindigkeit der Kolbenspitze

$$v(t) \rightarrow \left[[-R \cdot \sin(t) + 3 \cdot (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)]^2 + [R \cdot \cos(t) - 3 \cdot (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$v(t)$ vereinfachen $\rightarrow \left(R^2 - 6 \cdot R \cdot \sin(t) \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot a + 6 \cdot R \cdot \sin(t) \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot b + 9 \cdot a^2 - 18 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 - 6 \cdot \right.$

Keine überaus schöne (einfache) Darstellung mit Mathcad
daher wird hier eine händische Berechnung bzw. Vereinfachung unternommen:

$$x_a(t)^2 = R^2 \cdot \sin(t)^2 - 6 \cdot R \cdot (a - b) \cdot \sin(t) \cdot \sin(3t) + 9\,(a - b)^2 \cdot \sin(3t)^2$$

$$y_a(t)^2 = R^2 \cdot \cos(t)^2 - 6 \cdot R \cdot (a - b) \cdot \cos(t) \cdot \cos(3t) + 9\,(a - b)^2 \cdot \cos(3t)^2$$

mit $\sin(t)^2 + \cos(t)^2$ vereinfachen $\rightarrow 1$

$$x_a(t)^2 + y_a(t)^2 = R^2 \cdot (1) - 6 \cdot R \cdot (a - b)[(\sin(t)) \cdot \sin(3t) + \cos(t) \cdot \cos(3t)] + 9 \cdot (a - b)^2$$

mit $\sin(t) \cdot \sin(3 \cdot t) + \cos(t) \cdot \cos(3 \cdot t)$ vereinfachen $\rightarrow 2 \cdot \cos(t)^2 - 1$

folgt für die Geschwindigkeit schließlich: $v(t) = \sqrt{R^2 + 9 \cdot (a - b)^2 - 12 \cdot R \cdot (a - b)\left(\cos(t)^2 - 1\right)}$

Hubraumberechnung

Hier wird eine Näherung gewählt, die eigentlich nur beim Kreis zulässig ist, nämlich:

$$\int \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(\alpha)\, d\alpha = \int \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(t)\, dt$$

Hier wird also $d\alpha/dt = 1$ angenommen!!!

$$r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$V := \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\cdot\pi} \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(t)^2\, dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(t)^2\, dt\right) \cdot 3 \rightarrow -3 \cdot h \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot b + 3 \cdot h \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot a$$

Entspricht: V = (maximales weniger minimalen Hubraumvolumen) mal 3 Kammern

$$V \Big|_{\text{vereinfachen}}^{\text{sammeln}, R, h} \rightarrow 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (a - b) \cdot h \cdot R$$

mit entsprechender Unterstützung des Rechners ("sammeln" und "vereinfache" gelint es, ein entsprechend einfaches Ergebnis zu erhalten.

Bestimmung der gesuchten Parameter

$V := 654.7 \cdot 10^3$ Vorgabe beim RENESIS-Motor

Vorgabe

$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ Vorgabe eines Dreikammerkolbenmotors

$a - b = 15$ vorgegebene Exzentrizität

$h = 80$ vorgegebene Höhe

$$\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(t)^2 \, dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot h \cdot r(t)^2 \, dt\right) \cdot 3 = V$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ h \\ R \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a,b,h,R) \rightarrow \begin{pmatrix} 45. \\ 30. \\ 80. \\ 104.99756145512444112 \end{pmatrix}$$

Somit lauten die Werte:
a = 45 mm
b= 30 mm
h = 80 mm
R = 105 mm

Darstellung der Kontur des Gehäuses

mit Zahnrädern und Kolben (vereinfacht) beim maximalen Hubvolumen

$x(t) := R \cdot \cos(t) - (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)$
$y(t) := R \cdot \sin(t) - (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)$ Gehäuse

$e := 15$ Exzentrizität

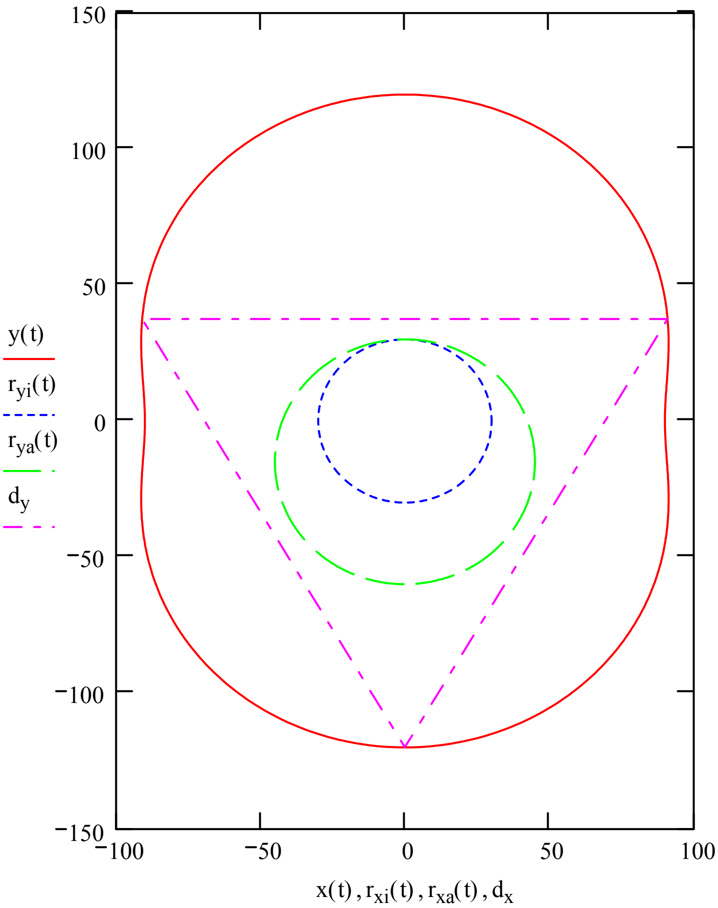
$r_{xi}(t) := b \cdot \cos(t)$
$r_{yi}(t) := b \cdot \sin(t)$ inneres Zahnrad

$r_{xa}(t) := a \cdot \cos(t) + \cos\left(3 \frac{\pi}{2}\right) \cdot e$
$r_{ya}(t) := a \cdot \sin(t) + \sin\left(3 \frac{\pi}{2}\right) \cdot e$ Äußeres Zahnrad

$$d_x := \begin{pmatrix} x\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ x\left(5\,\frac{\pi}{6}\right) \\ x\left(3\,\frac{\pi}{2}\right) \\ x\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \qquad d_y := \begin{pmatrix} y\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ y\left(5\,\frac{\pi}{6}\right) \\ y\left(3\,\frac{\pi}{2}\right) \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

Eckpunkte des Dreiecks

$t := 0, 0.01 .. 2\pi$



maximale Geschwindigkeit der Kolbenspitze

$t := t$

$$v(t) := \left[[-R \cdot \sin(t) + 3 \cdot (a - b) \cdot \sin(3 \cdot t)]^2 + [R \cdot \cos(t) - 3 \cdot (a - b) \cdot \cos(3 \cdot t)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

rechnerisch Bestimmung der Maxima:

$t := 1$ Startwert aus der Skizze unten

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}v(t) = 0$$

$t1 := \text{Suchen}(t)$ Erster Zeitpunkt

$t := 4$ Startwert aus der Skizze unten

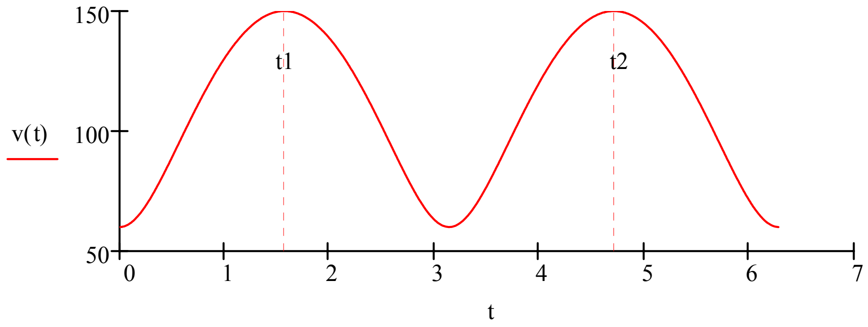
Vorgabe

$$\frac{d}{dt}v(t) = 0$$

$t2 := \text{Suchen}(t)$ Zweiter Zeitpunkt

graphische Darstellung

$t := 0, 0.01 .. 2\pi$



Weglänge der Kolbenspitze pro Umlauf

$t := t$

$$L := \int_0^{2\pi} v(t)\, dt$$

$L = 690.38$ in mm für einen Umlauf

Begründung der vereinfachten Integration (mit Grenzen):

Da die Exzentrizität mit 15 mm ziemlich klein ist, läuft der Kolben (respektive die Spitze) fast auf einer Kreisbahn; das begründet diese Vereinfachung durchaus.

Betrachtet man zuerst nur den Kolben, so erkennt man, dass der Öffnungswinkel (Winkel zwischen Kolbenspitze und Kolbenspitze) in jeder Stellung stets der gleiche ist (120°)!
Bei der Integration zur Hubraumberechnung betrachtet man jedoch den Hubraum und es ergibt sich somit aufgrund der Exzentrizität e **folgendes Problem**: In Stellung des maximalen Volumens tritt ein größerer Integrationswinkel zwischen den beiden Eckpunkten des Kolbens auf, als in Stellung des minimalen Volumens (hierbei ist der Winkel kleiner).
Diese beiden Winkel kann man in der obigen Skizze (Aufgabenstellung) sehr gut erkennen, auch dass ihre Größe unterschiedlich ist!
Aufgrund der oben genannten Vereinfachung (fast Kreisbahn) ist dieses Problem nicht gegeben, da es bei einer Kreisbahn keine Exzentrizität gibt! Dadurch erreicht man durch diese vereinfachte Annahme auch einfache Integrationsgrenzen (also jeweils 120° Öffnungswinkel); und darüber hinaus ein **exaktes Ergebnis**.

Link zur Beispielsübersicht