Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

Reglerdimensionierung nach Ziegler-Nichols

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Regelungstechnik, Laplacetransformation, Umgang mit komplexen Zahlen, Kurvendiskussion, Differenzialgleichungen

- Kurzzusammenfassung

  Für eine vorgegebene PT3-Regelstrecke wird nach der Methode von Ziegler-Nichols (Wendetangentenverfahren) ein P-Regler dimensioniert. Die Güte der Regelung wird anhand eines Bodediagrammes und durch Berechnung von Amplituden- und Phasenrand überprüft.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Max. 2 Unterrichtsstunden (je nach Hilfestellung durch den Betreuer)

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik/Fachtheorie, Regelungstechnik 4./5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

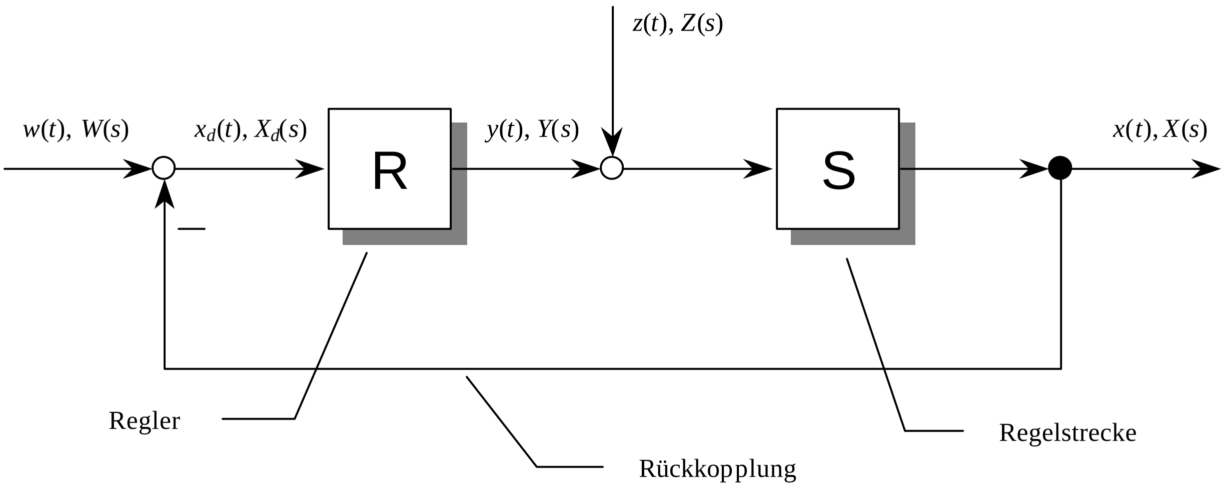
  Wilhelm Haager, Regelungstechnik, Verlag hpt
  Heinz Mann, Horst Schiffelgen, Rainer Froriep, Einführung in die Regelungstechnik, Verlag Hanser

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Die Thematik wurde vom Autor als eine von drei gleichwertigen Teilaufgaben im Rahmen der schriftlichen Reifeprüfung im Fach Angewandte Mathematik und Fachtheorie praktisch erprobt.
  Der Autor unterrichtete in der betreffenden Klasse Mess- und Regeltechnik (nicht Mathematik!) und steuerte in dieser Eigenschaft und als Co-Betreuer im Mathematikunterricht die im Anhang wörtlich angeführte Aufgabenstellung zur Matura bei.

Einleitung

Als Regelkreis wird der Standardregelkreis vorausgesetzt, wie ihn das folgende Bild zeigt:



Bei der Regelstrecke handelt es sich um ein Übertragungsglied mit PT3-Verhalten mit der folgenden vorgegebenen Laplace-Übertragungsfunktion:

$$F_S(s) := \frac{2}{(1+3\cdot s)^3}$$

Das Wendetangentenverfahren nach Ziegler-Nichols geht von einer S-förmigen Sprungantwort der Regelstrecke aus. Mit Hilfe der Wendetangente der Sprungantwort wird ein PT1-Totzeit-Ersatzmodell der Strecke berechnet. Die Parameter dieses Ersatzmodells werden zur Dimensionierung des Reglers benötigt.

Sprungantwort, Wendetangente, Reglerdimensionierung

Die Sprungantwort $g(t)$ der Strecke ist die inverse Laplacetransformierte von $F_S(s)\cdot\frac{1}{s}$:

$$g(t) := invlaplace\left(\frac{F_S(s)}{s}, s, t\right) \rightarrow \frac{-1}{9}\cdot t^2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) - \frac{2}{3}\cdot t\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) - 2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) + 2$$

Korrekterweise muss dieses Ergebnis (wegen $g(t) = 0$ für $t < 0$) noch mit dem Einheitssprung multipliziert werden:

$$g_{plot}(t) := invlaplace\left(\frac{F_S(s)}{s}, s, t\right)\cdot\Phi(t) \rightarrow \left(\frac{-1}{9}\cdot t^2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) - \frac{2}{3}\cdot t\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) - 2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) + 2\right)\cdot\Phi(t$$

Zur Berechnung der Wendetangente greifen wir wegen der Berechnung der beiden Ableitungen natürlich auf die Version ohne $\Phi(t)$ zurück:

$$g_t(t) := \frac{d}{dt}g(t) \rightarrow \frac{1}{27}\cdot t^2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right)$$

$$g_{tt}(t) := \frac{d^2}{dt^2}g(t) \rightarrow \frac{2}{27}\cdot t\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right) - \frac{1}{81}\cdot t^2\cdot exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right)$$

Berechnung der Zeit-Koordinate t_{WP} des Wendepunktes:

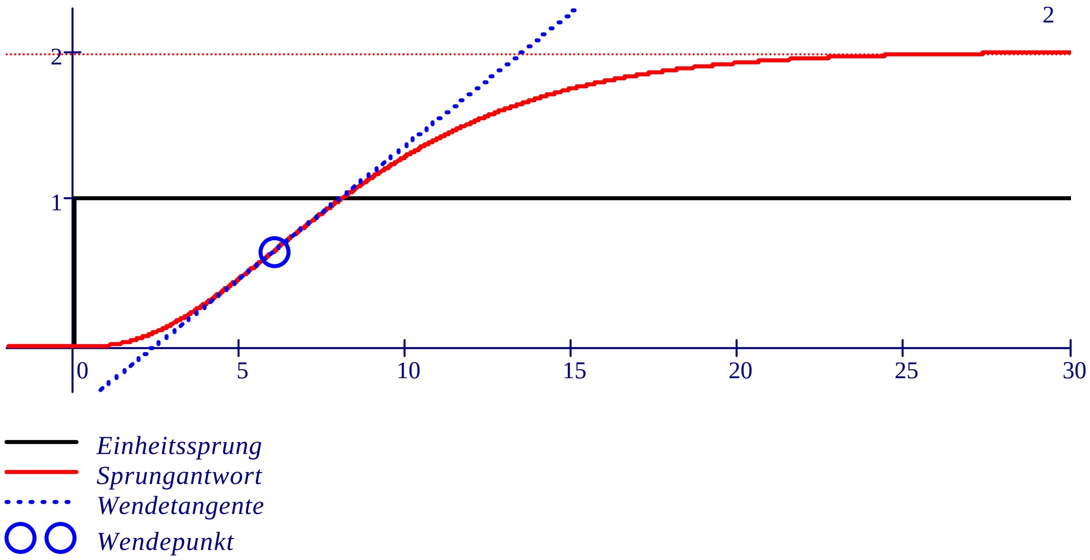
$t_{WP} := g_{tt}(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ wovon nur die zweite Lösung sinnvoll ist!

Berechnung der Wendetangente:

Tangentengleichung: $tang(t) := g_t\left(t_{WP_1}\right) \cdot \left(t - t_{WP_1}\right) + g\left(t_{WP_1}\right)$

$tt := -2, -1.99 .. 30$

Sprungantwort und Wendetangente



Für das PT1-Tt-Ersatzmodell werden nun die Schnittpunkte der Wendetangente mit Zeitachse (dies ergibt die Ersatz-Totzeit T_t) und mit der waagrechten Asymptote der Sprungantwort für t --> ∞ berechnet (daraus erhält man nach Abzug der Totzeit die Zeitkonstante des PT1-Teils):

$T_t := tang(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{(9 \cdot exp(-2) - 1)}{exp(-2)}$ $T_t = 2.416$

$T1 := tang(t) = 2 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{27}{2}$ $T := T1 - T_t$ $T = 11.084$

Zum Vergleich berechnen wir die Sprungantwort des PT1-Tt-Ersatzmodells der Strecke:

$F_{S\_Ersatz}(s) := \frac{2}{1 + s \cdot T} \cdot e^{-s \cdot T_t}$ ist die entsprechende Übertragungsfunktion.

Zur Berechnung der Sprungantwort muss zunächst nur der PT1-Teil berücksichtigt werden:

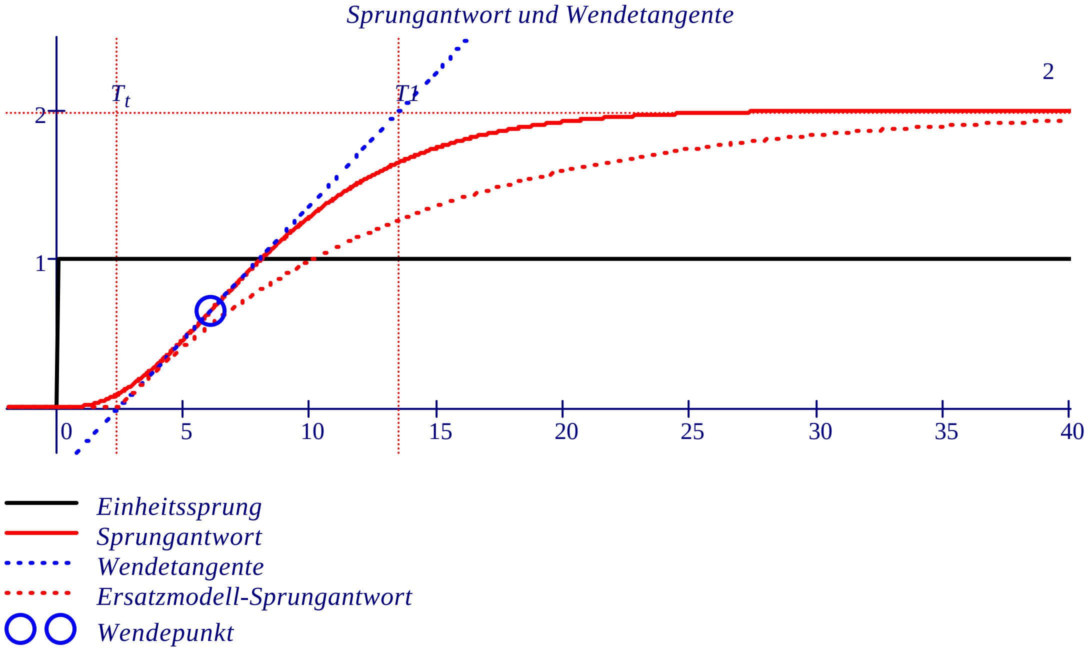
$g_{PT1}(t) := invlaplace\left(\frac{2}{1 + s \cdot T} \cdot \frac{1}{s}, s, t\right) \cdot \Phi(t) \rightarrow 4 \cdot exp(-2) \cdot \left(\frac{-1}{2} exp\left(2 - \frac{2}{3} \cdot exp(-2)\, t\right) + \frac{1}{2} exp(2)\right) \cdot \Phi(t)$

Die für alle Zeiten t korrekte Ersatzsprungantwort ist schließlich

$$g_{Ersatz}(t) := g_{PT1}(t - T_t)$$

Das Ganze noch einmal (erweitert) dargestellt:

$$tt := -2, -1.95 .. 40$$



Nach Ziegler-Nichols sollte sich nun eine brauchbare P-Regler-Verstärkung K_R wie folgt ergeben:

$$K_R := \frac{0.9 \cdot T}{2 \cdot T_t} \qquad K_R = 2.06$$

Damit ist der Regler dimensioniert!

Überprüfung der Regelgüte im Bodediagramm

Hier geht es um die Darstellung des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises. Wegen seines PT3-Verhaltens treten Phasenwinkel bis zu -270° auf, was von Mathcad natürlich nicht richtig gezeichnet werden kann. Die Strecke wird deshalb als Hintereinanderschaltung dreier PT1-Glieder aufgefasst; die entsprechenden Phasenwinkel (bis je maximal -90°) werden addiert.

Zusammenstellung der Funktionen für ein PT1-Glied:

Laplace-Übertragungsfunktion: $$F_{PT1}(s, K, T) := \frac{K}{(1 + T \cdot s)}$$

Zugehörige Amplituden-Frequenzgangfunktion (s wird durch $j\omega$ ersetzt):

$$A_{PT1}(\omega, K, T) := 20 \cdot log(|F_{PT1}(j \cdot \omega, K, T)|) \quad \text{in dB}$$

Phasen-Frequenzgangfunktion: $$\varphi_{PT1}(\omega, K, T) := arg(F_{PT1}(j \cdot \omega, K, T))$$

Als Amplitudenfunktion für den offenen Regelkreis erhält man damit

$$A_0(\omega) := 2 \cdot A_{PT1}(\omega, 1, 3) + A_{PT1}(\omega, 2, 3) + 20 \cdot log(K_R)$$

und als Phasenfunktion

$$\varphi_0(\omega) := 2 \cdot \varphi_{PT1}(\omega, 1, 3) + \varphi_{PT1}(\omega, 2, 3)$$

Berechnung von Amplituden- und Phasenrand

$\omega := 0.1$

Vorgabe $\quad \varphi_0(\omega) = -\pi \quad \omega_{PD} := suchen(\omega)$

$\omega_{PD} = 0.577$ ist die Phasendurchtrittsfrequenz

Der Amplitudenrand: $A_R := -A_0(\omega_{PD})$ $\quad A_R = 5.747$ dB

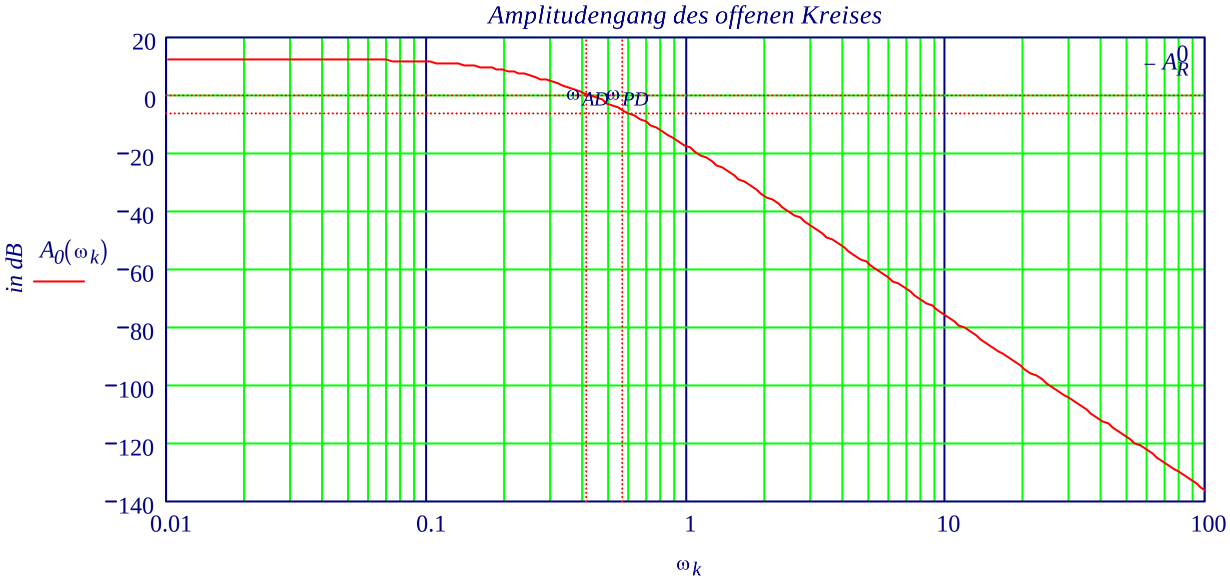
$\omega := 0.1$

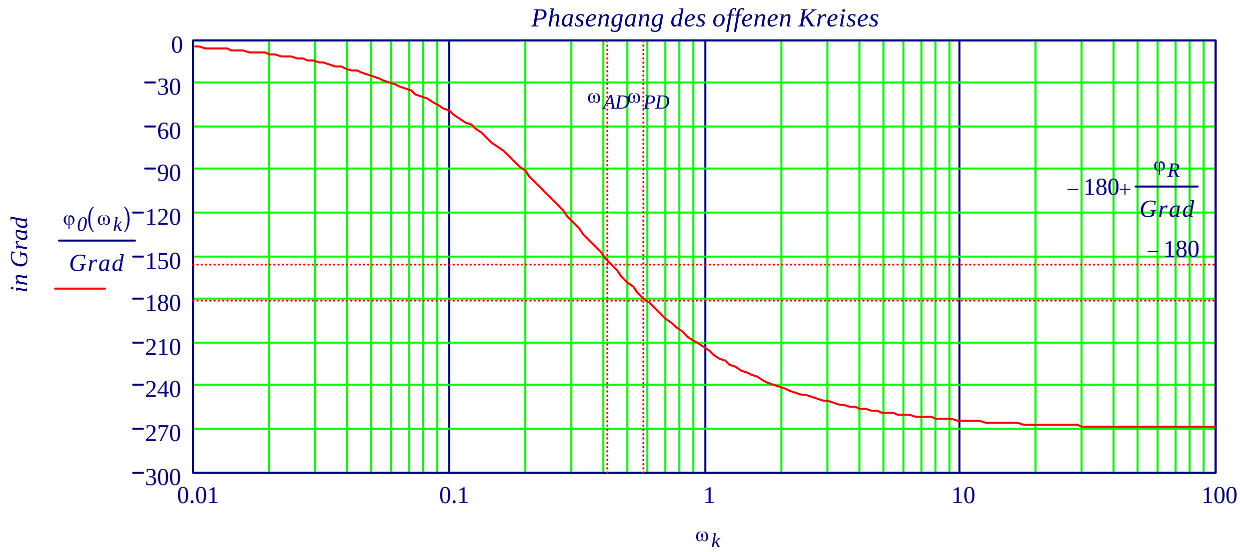
Vorgabe $\quad A_0(\omega) = 0 \quad \omega_{AD} := suchen(\omega)$

$\omega_{AD} = 0.418$ ist die Amplitudendurchtrittsfrequenz

Der Phasenrand: $\varphi_R := \varphi_0(\omega_{AD}) + \pi$ $\quad \varphi_R = 25.689\,Grad$

$\omega_0 := 0.01 \qquad k := 0 .. 200 \qquad \omega_k := \omega_0 \cdot 1.05^k$





Sowohl Phasen- als auch Amplitudenrand sind zwar positiv (der Regelkreis ist also stabil), aber relativ klein; deshalb ist etwa für die Sprungantwort des Regelkreises ausgeprägtes Schwingverhalten mit eher schwacher Dämpfung zu erwarten.
Die Regler-Dimensionierung nach Ziegler-Nichols wird daher häufig nur als Ausgangssituation auf der Suche nach besseren Reglerparametern eingesetzt.

Als letztes werden noch Frequenz f_{Schw} und Abklingzeitkonstante T_{Ab} der zweifellos schwingenden Regelkreissprungantwort berechnet:

Die Führungsübertragungsfunktion des (geschlossenen) Regelkreises mit P-Regler ist

$$F_w(s, K_R) := \frac{F_S(s) \cdot K_R}{1 + F_S(s) \cdot K_R},$$

was sich vereinfachen lässt:

$$F_w(s, KK_R) \text{ vereinfachen } \rightarrow 2 \cdot \frac{KK_R}{\left(1 + 9 \cdot s + 27 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3 + 2 \cdot KK_R\right)}$$

Berechnung der Polstellen:

$$Pole := 1 + 9 \cdot s + 27 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3 + 2 \cdot K_R = 0 \;\left|\begin{array}{l} \text{auflösen}, s \\ \text{gleit}, 4 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} -.8681 \\ -6.597 \cdot 10^{-2} - .4631 \cdot i \\ -6.597 \cdot 10^{-2} + .4631 \cdot i \end{pmatrix}$$

Das vermutete Schwingverhalten wird durch die Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion bestätigt: zwei davon sind komplex mit Imaginärteilen, die deutlich größer sind als die zugehörigen Realteile. Man erkennt auch, dass es zwei Abklingzeitkonstanten gibt; die größere der beiden ist natürlich die praktisch wichtigere:

$$T1_{Ab} := \frac{1}{\left|Pole_0\right|} \qquad T1_{Ab} = 1.152$$

$$T2_{Ab} := \frac{1}{\left|Re\left(Pole_1\right)\right|} \qquad T2_{Ab} = 15.158$$

$$f_{Schw} := \frac{\left|Im\left(Pole_1\right)\right|}{2 \cdot \pi} \qquad f_{Schw} = 0.074$$

$$T_{Schw} := \frac{1}{f_{Schw}} \qquad T_{Schw} = 13.568$$

Wegen der näherungsweisen Übereinstimmung der gößeren Abklingzeitkonstanten $T2_{Ab}$ mit der Schwingungsperiode T_{Schw} und der physikalischen Bedeutung der Zeitkonstanten bedeutet das: Die Schwingung der Sprungantwort ist erst nach etwa 5 Schwingungsperioden weitgehend abgeklungen.

Anhang

Hier noch die genaue Formulierung der entsprechenden Reifeprüfungsaufgabe, wie sie den Schülern vorgelegt wurde:

Für eine Regelstrecke mit der Laplace-Übertragungsfunktion $F_S(s) := \frac{2}{(1 + 3 \cdot s)^3}$ ist ein P-Regler zu dimensionieren. Als Regelkreismodell ist der Standardregelkreis zu verwenden:

- Berechnen Sie die Streckensprungantwort und die Gleichung der Wendetangente, und stellen Sie beides gemeinsam grafisch dar!
- Berechnen Sie nach Ziegler-Nichols die Parameter des PT1-Tt-Ersatzmodells der Strecke, und geben Sie die Ziegler-Nichols-Reglerverstärkung K_R an!
- Verwenden Sie K_R von oben, und stellen Sie damit die Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises in Form eines Bode-Diagrammes dar! Berechnen Sie Amplituden- und Phasenrand des Regelkreises!
- Berechnen Sie Frequenz und Abkling-Zeitkonstante des schwingenden Teils der Führungssprungantwort!

Dimensionierung eines P-Reglers nach Ziegler-Nichols: $K_R = \frac{1}{K_S} \cdot \frac{T}{T_t}$

Als Ergänzung (nicht mehr Gegenstand der Maturaaufgabe) wird noch das zeitliche Sprungverhalten der Regelung mit dem oben berechneten Wert der Reglerverstärkung demonstriert. Dazu wird zuerst die Differenzialgleichung ermittelt, die der Führungsübertragungsfunktion entspricht.

Die Führungsübertragungsfunktion (siehe oben!) stellt das Verhältnis aus Laplace-transformierter Regelgröße und transformierter Führungsgröße dar:

$$F_w(s, K_R) = \frac{F_S(s) \cdot K_R}{1 + F_S(s) \cdot K_R} = \frac{X(s)}{W(s)}$$

$$F_w(s, KK_R) \text{ vereinfachen } \rightarrow 2 \cdot \frac{KK_R}{\left(1 + 9 \cdot s + 27 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3 + 2 \cdot KK_R\right)}$$

$$2 \cdot \frac{K_R}{\left(1 + 9 \cdot s + 27 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3 + 2 \cdot KK_R\right)} = \frac{X(s)}{W(s)}$$

Ausmultipliziert:

$$\left(1 + 9 \cdot s + 27 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3 + 2 \cdot K_R\right) \cdot X(s) = 2 \cdot K_R \cdot W(s)$$

$$27 \cdot X(s) \cdot s^3 + 27 \cdot X(s) \cdot s^2 + 9 \cdot X(s) \cdot s + (1 + 2 \cdot K_R) \cdot X(s) = 2 \cdot K_R \cdot W(s)$$

Die zugehörige Differenzialgleichung lautet dementsprechend:

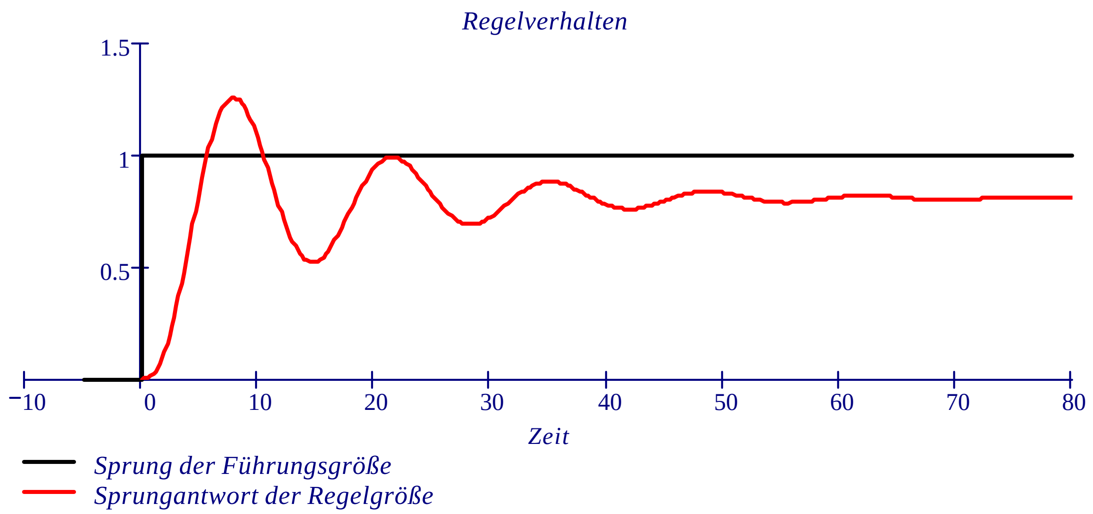
$$27 \cdot \frac{d^3}{dt^3}x(t) + 27 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 9 \cdot \frac{d}{dt}x(t) + (1 + 2 \cdot K_R) \cdot x(t) = 2 \cdot K_R \cdot w(t)$$

Sie wird in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung umgewandelt (siehe Mathcad-Hilfe!) und unter homogenen Anfangsbedingungen für die Regelgröße $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und einen Führungssprung $w(t) := \Phi(t)$ numerisch gelöst:

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dfrac{2 \cdot K_R \cdot w(t) - (1 + 2 \cdot K_R) \cdot x_0 - 9 \cdot x_1 - 27 \cdot x_2}{27} \end{bmatrix}$$

$Zeit := 80$ $\qquad N := 400$ $\qquad xx := rkfest(x, 0, Zeit, N, D)$

$t := -5, -4.9 .. Zeit$ $\qquad n := 0 .. N$



Die Grafik zeigt die Übereinstimmung mit unserer früheren Überlegung, nach der

- die Regelgröße relativ stark schwingen und
- nach etwa 5 Perioden ausgedämpft sein sollte.

Außerdem zeigt sich die bei P-Regelung einer PTn-Strecke erwartete von 0 verschiedene bleibende Regeldifferenz.