Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

LTI-Systeme

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten

  Lineare, zeitinvariante Übertragungssysteme bzw. lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Kurzzusammenfassung

  Es wird demonstriert, wie durch konsequente Anwendung des Superpositionsverfahrens Übertragungsprobleme bei LTI-Systemen gelöst werden können.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang)

  Angewandte Mathematik, 4./5. Jahrgang (rein grafisch angewendet bereits sobald Schaltvorgänge mit Kapazitäten bekannt sind)
  Theoretische und praktische Fächer der Nachrichten- bzw. Kommunikationstechnik

- Mathcad-Version

  Mathcad 14

- Literaturangaben

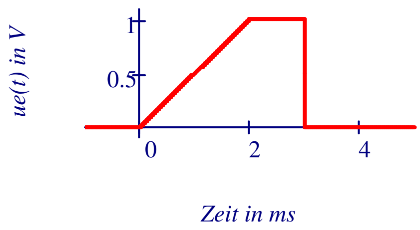
  [1] Bezüglich der Berechnung einer Übertragungsfunktionen über die Kettenmatrix siehe zB: http://www.tech4math.com

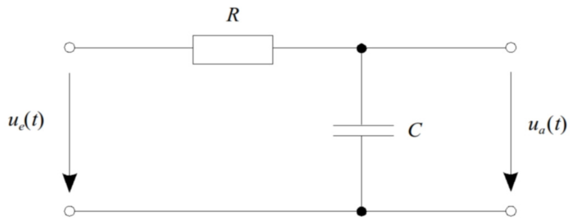
ÜBERSICHT (Doppelklick auf den gewünschten Bereich!):

Die Aufgabe

zurück zur Übersicht

Ein (einzelner) Trapezimpuls als Eingangssignal mit beliebig steiler Flanke am Anfang und einem Sprung am Ende soll durch ein Übertragungssystem (wir wählen dafür der Einfachheit halber einen einstufigen *RC*-Tiefpass) übertragen werden. Das entsprechende Ausgangssignal wird berechnet.





Es wird also mit anderen Worten darum gehen (wie wir im Detail noch sehen werden), ein lineares Anfangswertproblem mit der oben dargestellten Störfunktion $u_e(t)$ zu lösen!

Die Schwierigkeit dabei:
Das Eingangssignal ist zu komplex, um die Differentialgleichung analytisch lösen zu können, wenn man das Eingangssignal als stückweise lineare Funktion beschreibt!

LTI-Systeme

zurück zur Übersicht

Die Abkürzung **LTI** bedeutet **L**inear und zeitinvariant (**T**ime-**I**nvariant). Ein tiefgestelltes *e* bezeichnet im folgenden ein Eingangssignal, ein tiefgestelltes *a* ein Ausgangssignal. Der Pfeil symbolisiert das Übertragungssystem, welches ein Eingangssignal (zB $x_{e1}(t)$) in das zugehörige Ausgangssignal (zB $x_{a1}(t)$) überführt:

- Ein System ist **linear,** wenn bei Übertragung von beliebigen Signalen durch ein System

$$\begin{array}{ccc} x_{e1}(t) & \rightarrow & x_{a1}(t) \\ x_{e2}(t) & \rightarrow & x_{a2}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{eN}(t) & \rightarrow & x_{aN}(t) \end{array}$$

folgt, dass eine Überlagerung dieser Signale am Eingang des Systems die "entsprechende" Überlagerung der zugehörigen Ausgangssignale zur Folge hat:

$$x_e(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(c_n \cdot x_{en}(t)\right) \qquad \rightarrow \qquad x_a(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(c_n \cdot x_{an}(t)\right)$$

- Ein System ist **zeitinvariant,** wenn aus

$$x_e(t) \qquad \rightarrow \qquad x_a(t)$$

$\forall$ reellen τ folgt :

$$x_e(t-\tau) \qquad \rightarrow \qquad x_a(t-\tau)$$

Das bedeutet: eine zeitliche Verschiebung (um τ) des Eingangssignals bewirkt keine Änderung der Form des Ausgangssignals sondern lediglich eine Verschiebung um dieselbe Zeit τ.

Die vorliegende Arbeit soll zeigen, dass es sich bei der LTI-Eigenschaft eines Systems keineswegs nur um eine rein akademische Angelegenheit handelt. Vielmehr lässt sich gerade wegen der Linearität und der Zeitinvarianz eines Übertragungssystems (sofern das System diese Eigenschaften besitzt, was natürlich überprüft werden muss!) manches sehr elegant und einfach berechnen.

Bemerkung:
Systeme, die durch eine *lineare Differentialgleichung* mit *konstanten Koeffizienten* beschrieben werden, sind LTI-Systeme:

- Die *Linearität* der Differentialgleichung entspricht der *Linearität* des Systems (Superpositionsprinzip anwendbar!).
- Die *Zeitinvarianz* des Systems folgt aus der *zeitlichen Konstanz* der Koeffizienten der Differentialgleichung.

Anwendung auf unsere Aufgabe:

Wir versuchen, den Impuls als Überlagerung einfacherer ("elementarer") Signale aufzubauen, für welche die Differentialgleichung einfach zu berechnende Lösungen besitzt.
Dazu genügen in unserem Fall die Grundsignale "Sprung" und "Rampe", welche beide für $t < 0$ Null sind:

$$sprung(t) := \Phi(t)$$

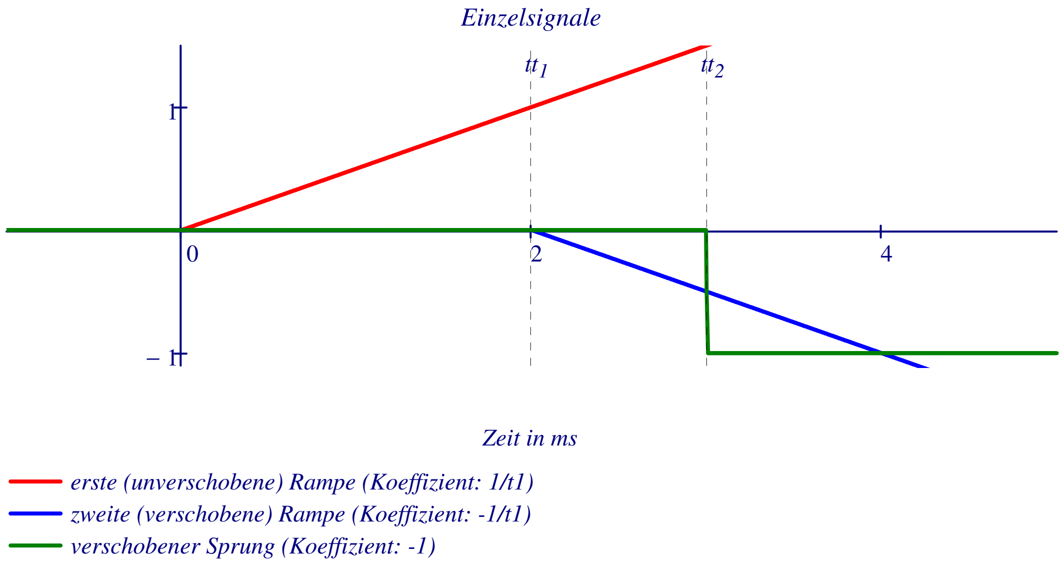
$$rampe(t) := t \cdot \Phi(t)$$

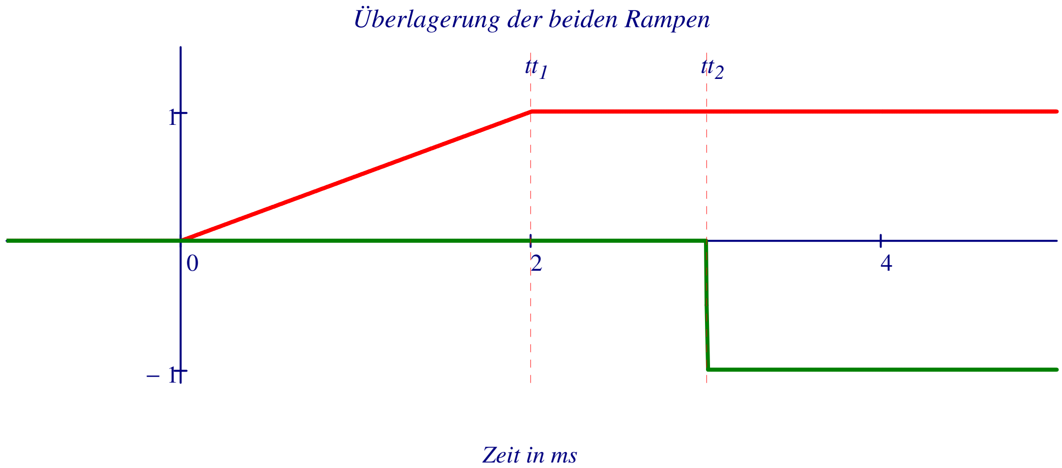
Damit lässt sich nämlich unser trapezförmiges Eingangssignal so anschreiben:

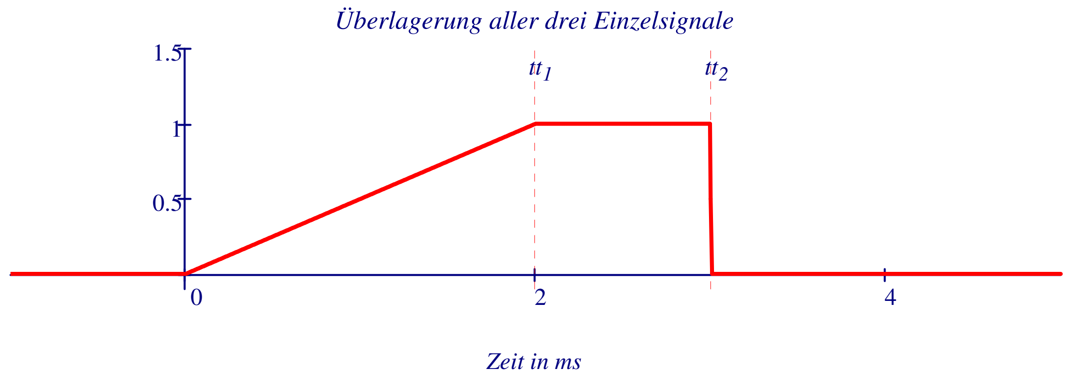
$$u_e(t,t_1,t_2) := \frac{1}{t_1} \cdot rampe(t) - \frac{1}{t_1} \cdot rampe(t - t_1) - sprung(t - t_2)$$

Die Überlagerung der Teilsignale zum gewünschten Eingangssignal grafisch dargestellt:

$tt_1 := 2$ $\qquad tt_2 := 3$ $\qquad$ (in ms)







Wenn es uns nun gelingt, die Systemreaktionen auf die Rampe (die sogenannte *Rampenantwort*) und auf den Sprung (die *Sprungantwort*) zu berechnen, dann können wir (ein LTI-System vorausgesetzt!) das Ausgangssignal als Überlagerung zweier Rampenantworten und einer Sprungantwort analog zum Eingangssignal anschreiben, nämlich in der Form:

$$u_e(t,t_1,t_2) = \frac{1}{t_1}\cdot rampe(t) \qquad -\frac{1}{t_1}\cdot rampe(t-t_1) \qquad -sprung(t-t_2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u_a(t,t_1,t_2) = \frac{1}{t_1}\cdot rampenantwort(t) - \frac{1}{t_1}\cdot rampenantwort(t-t_1) - sprungantwort(t-t_2)$$

Selbstverständlich genügt es, nur *eine* ("die") Rampenantwort zu berechnen, da die verschobene Rampenantwort wegen der TI-Eigenschaft natürlich dieselbe Form hat wie die unverschobene!

Systembeschreibung im Zeitbereich

zurück zur Übersicht

Die Systemgleichung der Schaltung ist die Kirchhoff´sche Maschengleichung

$$u_e(t) - u_a(t) - u_R(t) = 0$$

Den "störenden" Term $u_R(t)$ müssen wir eliminieren.

Die dazu notwendigen Zutaten sind:

- das Ohm´sches Gesetz: $u_R(t) = R\cdot i(t)$
- die allgemeine Definition der Stromstärke als Ladungsverschiebung pro Zeiteinheit: $i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$
- die allgemeine Kondensatorgleichung, welche die Proportionalität zwischen Kondensatorspannung und Kondensatorladung ausdrückt: $q_C(t) = C\cdot u_C(t) = C\cdot u_a(t)$

Diese drei Gleichungen ineinander eingesetzt ergeben

$$u_R(t) = R\cdot i(t) = R\cdot\frac{d}{dt}q(t) = R\cdot C\cdot\frac{d}{dt}u_a(t) = T\cdot\frac{d}{dt}u_a(t)$$

wobei wir das Produkt $R\cdot C$ durch die *Zeitkonstante* $T := R\cdot C$ ersetzt haben.

Die Gleichung des Übertragungssystems im Zeitbereich ist daher recht einfach:

$$u_e(t) - u_a(t) - T\cdot\frac{d}{dt}u_a(t) = 0$$

oder in der "üblichen" Schreibweise mit der Störfunktion (dem Eingangssignal) auf der rechten Seite

$$u_a(t) + T\cdot\frac{d}{dt}u_a(t) = u_e(t)$$

Es handelt sich dabei offensichtlich um eine *lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Wir haben es folglich mit einem *LTI-System* zu tun.

Lösung des Problems ohne Laplace-Transformation

zurück zur Übersicht

Wie schon weiter oben ausgeführt, sind Sprungantwort und Rampenantwort für die Differentialgleichung

$$u_a(t) + T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) = u_e(t)$$

zu berechnen.

Dazu benötigen wir

- die homogene Lösung der Gleichung und
- zwei partikuläre Lösungen zu den Störfunktionen $sprung(t)$ und $rampe(t)$

Homogene Lösung:

$$u_a(t) + T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) = 0$$

Aus der charakteristischen Gleichung $1 + s \cdot T = 0$ erhält man sofort die homogene Lösung der Differentialgleichung:

$$u_{a\_hom}(t, T, K) := K \cdot e^{\frac{-t}{T}}$$

Partikuläre Lösung 1 und Berechnung der Sprungantwort:

Dazu setzen wir für die Störfunktion $s_1(t) = 1$. Die Tatsache, dass es sich in Wirklichkeit um einen Sprung handelt und nicht um eine Konstante, bauen wir über die Anfangsbedingung ein!

$$u_a(t) + T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) = 1$$

Die partikuläre Lösung ist trivial: $u_{a\_part1}(t) := 1$

Zusammenfassen der beiden Lösungsteile

$$u_{a1}(t, T, K) := u_{a\_hom}(t, T, K) + u_{a\_part1}(t) \ vereinfachen \ \rightarrow K \cdot e^{-\frac{t}{T}} + 1$$

und Bestimmung der freien Konstanten K so, dass $u_{a1}(0, T, K) = 0$ wird $(K = -1)$ schließt die Berechnung der Sprungantwort ab:

$$sprungantwort(t, T) := u_{a1}(t, T, -1) \cdot \Phi(t) \rightarrow -\Phi(t) \cdot \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right)$$

Die (unbedingt notwendige) Multiplikation mit dem Mathcad-Einheitssprung $\Phi(t)$ sorgt dafür, dass auch für alle Zeiten $t < 0$ die Sprungantwort korrekterweise verschwindet.

Partikuläre Lösung 2 und Berechnung der Rampenantwort:

In diesem Fall setzen wir für die Störfunktion $s_2(t) = t$.

$$u_a(t) + T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) = t$$

Mit dem Polynomansatz

$$u_{a\_part2}(t, a_0, a_1) := a_0 + a_1 \cdot t$$

$$u_{a\_part2}(t, a_0, a_1) + T \cdot \frac{d}{dt} u_{a\_part2}(t, a_0, a_1) = t \text{ vereinfachen } \rightarrow a_0 + a_1 \cdot t + C \cdot R \cdot a_1 = t$$

und dem anschließenden Koeffizientenvergleich lässt sich berechnen: $a_1 = 1$ und $a_0 = -T$.
Die partikuläre Lösung ist daher

$$u_{a\_part2}(t, T) := t - T$$

Wir fassen die beiden Lösungsteile wieder zusammen:

$$u_{a2}(t, T, K) := u_{a\_hom}(t, T, K) + u_{a\_part2}(t, T) \rightarrow t - T + K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

und berechnen K so, dass $u_{a2}(0, T, K) = 0$ wird:

$u_{a2}(0, T, K) = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow C \cdot R$ (oder kürzer: $K = T$)

Dadurch ergibt sich die Rampenantwort ($K = T$ gesetzt!)

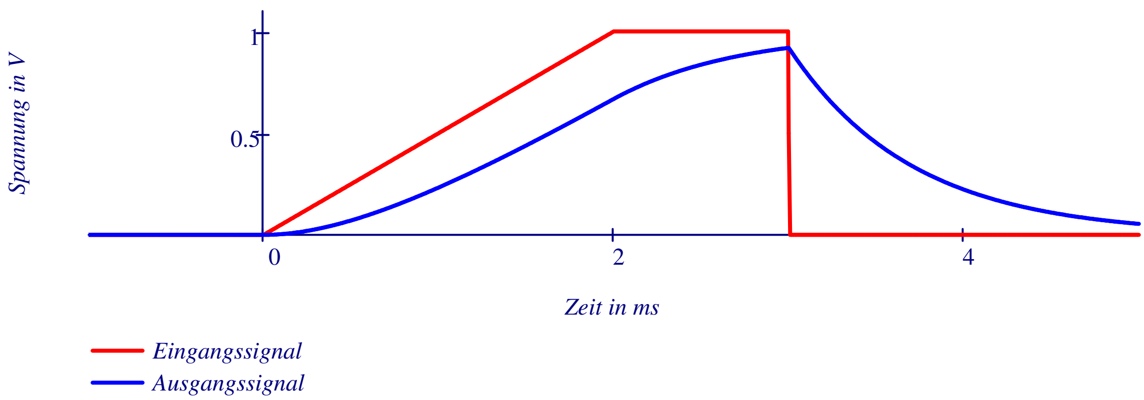
$$rampenantwort(t, T) := u_{a2}(t, T, T) \cdot \Phi(t) \rightarrow \Phi(t) \cdot \left(t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Die Systemreaktion auf den gesamten Trapezimpuls wird wie oben beschrieben zusammengesetzt:

$$u_a(t, t_1, t_2, T) := \frac{1}{t_1} \cdot rampenantwort(t, T) - \frac{1}{t_1} \cdot rampenantwort(t - t_1, T) - sprungantwort(t - t_2, T)$$

Mit $R := 4700\ \Omega$ und $C := 150 \cdot 10^{-9}$ F wird die Zeitkonstante zu $T := R \cdot C = 705 \times 10^{-6}$ s.

Die gemeinsame grafische Darstellung der beiden Signale sieht folgendermaßen aus:



Lösung des Problems mit Laplace-Transformation

zurück zur Übersicht

Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$u_a(t) + T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) = u_e(t)$$

führt auf die algebraische Gleichung

$$U_a(s) + s \cdot T \cdot U_a(s) - T \cdot u_a(0) = U_e(s)$$

Dabei bezeichnen $U_a(s)$ bzw. $U_e(s)$ die Laplace-Transformierten der Zeitsignale $u_a(t)$ bzw. $u_e(t)$ (es ist üblich, für die laplace-transformierten Signale im Frequenzbereich die entsprechenden Großbuchstaben zu verwenden!),
zB (prinzipiell - Details siehe weiter unten!)

$$U_a(s) = u_a(t) \ laplace, t, s \ \rightarrow$$
$$U_e(s) = u_e(t) \ laplace, t, s \ \rightarrow$$

Aus der laplace-transformierten Gleichung erhält man (allerdings bei homogener Anfangsbedingung $u_a(0) = 0$!) durch Quotientenbildung die *Übertragungsfunktion* $H(s)$, welche denselben Informationsgehalt besitzt wie die Differentialgleichung:

$$H(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot T}$$

Bemerkung:
Im allgemeinen wird die Übertragungsfunktion einer Schaltung nicht aus der Differentialgleichung gewonnen (das kann durchaus umständlich bzw. aufwändig sein) sondern zB über die *Kettenmatrix* der Schaltung (siehe Link im Kopf des Dokumentes!).

Mit Laplace-Transformation gestaltet sich die Berechnung von Sprung- und Rampenantwort deutlich kürzer und eleganter als weiter oben beschrieben.

Wir gehen nun vom Frequenzbereich-Analogon zur Differentialgleichung aus, nämlich der bereits hergeleiteten Übertragungsfunktion

$$H(s,T) := \frac{1}{1 + s \cdot T} ,$$

berechnen mit ihrer Hilfe Sprung- und Rampenantwort und konstruieren damit - genau wie vorher - durch Überlagerung das Ausgangssignal.

Die Sprungantwort etwa ergibt sich durch die folgenden drei Rechenschritte:

- Das Eingangssignal (in diesem Fall der Sprung) wird laplace-transformiert: $sprung(t) \ \rightarrow \ SPRUNG(s)$
- Durch Multiplikation der Übertragungsfunktion mit dem laplace-transformierten Sprung entsteht (entsprechend der Definition der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} \ \rightarrow \ X_a(s) = H(s) \cdot X_e(s)$) die transformierte Sprungantwort: $SPRUNGANTWORT(s) = H(s) \cdot SPRUNG(s)$
- Rücktransformation der transformierten Sprungantwort in den Zeitbereich liefert die gesuchte zeitliche Sprungantwort: $SPRUNGANTWORT(s) \ \rightarrow \ sprungantwort(t)$

Mathcad erlaubt uns, die letzten beiden Schritte in einer Befehlszeile zusammenzufassen.

Berechnung der Sprungantwort:

$$SPRUNG(s) := sprung(t)\ laplace, t, s\ \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$sprungantwort(t,T) := H(s,T) \cdot SPRUNG(s)\ invlaplace, s, t\ \rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{T} \cdot t}$$

Wir dürfen jedoch wieder nicht übersehen, den zeitlichen Einheitssprung, der für das korrekte Verschwinden der Sprungantwort vor dem Zeitpunkt 0 verantwortlich ist, hinzuzumultiplizieren!

Daher Neudefinition der Sprungantwort:

$$sprungantwort(t,T) := sprungantwort(t,T) \cdot \Phi(t)$$

Berechnung der Rampenantwort:

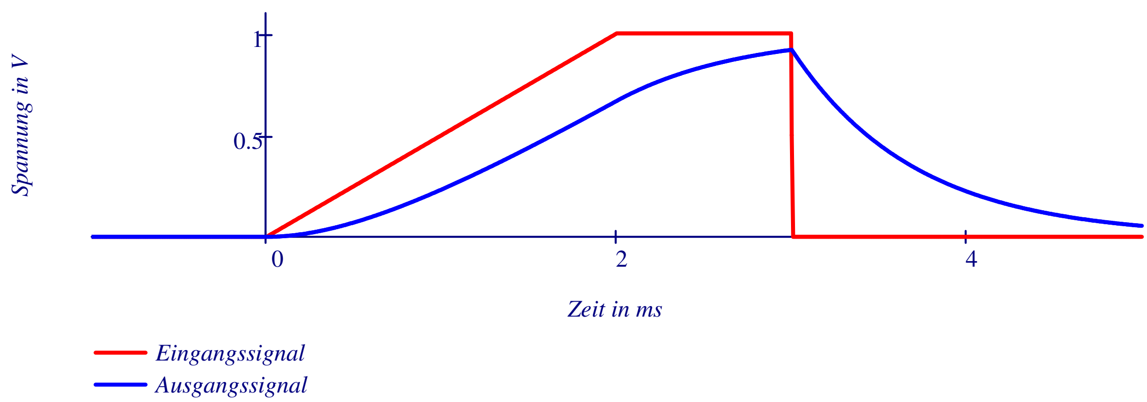
$$RAMPE(s) := rampe(t)\ laplace, t, s\ \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$rampenantwort(t,T) := H(s,T) \cdot RAMPE(s)\ invlaplace, s, t\ \rightarrow t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$rampenantwort(t,T) := rampenantwort(t,T) \cdot \Phi(t)$$

Überlagerung der Teilreaktionen:

$$u_a(t, t_1, t_2, T) := \frac{1}{t_1} \cdot rampenantwort(t,T) - \frac{1}{t_1} \cdot rampenantwort(t - t_1, T) - sprungantwort(t - t_2, T)$$



Ergänzung: Trapezimpuls

zurück zur Übersicht

Ein Trapezimpuls ist einerseits bemerkenswert vielseitig, was die möglichen Sonderformen betrifft, die man damit konstruieren kann; andererseits ist er angenehm einfach zu "handhaben", wenn man bedenkt, dass er sich ausschließlich aus Rampen zusammensetzen lässt.
Das soll kurz demonstriert werden:

Definition eines allgemeinen Trapezimpulses als Überlagerung von Rampen:

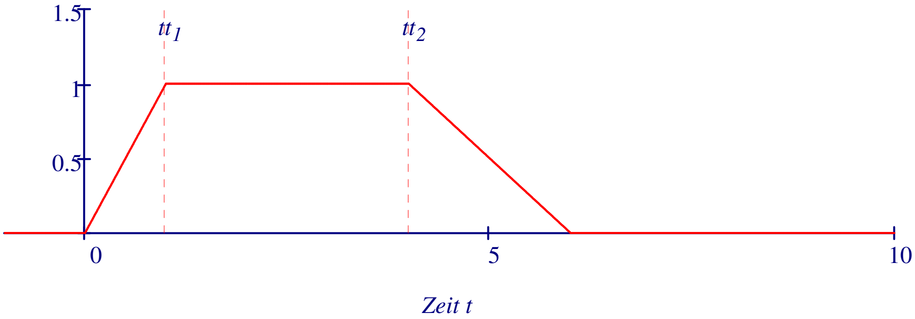
- Der Impuls-Anstieg beginnt zum Zeitpunkt 0
- Die Zeitpunkte $t_1 < t_2 < t_3$ definieren der Reihe nach die weiteren Knickpunkte des "Trapez-Polygons". Sprünge sind mit dieser Definition zwar nicht exakt realisierbar, können jedoch beliebig steil gestaltet werden. Abgesehen davon gibt es in der Ralität ohnehin keine "unendlich schnellen" Änderungen!
- Die Höhe des Impulses ist 1

$$trapez(t, t_1, t_2, t_3) := \frac{1}{t_1} \cdot rampe(t) - \frac{1}{t_1} \cdot rampe(t - t_1) - \frac{1}{t_3 - t_2} \cdot rampe(t - t_2) + \frac{1}{t_3 - t_2} \cdot rampe(t - t_3)$$

Beispiele:

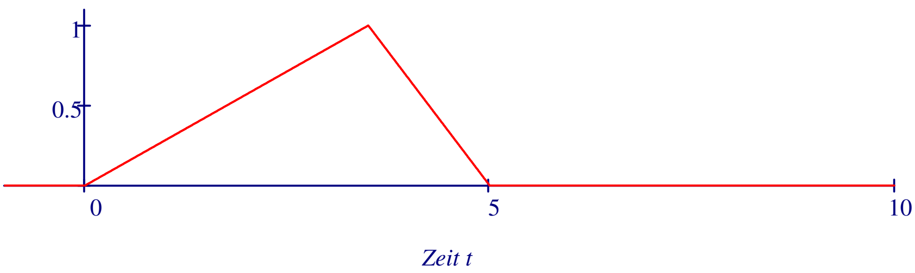
$tt_1 := 1$ $tt_2 := 4$ $tt_3 := 6$

Trapezimpuls mit verschieden steilen Flanken



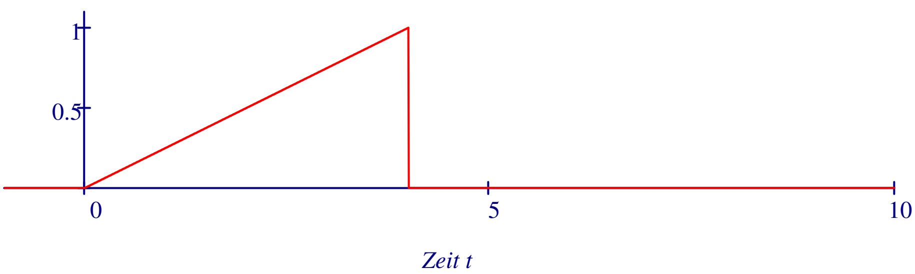
$tt_1 := 3.5$ $tt_2 := tt_1$ $tt_3 := 5$

Sonderfall: Dreieckimpuls



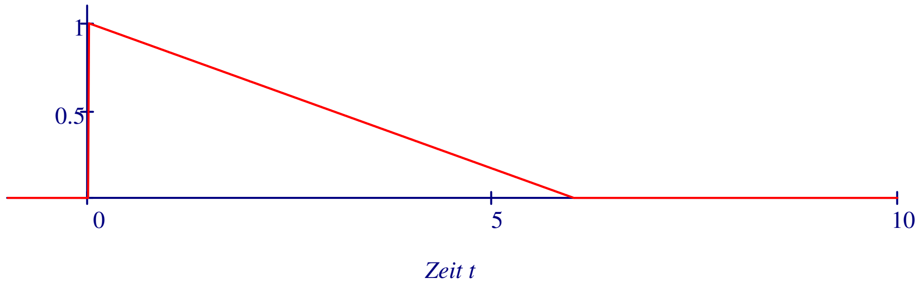
$tt_1 := 3.999$ $tt_2 := tt_1$ $tt_3 := 4$

Sonderfall: Fast exakter Sägezahnimpuls



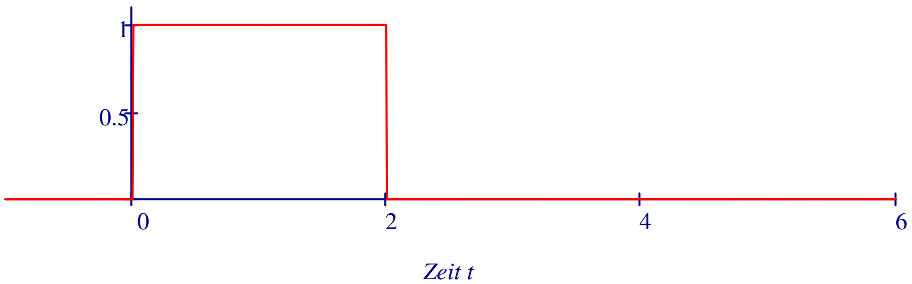
$tt_1 := 0.001$ $tt_2 := tt_1$ $tt_3 := 6$

Sonderfall: Fast exakter Sägezahnimpuls



$tt_1 := 0.001$ $tt_2 := 1.999$ $tt_3 := 2$

Sonderfall: Fast exakter Rechteckimpuls



Selbstverständlich können die dargestellten Sonderformen zum Teil wesentlich einfacher als mit vier Rampen gebaut werden! Beispielsweise kann man den exakten Rechteckimpuls als Überlagerung von zwei Sprüngen auffassen.
Das LTI-System reagiert darauf mit der entsprechenden Überlagerung zweier Sprungantworten!

$u_e(t, T_{Puls}) := sprung(t) - sprung(t - T_{Puls})$

$u_a(t, T_{Puls}, T) := sprungantwort(t, T) - sprungantwort(t - T_{Puls}, T)$

$T_{Puls} := 2$ (in ms)