Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

RLC-Glied / Sprungantwort (Animation)

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Laplacetransformation, Übertragungsfunktion, Polstellen, Sprungantwort, komplexe Zahlen, quadratische Gleichungen

- Kurzzusammenfassung

  Mit dem vorliegenden Mathcad-Dokument kann eine Animation erstellt werden, die in übersichtlicher, kompakter Form den Zusammenhang zwischen der Lage der Polstellen einer Übertragungsfunktion und dem zeitlichen Verhalten der Systemsprungantwort demonstriert.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Siehe Kurzzusammenfassung!

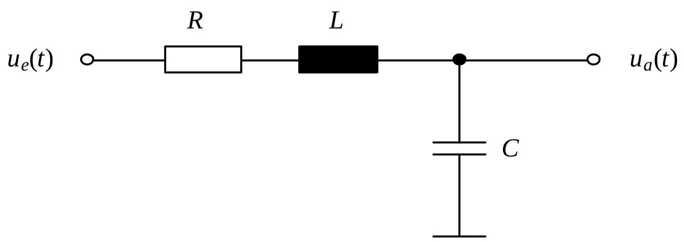
- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik/Impulstechnik, 4./5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

Als passende Schaltung für die Demonstration ist die unten dargestellte RLC-Schaltung gut geeignet, da ihre Sprungantwort abhängig vom gewählten R-Wert schwingen oder auch nicht schwingen kann.



Die entsprechende Laplace-Übertragungsfunktion kann über die Spannungsteilerregel berechnet werden:

$$H(s,R,L,C) := \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}}$$

$$H(s,R,L,C)\ vereinfachen \rightarrow \frac{1}{\left(R \cdot s \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C + 1\right)}$$

Berechnung der Polstellen der Übertragungsfunktion:

$$Pole(R,L,C) := R \cdot s \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C + 1 = 0 \text{ auflösen}, s \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot L \cdot C} \cdot \left[-R \cdot C + \left(R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2 \cdot L \cdot C} \cdot \left[-R \cdot C - \left(R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

Die Sprung-/Impulsantwort schwingt, wenn $R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$, da unter dieser Bedingung die Polstellen komplex werden.

Berechnung der Sprungantwort der Schaltung:

$$g(t,R,L,C) := invlaplace\left(H(s,R,L,C) \cdot \frac{1}{s}, s, t\right) \cdot \Phi(t) \rightarrow \left[1 - C \cdot \frac{exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{\left(4 \cdot L - R^2 \cdot C\right)} \cdot L \cdot \left[\frac{\left(4 \cdot L - R^2 \cdot C\right)}{L^2 \cdot C}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot sin\right.$$

Für Induktivität und Kapazität werden folgende Werte gewählt: $L := 10 \cdot mH$ $C := 4.7 \cdot \mu F$

Wir definieren den "Grenzwiderstand" (siehe oben!): $R_{grenz} := 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$

Bei Widerstandswerten unter $R_{grenz} = 92.253\,\Omega$ sollte die Sprungantwort schwingen.

Grafische Darstellung - Animation

$n := 0 .. 239$ $RR_n := (5 + |n - 120|)\Omega$ $P_n := Pole(RR_n, L, C)$

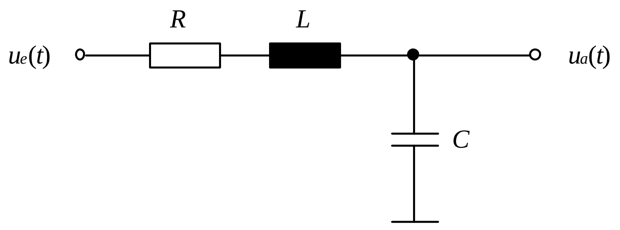
$R := (5 + |FRAME - 120|) \cdot \Omega$

R ändert sich von 125 Ω (nicht schwingende Sprungantwort) bis 5 Ω (stark schwingendes Verhalten) und wieder zurück. Dadurch kann man die Animation in einer Endlosschleife laufen lassen.

$m := 0 .. (120 - |FRAME - 120|)$ $t := -0.0005, -0.000495 .. 0.005$

Die Animation zeigt
- die Schaltung
- die aktuellen Werte für *R*, *L* und *C*
- die Polstellen
- das Polstellendiagramm (genauer: einen Teil der Wurzelortskurve)
- Sprung und Sprungantwort

Zur Erstellung der Animation wird nach Wahl des Menüpunktes *Ansicht -> Animieren ..* der Dokumentbereich eingerahmt, welcher zwischen den beiden fetten, strichlierten, horizontalen Linien liegt.
Die Animationsvariable *FRAME* läuft von 0 .. 239 bei 10 Bildern/Sekunde.



$R = 125\,\Omega$

$L = 0.01\,\mathrm{H}$ $\quad$ $Pole(R,L,C) = \begin{pmatrix} -2033 \\ -10467 \end{pmatrix} \mathrm{Hz}$

$C = 4.7\,\mu F$