

Schmidhuber Heinrich heinrich_schmidhuber@hotmail.com

Druckmessung mittels R-L-C Serienschwingkreis

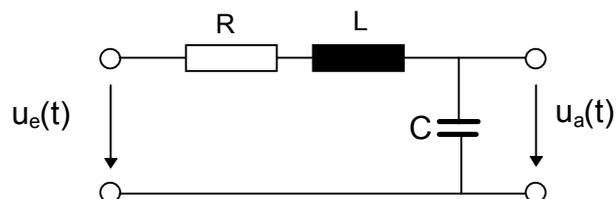
[Link zur Beispielsübersicht](#)



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Laplacetransformation, Differentialgleichungen 2.Ordnung, Schwingungsgleichung, Resonanz
- **Kurzzusammenfassung**
Das Verhalten eines LRC-Schwingkreises nach Änderung der Kapazität soll untersucht und analysiert werden.
- **Lehrplanbezug**
Angew. Mathematik, 5.Jahrgang, Abteilung Mechatronik oder Elektrotechnik



Aufgabenstellung



Da Frequenzen relativ bequem und vor allem sehr genau gemessen werden können, versucht man möglichst viele Messgrößen solcherart darzustellen. So ist es üblich, dass der Druck (oder eine Druckänderung) durch die Änderung der Kapazität eines Kondensators, der wie ein „Dosenbarometer“ aufgebaut ist, gemessen wird. (Wird durch Druckeinwirkung der Plattenabstand d verändert, so ändert sich auch die Kapazität.)

Dazu wird z.B. in einem R-C-L Serienschwingkreis entweder die Resonanzfrequenz bestimmt oder (und das vor allem bei sehr raschen Änderungen) die Spannung am Kondensator gemessen.

Gegeben sei nun folgende Schwingkreis: $R = 53 \text{ k}\Omega$, $L = 60 \text{ mH}$, $C = 12 \text{ pF}$ bei Arbeitsdruck. Durch eine Explosion 8 ms nach Messbeginn sinkt der Druck und damit die Kapazität sprunghaft auf 0,83 pF.

Der Schwingkreis wird mit einer Spannung ($U_0 = 6 \text{ V} \cdot \sin(\omega \cdot t)$), $f = 795,77 \text{ kHz}$) angeregt.

Aufgabenstellung:

- **Stellen Sie den Spannungsverlauf in den ersten 20 ms grafisch dar (mehrere Diagramme). Lösen Sie dazu die Aufgabe mit Hilfe der Laplace-Transformation.**
- **Bestimmen Sie die Resonanzfrequenzen und leiten Sie daraus eine Bedingung ab, mit welcher Frequenz solch ein Schwingkreis angeregt werden soll, damit ein plötzlicher Druckverlust sicher erkannt wird.**

Formel des elektrischen Schwingkreises mit Spannungsquelle:

$$\frac{d^2}{dt^2}u_c(t) + \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{d}{dt}u_c(t)\right) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_c(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_0(t)$$

Zeitpunkt := $8 \cdot 10^{-3}$ s Zeit des Druckverlustes

R := $53 \cdot 10^3$ Ω Widerstand des Schwingkreises

L := $60 \cdot 10^{-3}$ H Induktivität des Schwingkreises

C := $12 \cdot 10^{-12}$ F Kapazität des Schwingkreises vor dem Druckverlust

C_n := $0.83 \cdot 10^{-12}$ F Kapazität des Schwingkreises nach dem Druckverlust

f := $795.77 \cdot 10^3$ Hz Frequenz mit der der Schwingkreis erregt wird

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

U₀(t) := $6 \sin(\omega \cdot t)$ Störfunktion

Lösung des ersten Teiles (bei Normaldruck)

Vorgabe

Beginn der Messung (U(0) = 0; U'(0) = 0)

$$p^2 \cdot Y + \frac{R}{L} \cdot (p \cdot Y) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Y = \text{laplace}\left(\frac{U_0(t)}{L \cdot C}, t, p\right)$$

Laplace transformierte Differentialgl.

$$la(p) := \text{Suchen}(Y) \rightarrow \frac{7.4999555578414492960 \cdot 10^{25}}{1800000 \cdot p^4 + 47499466695677475919 \cdot p^2 + 15900000000000 \cdot p^3 + 3.97495289145151037}$$

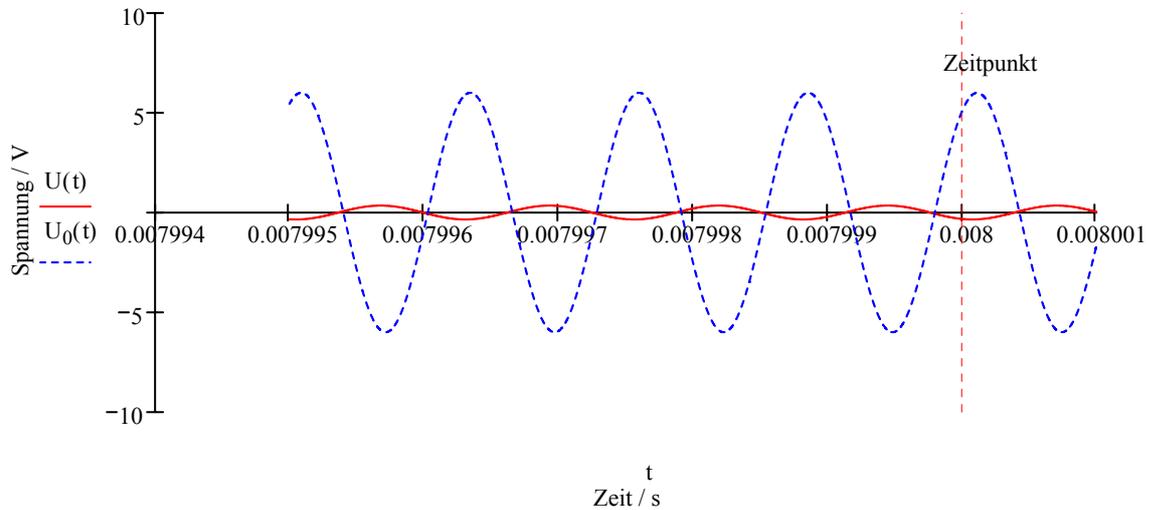
Lösung muss nochmals zurücktransformiert werden.

$$U(t) := \text{invlaplace}(la(p), p, t) \text{ vereinfachen} \rightarrow 6.3789923939991716697 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-441666.6666666666666666 \cdot t) \cdot cc$$

Vereinfachen ist hier wichtig, da ansonsten oftmals komplexe Zwischenergebnisse geliefert werden.

graphische Hilfsdarstellung zum Zeitpunkt der Druckänderung

$$t := 7.995 \cdot 10^{-3}, 7.995 \cdot 10^{-3} + 0.5 \times 10^{-9} .. 8.001 \times 10^{-3}$$



$U(t)$... Spannung am Kondensator bei Normaldruck,

$U_0(t)$... Störfunktion

Dabei sieht man, dass $U_{\max}(t) \ll 6$ Volt

Weiters hilft dieses Diagramm bei bestimmen der Phasendifferenz der Störspannung

Lösung des zweiten Teiles (bei niedrigem Druck)

$$t := t$$

Hier werden die Randwerte für die zweite Aufgabe bestimmt

$$u0 := U(\text{Zeitpunkt})$$

$$u_{ab}(t) := \frac{d}{dt}U(t)$$

$$u0_{ab} := u_{ab}(\text{Zeitpunkt})$$

Bestimmen des Phasenunterschiedes der Störspannung

$$\phi := 0$$

Vorgabe

$$U_0(\text{Zeitpunkt}) = 6 \cdot \sin(\phi)$$

$$\phi := \text{Suchen}(\phi)$$

$$C_1 := 8.3 \cdot 10^{-13} \quad \text{neuer Wert von C}$$

$$U_{00}(t) := 6 \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) \quad \text{Phasenverschobene Störfunktion}$$

$$\phi = 1.005 \quad \text{wichtig: Vergleich mit dem obigen Diagramm (da keine eindeutige Lösung)}$$

Lösen des zweiten Teiles der Differentialgl. (nach dem Druckabfall)

$$t := t$$

Vorgabe

$$\left(p^2 \cdot Y - u_{0ab} - p \cdot u_0 \right) + \frac{R}{L} \cdot (p \cdot Y - u_0) + \frac{1}{L \cdot C_1} \cdot Y = \text{laplace} \left(\frac{U_{00}(t)}{L \cdot C_1}, t, p \right)$$

$$la_1(p) := \text{Suchen}(Y) \rightarrow -4.80000000000000000000 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{1.1610572583697292963 \cdot 10^{30} \cdot p^2 - 3.744555540}{600000000000. \cdot p^4 + 2.7048015002976829322 \cdot 10^{25} \cdot p^2}$$

$$U_1(t) := \text{invlaplace}(la_1(p), p, t) \rightarrow -5.2481636516812334456 \cdot \exp(-441666.666666666666674 \cdot t) \cdot \cos(4459288.26614)$$

$$U_1(t) \begin{cases} \text{vereinfachen} \\ \text{gleit, 3} \end{cases} \rightarrow -5.25 \cdot \exp(-4.42 \cdot 10^5 \cdot t) \cdot \cos(4.46 \cdot 10^6 \cdot t) + 19.0 \cdot \exp(-4.42 \cdot 10^5 \cdot t) \cdot \sin(4.46 \cdot 10^6 \cdot t) +$$

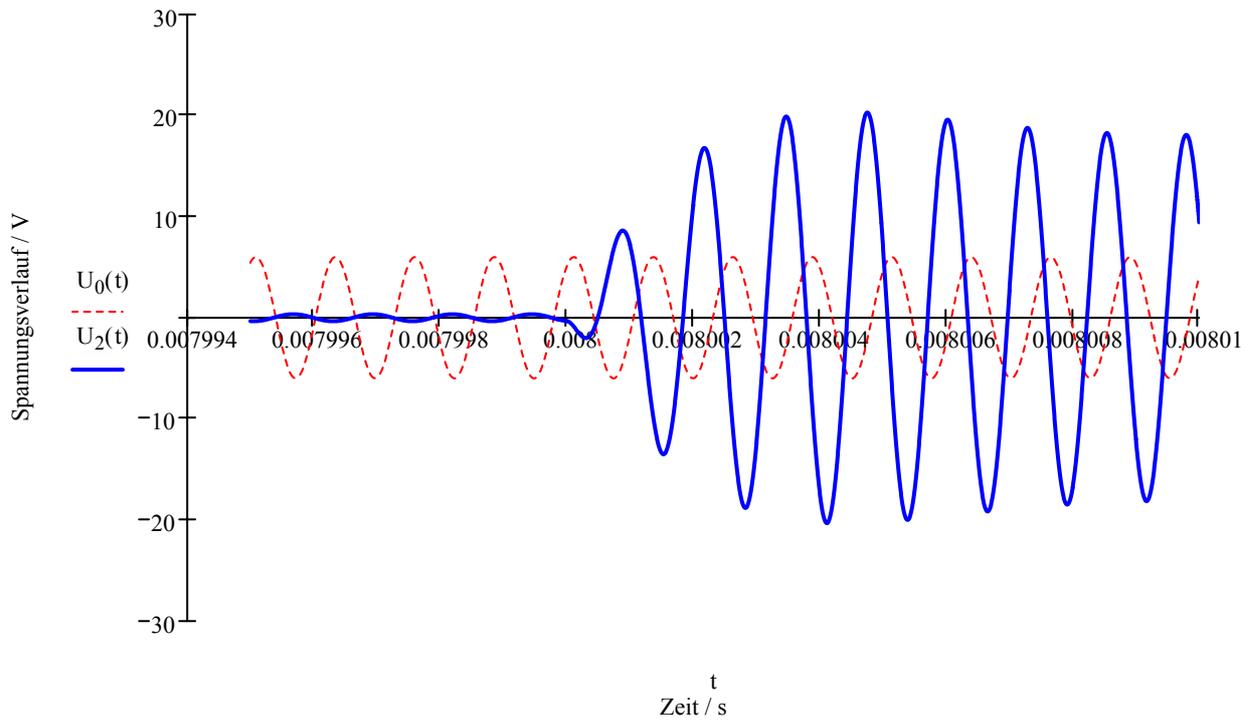
Zusammenfügen der Funktionen

$$U_2(t) := \begin{cases} U_1(t - \text{Zeitpunkt}) & \text{if } t \geq \text{Zeitpunkt} \\ U(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

graphische Darstellung des Verlaufes

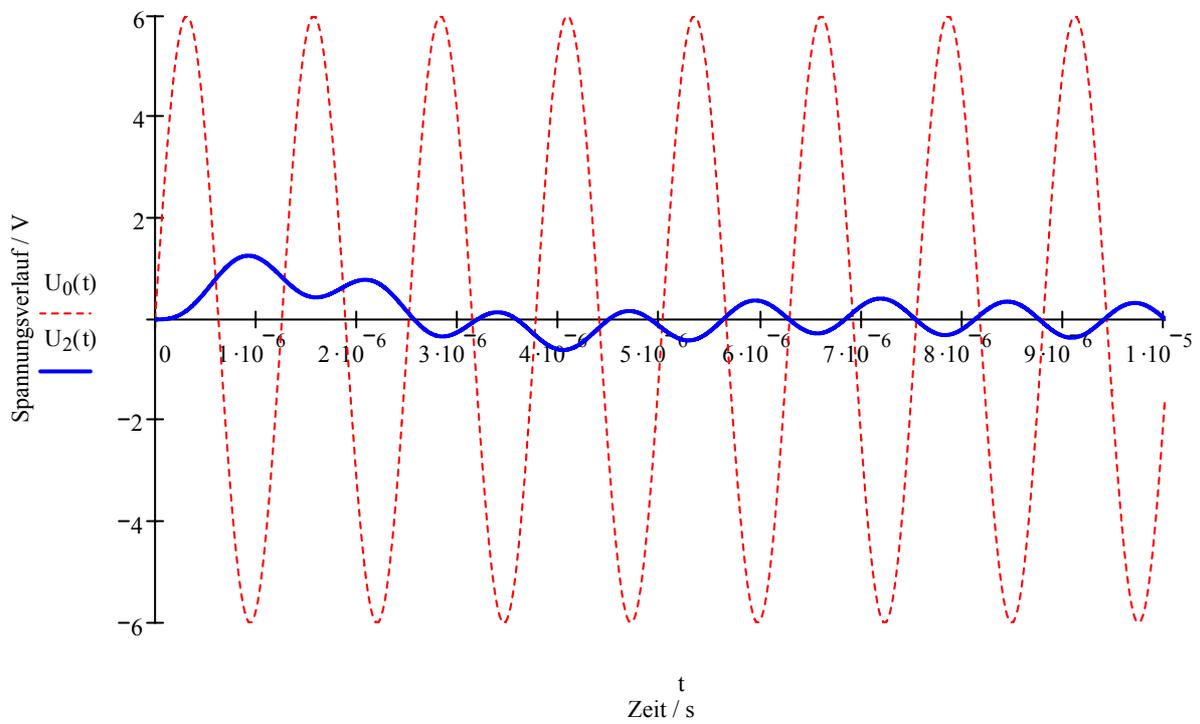
Der Spannungsverlauf zum Zeitpunkt der Druckabnahme.

$$t := 7.995 \cdot 10^{-3}, 7.995 \cdot 10^{-3} + 0.5 \times 10^{-8} .. 8.01 \times 10^{-3}$$



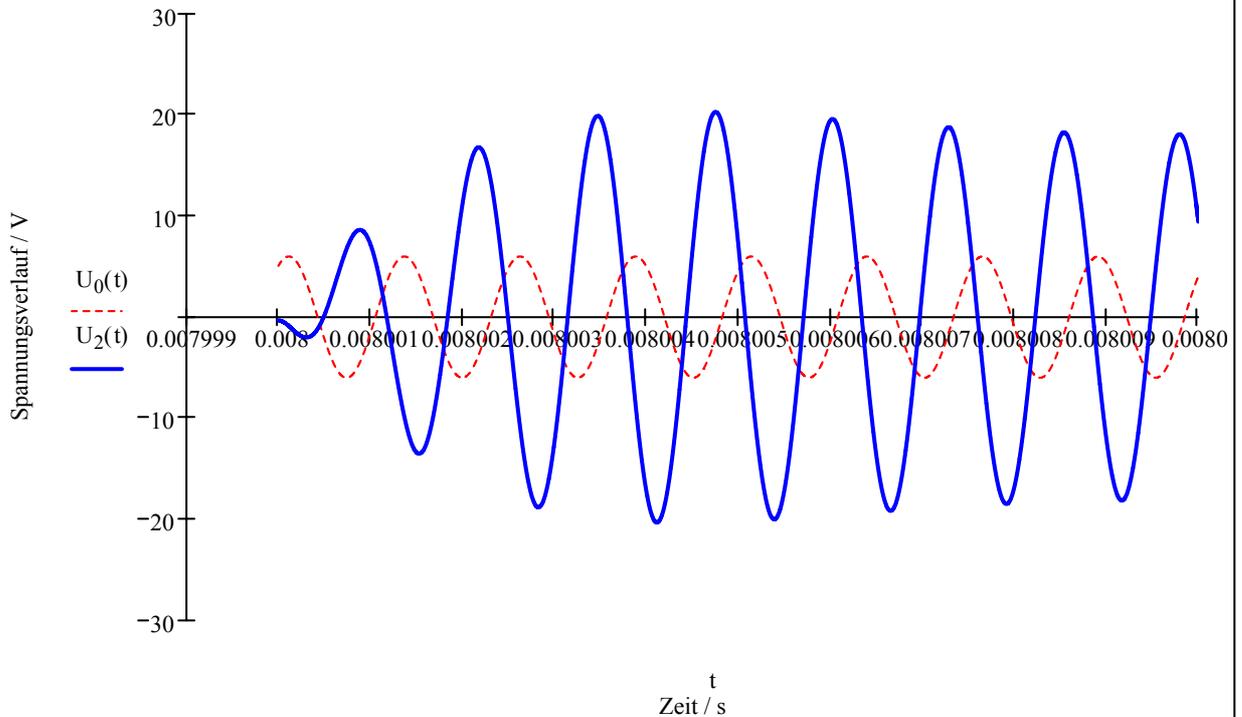
$t := 0, 10^{-9} .. 10^{-5}$

Spannungsverlauf bei Messbeginn



$t := \text{Zeitpunkt}, \text{Zeitpunkt} + 10^{-9} \dots \text{Zeitpunkt} + 10^{-5}$

Spannungsverlauf nach der Druckänderung



Resonanzfrequenz und Interpretation

Die Resonanzfrequenzen vor bzw. nach der Druckänderung

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = 1.876 \times 10^5$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C_1}} = 7.132 \times 10^5$$

Somit ist es sinnvoll, eine Anregerfrequenz nahe der Resonanzfrequenz nach der Druckabnahme zu wählen, weil sich dann (wie oben ersichtlich) die Maximalspannung am Kondensator deutlich ändert!

[Link zur Beispielsübersicht](#)