Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

Elektronische Spannungsstabilisierung mit Z-Diode

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Mathematische Behandlung einer elektronischen Schaltung mit einem nichtlinearen Bauelement (Z-Diode), Kirchhoff´sche Gesetze, nichtlineares Gleichungssystem, Geradengleichung, Schnittpunkt zweier Kennlinien

- Kurzzusammenfassung

  Im Rahmen der Angewandten Mathematik wird im vorliegenden Mathcad-Dokument eine einfache Standardschaltung der Elektronik, nämlich eine Schaltung zur Stabilisierung von Spannungsschwankungen behandelt. Die entsprechenden Gleichungen (Kirchhoff´sche Gesetze) werden formuliert und ausgewertet, um die Stabilisierungswirkung der Schaltung zu demonstrieren.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Max. 2 Unterrichtsstunden

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik/Fachtheorie, Elektronik und Digitaltechnik, evtl. Grundlagen der Elektrotechnik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

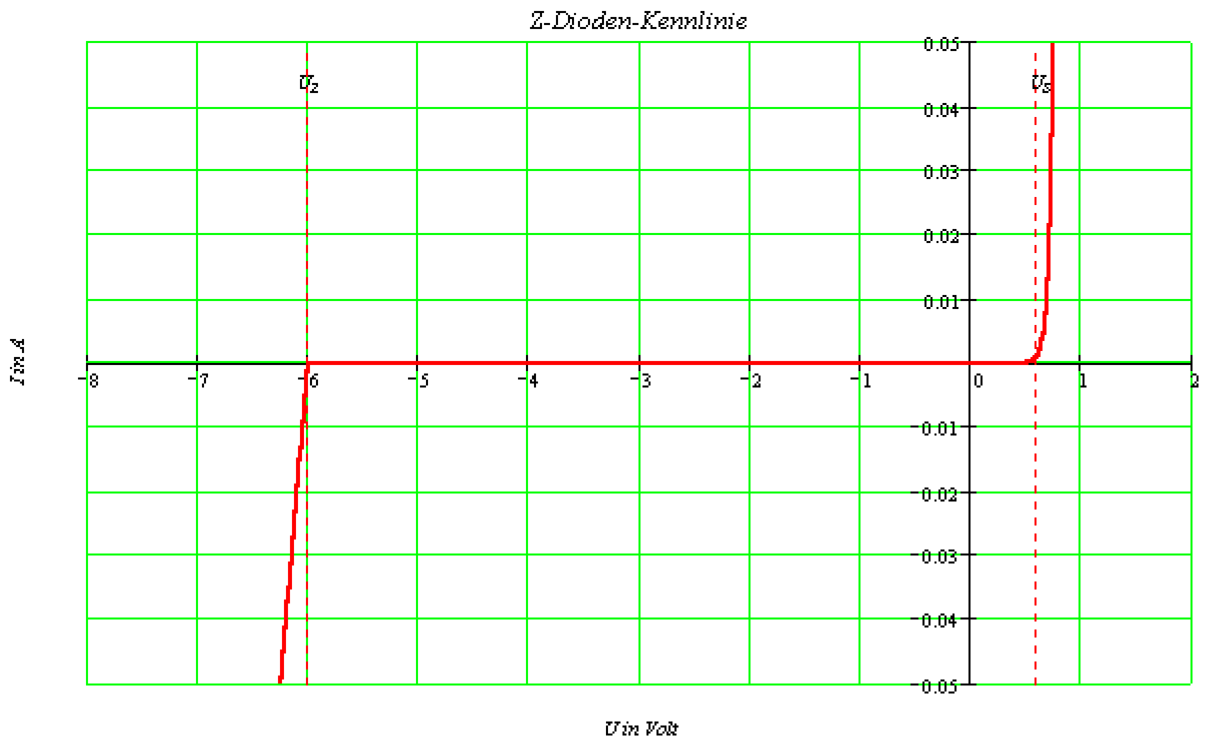
- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  In vereinfachter Form (ohne Mathcad-Aufbereitung und detaillierte Rechnung, dafür aber mit sinnvollen und plausiblen Näherungen) wird das vorliegende Thema bereits Ende des ersten Jahrganges der HTL Elektronik im Fach "Grundlagen der Elektrotechnik" (Unterkapitel: Ersatzquellen) vom Autor mit den Schülern bearbeitet.

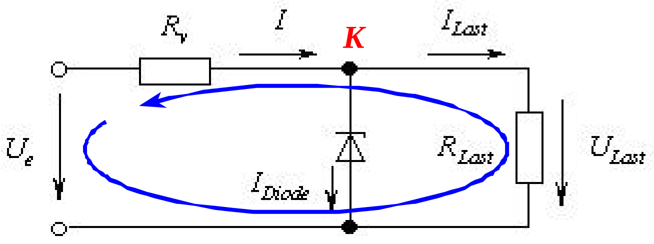
Vorbemerkung:
Das Mathcad-Dokument ist "interaktiv" in dem Sinn gestaltet, dass der Anwender an ganz bestimmten Stellen gezielt eingreifen kann (und soll). Diese "Interaktionspunkte" sind zum schnelleren Auffinden grün unterlegt. Die übrigen Teile des Dokumentes könnte man durch Sperren vor dem Zugriff des Anwenders schützen.

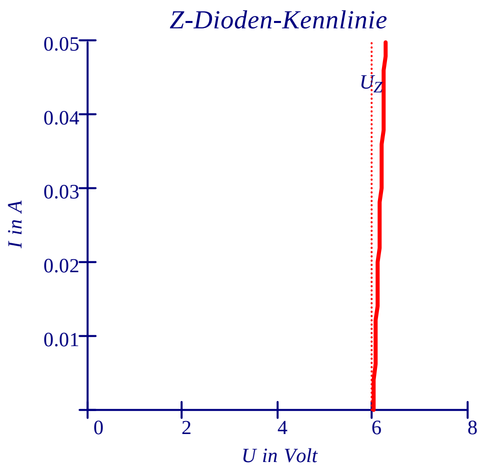
Die verwendete Schaltung besteht aus einer Z-Diode mit Vorwiderstand und einem Lastwiderstand, dessen Spannung für eine vorgegebene Eingangsspannung berechnet wird.
Bei einer Z-Diode handelt es sich um eine speziell dotierte Diode mit einem Durchlassbereich ($U > 0$) wie bei Si-Dioden üblich (Schwellspannung U_S bei etwa 0.6 V) und einem im Sperrbereich ($U < 0$) besonders scharf einsetzenden steilen Stromanstieg bei der sogenannten Z-Spannung U_Z. Das Erreichen dieses Durchbruchbereichs zerstört aber die Z-Diode nicht (sofern mit einem Vorwiderstand die Stromstärke begrenzt wird); die Z-Diode wird im Gegenteil sogar gerade in diesem Kennlinienbereich betrieben.

Wie schon erwähnt hat die Sperrkennlinie einen besonders ausgeprägten Knick und einen sehr steilen Anstieg. Beides ist für den Zweck der Spannungsstabilisierung von fundamentaler Bedeutung, wie im Verlauf der Abhandlung noch zu erkennen sein wird. Z-Spannungen können zwischen etwa 3V und mehreren 100 V liegen.
Eine typische Z-Dioden-Kennlinie ist hier dargestellt:



Da in unserem Fall nur die Stabilisierungsfähigkeit der Z-Diode im Vordergrund steht (wie meist bei Z-Dioden), wird ausschließlich der Sperrbereich der Kennlinie genutzt. Das Bauteil wird daher nur mit negativen Spannungen betrieben (3. Quadrant des *U-I*-Koordinatensystems).
Eine andere mögliche Betrachtungsweise ist: wir denken uns die Diode "verkehrt" in der Schaltung angeordnet und dementsprechend mit positiver Spannung versorgt; U_Z und der Diodenstrom werden damit natürlich ebenfalls positiv.
Die Kennlinie wird also am Ursprung gespiegelt dargestellt.





Im folgenden werden die Einheiten von Spannungen, Strömen, Widerständen und Frequenz weggelassen. Wenn nicht anders angegeben, sind für alle Größen die Grundeinheiten anzunehmen: V, A, Ω, Hz.

Die Maschengleichung ($\sum_n U_n = 0$ längs eines geschlossenen Weges in der Schaltung - Spannungsrichtungen beachten!) für die drei Spannungen lautet (blaue Linie in Pfeilrichtung verfolgen!):

$$U_e - U_{Last} - U_{Rv} = 0$$

Weiter schreiben wir die Knotengleichung ($\sum_n I_n = 0$ in jedem Knotenpunkt der Schaltung - Richtungen der Ströme beachten!) für den Punkt *K*

$$I - I_{Last} - I_{Diode} = 0$$

und das Ohm´sche Gesetz an

$$U_{Rv} = I \cdot R_V = \left(I_{Last} + I_{Diode}\right) \cdot R_V$$

und setzen alles oben in die Maschengleichung ein:

$$U_e - U_{Last} - I \cdot R_V = U_e - U_{Last} - \left(I_{Last} + I_{Diode}\right) \cdot R_V = U_e - U_{Last} - I_{Last} \cdot R_V - I_{Diode} \cdot R_V = 0$$

Wegen $I_{Last} = \dfrac{U_{Last}}{R_{Last}}$ ergibt sich daraus schließlich

$$U_e - U_{Last} - \frac{U_{Last}}{R_{Last}} \cdot R_V - I_{Diode} \cdot R_V = 0$$

Daraus lässt sich I_{Diode} isolieren:

$$U_e - U_{Last} - \frac{U_{Last}}{R_{Last}} \cdot R_V - I_{Diode} \cdot R_V = 0 \;\; \text{auflösen}, I_{Diode} \;\; \rightarrow \frac{\left(U_e \cdot R_{Last} - U_{Last} \cdot R_{Last} - U_{Last} \cdot R_V\right)}{R_{Last} \cdot R_V}$$

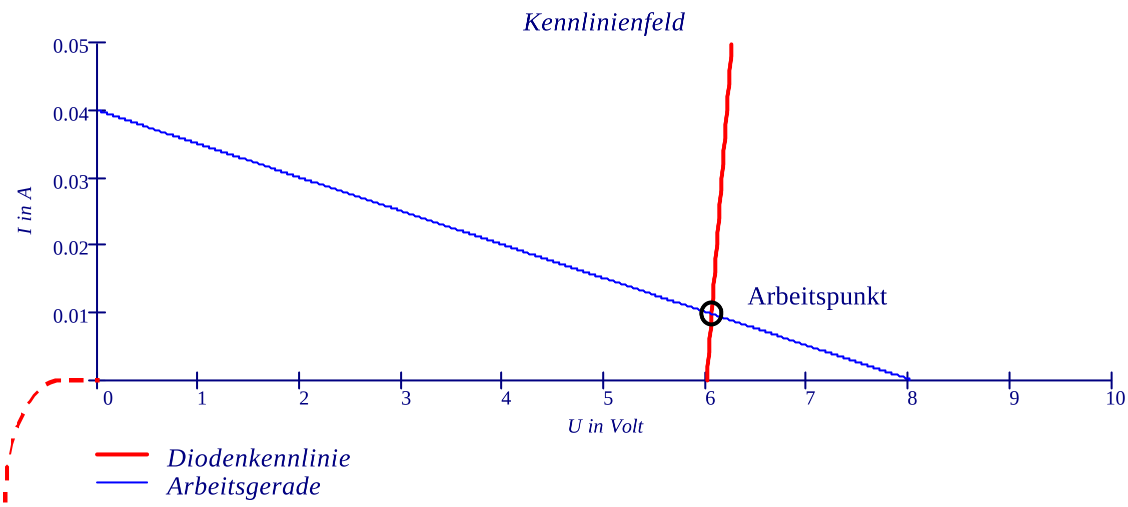
In etwas anderer Form geschrieben:

$$I_{Diode} = \frac{U_e}{R_V} - U_{Last} \cdot \frac{R_V + R_{Last}}{R_V \cdot R_{Last}} = \frac{U_e}{R_V} - \frac{U_{Last}}{R_{Last\_v}}$$

mit $R_{Last\_v} = \dfrac{R_V \cdot R_{Last}}{R_V + R_{Last}}$, was dem Ersatzwiderstand der Parallelschaltung von R_V und R_{Last} entspricht.

Die Gleichung für I_{Diode} stellt bei vorgegebenem U_e, R_V, R_{Last} einen linearen Zusammenhang zwischen I_{Diode} und $U_{Last} = U_{Diode}$ dar. Es handelt sich dabei um die Gleichung der sogenannten Quellenkennlinie bzw. Arbeitsgeraden. Ihr Schnittpunkt mit der *U*-Achse ist (wegen $I = 0$) der Leerlaufpunkt mit der Leerlaufspannung $U_{LL} = U_e \cdot \dfrac{R_{Last}}{R_{Last} + R_V}$. Der Schnittpunkt mit der *I*-Achse heisst wegen $U = 0$ Kurzschlusspunkt (dazu gehört ein Kurzschlussstrom $I_{KS} = \dfrac{U_e}{R_V}$).

Die Arbeitsgerade lässt jedoch die wesentliche Eigenschaften der Z-Diode - nämlich die Nichtlinearität ihrer Kennlinie - unberücksichtigt.
Die Diodenkennlinie ist aber nun eine weitere Kurve, die einer zweiten Beziehung zwischen U_{Diode} und I_{Diode} entspricht. Der Schnittpunkt der beiden Kurven ist der sogenannte Arbeitspunkt. Seine *U*-Koordinate ist die gesuchte Dioden- bzw. Lastspannung , die *I*-Koordinate ist der Diodenstrom. Auf diese Weise kann das nichtlineare Problem - nämlich "Welche(r) Diodenspannung(strom) stellt sich ein?" - gelöst werden; zwar "nur" grafisch/numerisch, aber eben deshalb sehr anschaulich, was für die Folgerungen und Interpretationen ein großer Vorteil ist.

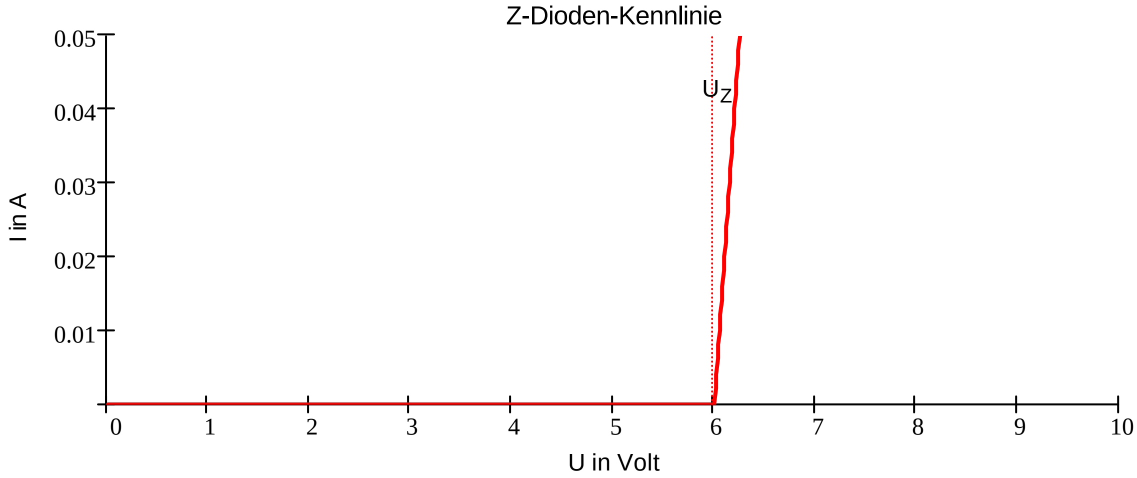


Für die vereinfachte mathematische Beschreibung des relevanten Teiles der Diodenkennlinie wählen wir (willkürlich) eine Z-Spannung von $U_Z := 6$ V und einen realistisch kleinen differenziellen Widerstand $r_Z := 5$ Ω. Damit kann der entsprechende Kennlinienteil definiert werden (der Kehrwert von r_Z ist die Steigung der Kennlinie - [Ohmsches Gesetz!]).

$$I_{Diode}(U) := \text{wenn}\left(U < U_Z, 0, \frac{U - U_Z}{r_Z}\right)$$

(stimmt natürlich nur für positive *U* -Werte!)

$U := 0, 0.01 .. 10$



Weitere Schaltungsdaten (ihrer vernünftigen Wahl bzw. Berechnung gehen ein paar einfache technische Überlegungen voraus, die hier nicht vorexerziert werden sollen):

$U_e := 2 \cdot U_Z$ $\quad R_V := 300$ $\quad R_{Last} := 600$ $\quad R_{Last\_v} := \frac{R_{Last} \cdot R_V}{R_{Last} + R_V}$ $\quad R_{Last\_v} = 200\ \Omega$

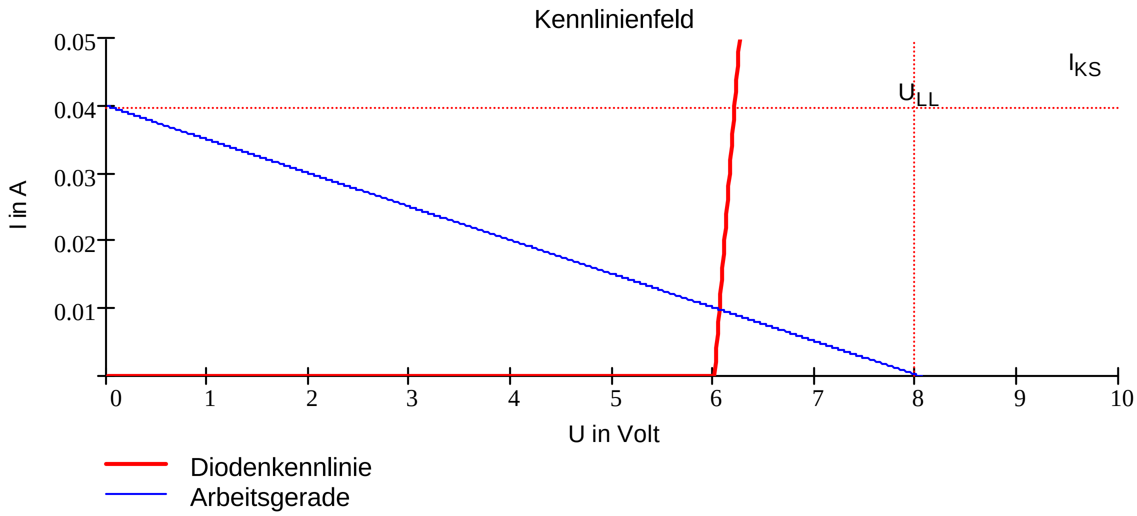
Mit diesen Zahlenwerten kann die Arbeitsgerade definiert werden:

$$I_{AG}(U, U_e) := \frac{U_e}{R_V} - \frac{U}{R_{Last\_v}}$$

Für Leerlaufspannung $U_{LL} := U_e \cdot \frac{R_{Last}}{R_{Last} + R_V}$ und Kurzschlussstrom $I_{KS} := \frac{U_e}{R_V}$ ergeben sich die Zahlenwerte

$U_{LL} = 8$ V, $I_{KS} = 0.04$ A (siehe Kennlinienfeld unten!):

$U := 0, 0.01 .. 10$



Aus der Grafik kann man eine Arbeitspunktspannung (= Dioden- oder Lastspannung) ablesen, die wegen der steilen Kennlinie nur wenig über $U_Z = 6$ Volt liegt. Sie wird wie folgt berechnet:

$U := U_Z$ $\qquad U_{Last} := \mathrm{wurzel}(I_{AG}(U, U_e) - I_{Diode}(U), U)$ $\qquad U_{Last} = 6.049 \ \mathrm{V}$

Daraus erkennt man nun ganz allgemein (wobei besonders das grafische Element der Methode äußerst hilfreich ist):
Ändert sich die Eingangsspannung U_e der Schaltung, so kommt es zu einer Parallelverschiebung der Arbeitsgeraden, da deren Steigung von U_e nicht abhängt.

Solange dabei aber der Arbeitspunkt im steilen Bereich der Diodenkennlinie bleibt, ändert sich an der Lastspannung U_{Last} nur sehr wenig --> sie wird trotz schwankender Eingangsspannung gut stabilisiert.

Dieses Stabilisierungsverhalten wird im folgenden noch genauer untersucht und grafisch dargestellt:

Die schwankende Eingangsspannung wird als Sinusspannung mit Netzfrequenz, einem Scheitelwert U_S und einem Offset von $U_{e0} := 2 \cdot U_Z$ (in diesem Fall $U_{e0} = 12$ V) definiert:

$f := 50$ $\qquad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f$ $\qquad T := \frac{1}{f}$ $\qquad U_e(t, U_S) := U_{e0} + U_S \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Die Lage des Arbeitspunktes ändert sich nun mit der Eingangsspannung; wir definieren daher die Arbeitspunktspannung (= Lastspannung) als zeitabhängige Schnittpunktkoordinate der beiden Kennlinien:

$U := U_Z$ $\qquad U_{Last}(t, U_S) := \mathrm{wurzel}(I_{AG}(U, U_e(t, U_S)) - I_{Diode}(U), U)$

Der zeitliche Verlauf von Eingangsspannung und Lastspannung zeigt folgendes Ergebnis:
Bis zu einem Scheitelwert der Eingangsspannungsschwankung von

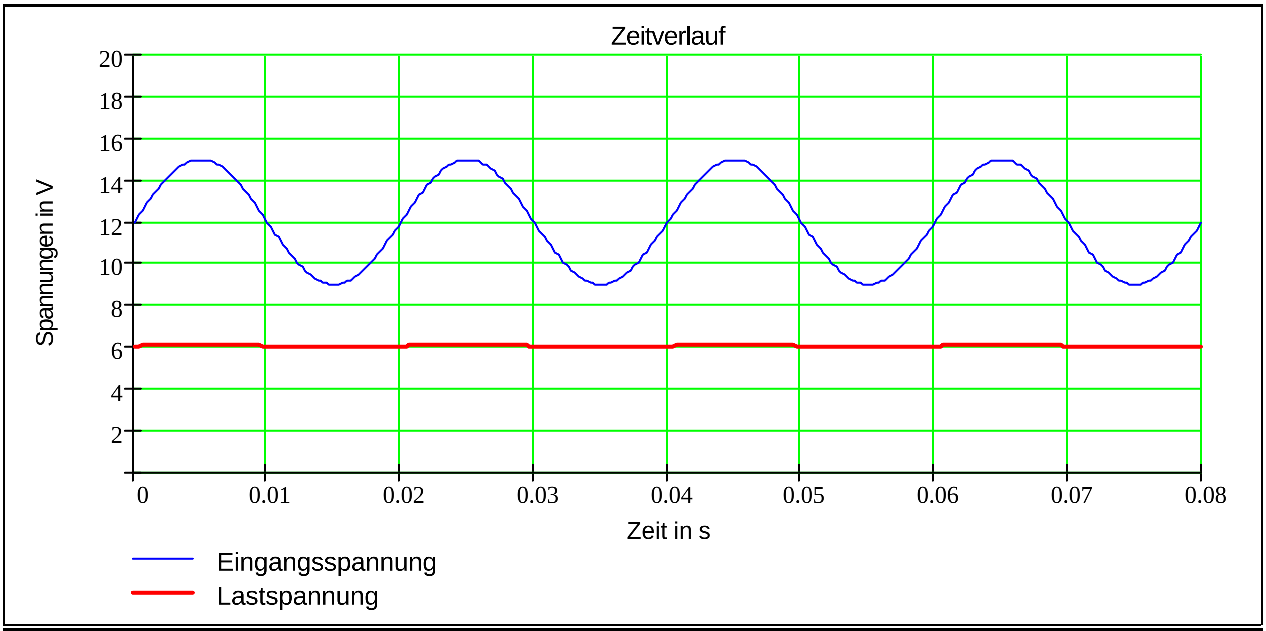
$U_{e0} - \mathrm{wurzel}\left(U_{e0} \cdot \frac{R_{Last}}{R_{Last} + R_V} - U_Z, U_{e0}\right) = 3$ Volt bleibt die Lastspannung sehr gut stabilisiert und annähernd konstant auf etwa $U_Z = 6$ V weil sich der Arbeitspunkt permanent im steilen Kennlinienbereich befindet.

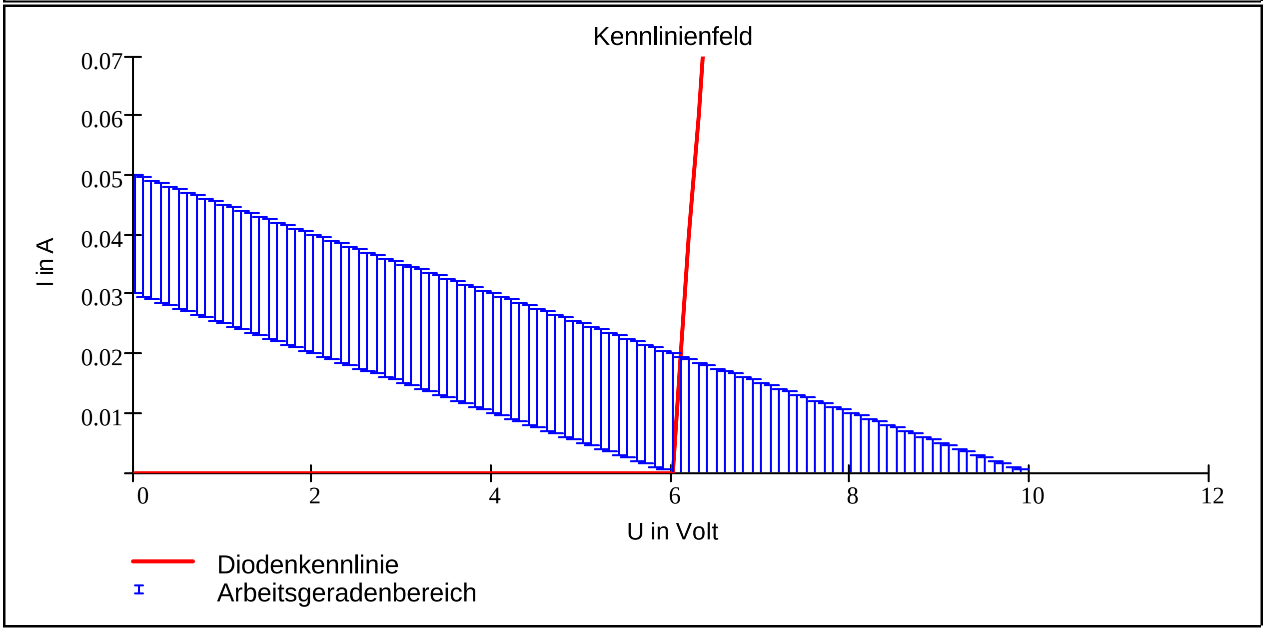
Bei größeren Schwankungen geht die stabilisierende Wirkung der Schaltung zeitweise (nämlich immer dann, wenn die Eingangsspannung ihre niedrigen Werte annimmt - wenn also die Arbeitsgerade gegen den Ursprung hin verschoben wird) oder u. U. auch gänzlich verloren, da der Arbeitspunkt zumindest zwischendurch aus dem steilen Bereich der Diodenkennlinie herausschwingt.

Das konkrete Stabilisierungsverhalten der Schaltung hängt selbstverständlich von ihrer Dimensionierung und den Daten der Diode ab (Eingangsoffsetspannung U_{e0}, R_V, R_{Last}, U_Z, r_Z). Mit diesen Zahlenwerten kann man beliebig spielen.

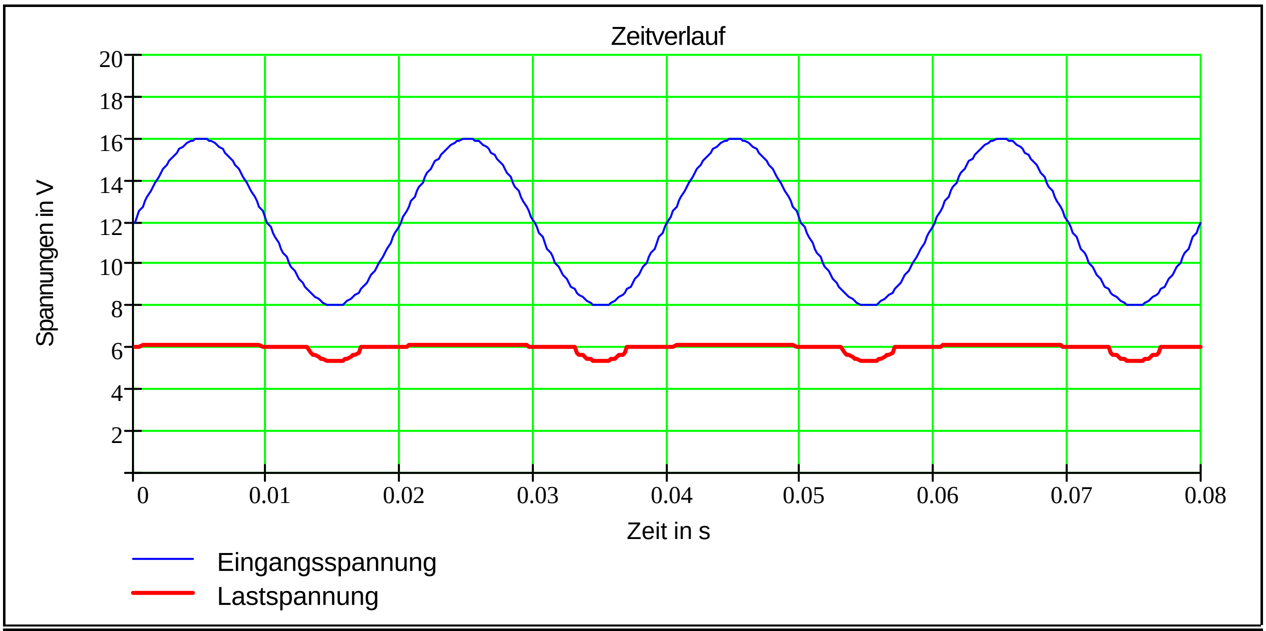
$t := 0, \frac{T}{100} .. 4 \cdot T$ $UU := 0, .1 .. 12$

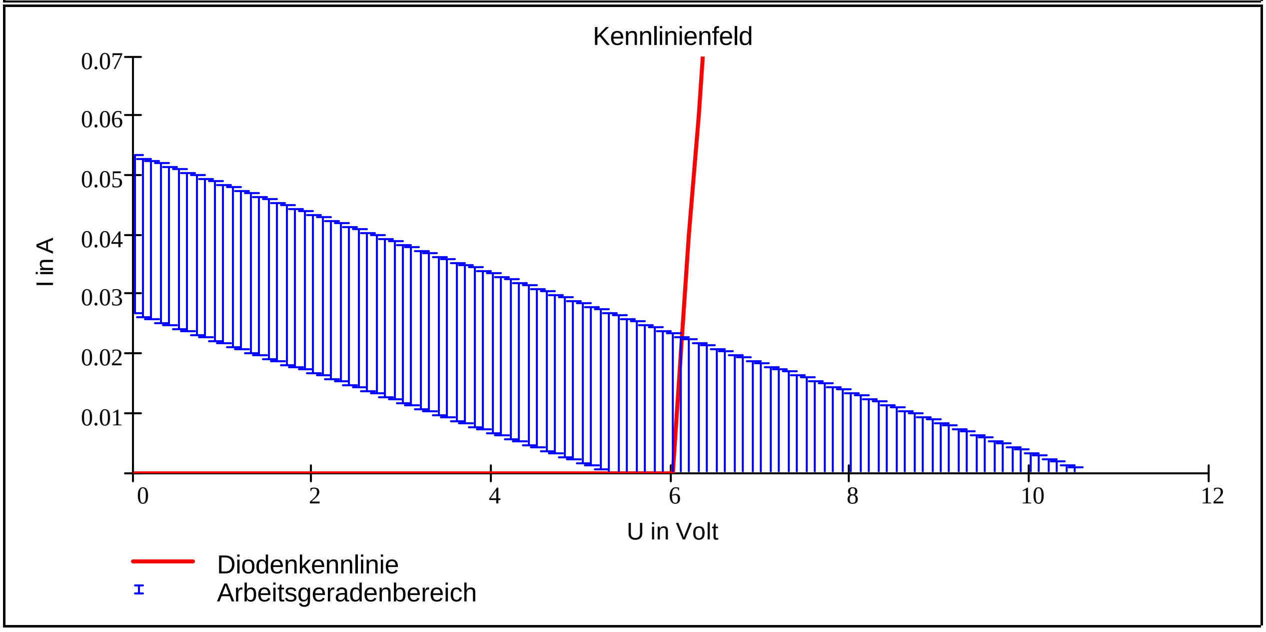
Scheitelwert der Eingangsspannungsschwankung: $U_S := 3$



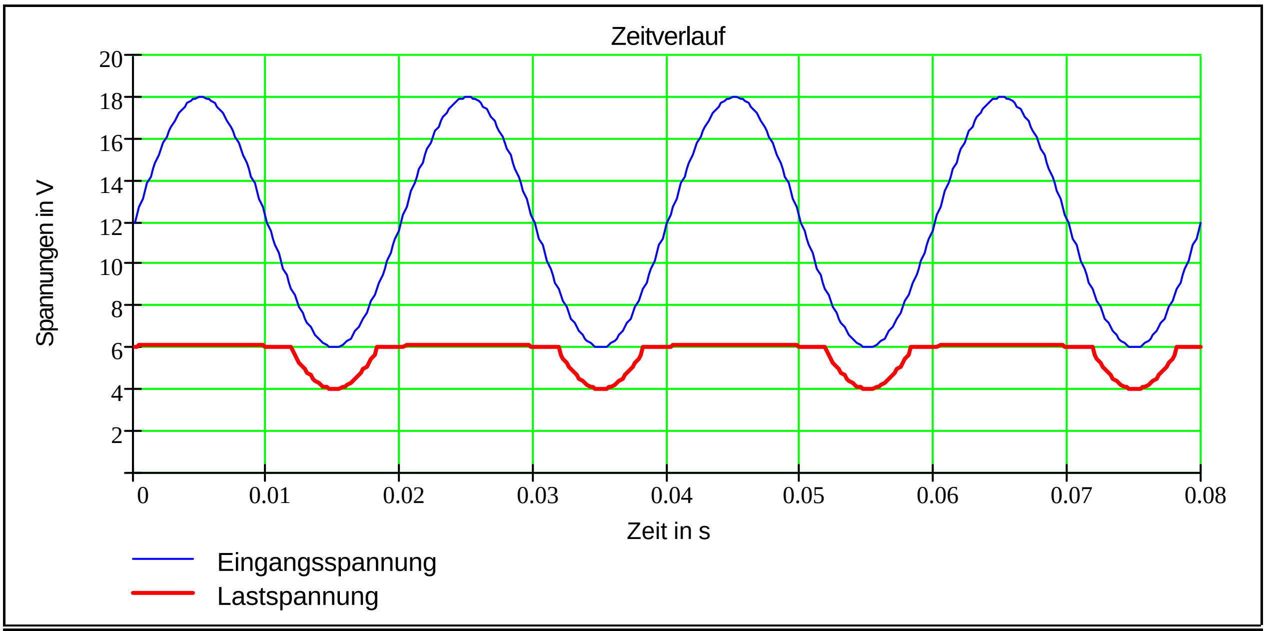


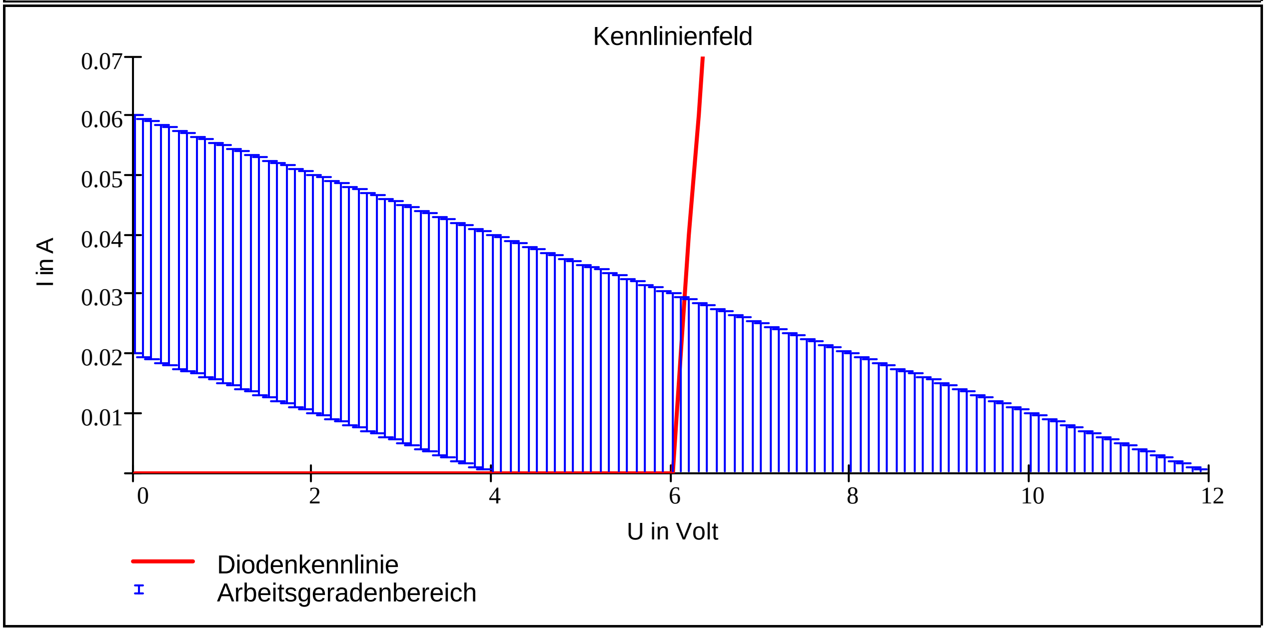
Scheitelwert der Eingangsspannungsschwankung: $U_S := 4$





Scheitelwert der Eingangsspannungsschwankung: $U_S := 6$





Die im letzten Abschnitt vorbereitete Animation (der Teil zwischen den beiden waagrechten Linien) demonstriert die stabilisierende Wirkung der Schaltung (bzw. auch ihr Versagen) durch Darstellung der zeitabhängigen Spannungen und ihrer Entsprechungen im Kennlinienfeld.
Sie ist für einen Bereich der FRAME-Variablen von 0 bis $MAX\_FRAME - 1$ ausgelegt und läuft am besten in einer Endlosschleife ab.

$MAX\_FRAME := 200$ $tt := \frac{4 \cdot T}{MAX\_FRAME} \cdot FRAME$ $U_S := 5$ $UU := 0, .1 .. 12$