Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

Vektorrechnung: Schnitt zweier Kugeln

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Geometrische Anwendung der Vektorrechnung mit folgenden Teilbereichen: Abstandsberechnung, Parameterform der Geradengleichung, Normalvektorform der Ebenengleichung, Drehung im R^3, Schnittpunkte einer Kugel mit einer Geraden, Definition und Darstellung von Parameterflächen und Parameterkurven

- Kurzzusammenfassung

  **Für zwei vorgegebene Kugeln wird anfangs untersucht, ob es einen Schnittkreis gibt und eine entsprechende Meldung ausgegeben. Gegebenenfalls wird der Schnittkreis berechnet.
  Die Kugeln werden zusammen mit der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte, dem Schnittkreis und einem Ausschnitt der Schnittebene definiert und grafisch dargestellt.**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik - Vektorrechnung

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

- Grundsätzliche Hilfestellungen zum Diagramm auf Seite 10:

  **Eingebaute Mathcad - Hilfe: Man wähle Hilfe / Mathcad-Hilfe / Registerfeld Inhalt und dort den Menüpunkt Diagramme / Dreidimensionale Graphen mit den Unterpunkten
  * Flächendiagramme / "Parametrische Flächendiagramme" und
  * Flächendiagramme / "Grafisches Darstellen mehrerer 3D-Diagramme"
  bzw.
  das Quicksheet: Diagramme und Visualisierung / "Darstellen einer Kugel"**

INHALT (gewünschten Bereich anklicken!):

Eingabebereich

zum Anfang

Eingabebereich Anfang

Definitionen der beiden Kugeln durch Angabe ihrer Mittelpunkte und Radien:

Kugel 1: $M_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $R_1 := 9$

Kugel 2: $M_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $R_2 := 6$

Eingabebereich Ende

Berechnung des Richtungsvektors von M_1 nach M_2 und des Abstandes der beiden Kugelmittelpunkte:

$$M_{12} := M_2 - M_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |M_{12}| \rightarrow 2 \cdot 14^{\frac{1}{2}} = 7.483$$

Um festzustellen, ob der Schnittkreis existiert, muss mit der Summe der beiden Radien verglichen werden:

$$R_1 + R_2 \rightarrow 15 = 15$$

Meldungen

Das_Problem_ist = "vollständig lösbar. Die Angaben sind sinnvoll. Es gibt einen Schnittkreis!"

Berechnung des Schnittkreises

zum Anfang

Die Kugelgleichungen $(x - M)^2 - R^2 = 0$ lauten für unseren Fall wie folgt:

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_1\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_1\right] - R_1^2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 - 81 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_2\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_2\right] - R_2^2 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 - 36 = 0$$

Durch ihre Subtraktion erhält man eine lineare Gleichung in x, y und z. Es handelt sich um die Normalvektorform der Gleichung jener Ebene e, in der der Schnittkreis liegt.

$$e(x,y,z) := \left[\left[\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_1\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_1\right]\right] - R_1^2\right] - \left[\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_2\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - M_2\right] - R_2^2\right]$$

Die Ebenengleichung lautet daher

$e(x,y,z) = 0$ *vereinfachen* $\rightarrow 4 \cdot x - 53 + 12 \cdot y + 8 \cdot z = 0$

Der Normalvektor n_e dieser Ebene stimmt natürlich mit dem Vektor M_{12} überein: $n_e := M_{12} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$,

der - bei ganzzahligen Koordinaten - mittels des folgenden kleinen Programmes möglicherweise noch gekürzt werden kann:

```
isinteger_vec(x) := | isint ← 1
                    | for i ∈ 0 .. länge(x) − 1
                    |   isint ← isint · 0  if  mod(x_i, 1) ≠ 0
                    | isint

ggT(x) := | if isinteger_vec(x)
          |   | i ← 0
          |   | for j ∈ 0 .. 2
          |   |   if x_j ≠ 0
          |   |     | xx_i ← |x_j|
          |   |     | i ← i + 1
          |   | gcd(xx)
          | 1  otherwise
```

Neudefinition des Normalvektors der Schnittebene (in evtl. gekürzter Form):

$n_e := \dfrac{n_e}{ggT(n_e)}$ $n_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Normierung: $n_{e0} := \dfrac{n_e}{|n_e|}$

n_e ist gleichzeitig der Richtungsvektor der Geraden g_{12}, auf der die beiden Kugelmittelpunkte liegen.
Schneidet man die Ebene e mit dieser Geraden g_{12}, erhält man den Mittelpunkt M_S des Schnittkreises k_S.

Geradengleichung von g_{12} : $g_{12}(t) := M_1 + n_e \cdot t \rightarrow \begin{pmatrix} -1 + t \\ -3 + 3 \cdot t \\ -1 + 2 \cdot t \end{pmatrix}$

Zur Bestimmung des Schnittkreismittelpunktes M_S wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

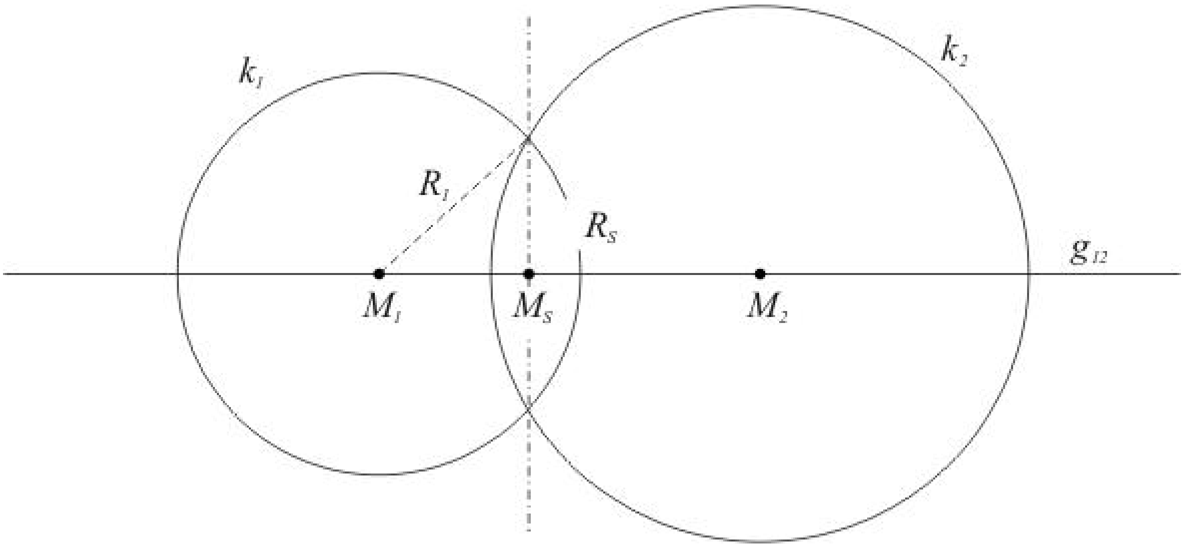
$t_0 := e\left(g_{12}(t)_0, g_{12}(t)_1, g_{12}(t)_2\right) = 0$ *auflösen*, $t \rightarrow \dfrac{101}{56}$ $t_0 \rightarrow \dfrac{101}{56} = 1.804$

Der Schnittpunkt M_S hat daher die Koordinaten: $M_S := g_{12}(t_0) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{135}{56} \\ \frac{73}{28} \end{pmatrix}$ $M_S = \begin{pmatrix} 0.804 \\ 2.411 \\ 2.607 \end{pmatrix}$

Der Radius R_S des Schnittkreises kann über den pythagoräischen Lehrsatz berechnet werden:

$$R_S := \sqrt{R_1^{\,2} - \left(\left|M_S - M_1\right|\right)^2} \rightarrow \frac{1}{224} \cdot 7943^{\frac{1}{2}} \cdot 224^{\frac{1}{2}} \qquad R_S = 5.955$$

oder $$R_S := \sqrt{R_2^{\,2} - \left(\left|M_S - M_2\right|\right)^2} \rightarrow \frac{1}{224} \cdot 7943^{\frac{1}{2}} \cdot 224^{\frac{1}{2}} \qquad R_S = 5.955$$



Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

zum Anfang

Der gesuchte Schnittkreis $k_S\left(M_S, R_S\right)$ hat den Mittelpunkt $M_S \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{135}{56} \\ \frac{73}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.804 \\ 2.411 \\ 2.607 \end{pmatrix}$ und den Radius

$R_S \rightarrow \frac{1}{224} \cdot 7943^{\frac{1}{2}} \cdot 224^{\frac{1}{2}} = 5.955$.

Er liegt in der Ebene mit der Gleichung $n_e \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - n_e \cdot M_S = 0 \ \mathit{vereinfachen} \ \rightarrow x + 3 \cdot y + 2 \cdot z - \frac{53}{4} = 0$.

Wir berechnen noch die Durchstoßpunkte der Geraden g_{12} mit den beiden Kugeln.

Dazu muss die Geradengleichung in die beiden Kugelgleichungen $(x - M)^2 - R^2 = 0$ eingesetzt werden. Die sich daraus ergebenden Parameter t_{K1} und t_{K2} führen - in die Geradengleichung eingesetzt - zu den beiden Punktepaaren:

für die Kugel 1:

$$t_{K1} := \left[\left(g_{12}(t) - M_1\right) \cdot \left(g_{12}(t) - M_1\right)\right] - R_1^{\,2} = 0 \; \textit{auflösen}, t \;\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-9}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

und die Kugel 2:

$$t_{K2} := \left[\left(g_{12}(t) - M_2\right) \cdot \left(g_{12}(t) - M_2\right)\right] - R_2^{\,2} = 0 \; \textit{auflösen}, t \;\rightarrow \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ 2 - \frac{3}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Durchstoßpunkte D_{11}, D_{12} (mit Kugel 1) und D_{21}, D_{22} (mit Kugel 2) haben die Koordinaten:

$$D_{11} := g_{12}\left(t_{K1_0}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 + \frac{9}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ -3 + \frac{27}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ -1 + \frac{9}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad D_{12} := g_{12}\left(t_{K1_1}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 - \frac{9}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ -3 - \frac{27}{14} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ -1 - \frac{9}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$D_{21} := g_{12}\left(t_{K2_0}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ 3 + \frac{9}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ 3 + \frac{6}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad D_{22} := g_{12}\left(t_{K2_1}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ 3 - \frac{9}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \\ 3 - \frac{6}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 1.405 \\ 4.216 \\ 3.811 \end{pmatrix} \qquad D_{12} = \begin{pmatrix} -3.405 \\ -10.216 \\ -5.811 \end{pmatrix} \qquad D_{21} = \begin{pmatrix} 2.604 \\ 7.811 \\ 6.207 \end{pmatrix} \qquad D_{22} = \begin{pmatrix} -0.604 \\ -1.811 \\ -0.207 \end{pmatrix}$$

Berechnungen für die grafische Darstellung

zum Anfang

Die beiden gegebenen Kugeln

Herleitung der Kugelgleichung:

Dazu lassen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$ zuerst um die *y*-Achse und das Ergebnis anschließend um die *z*-Achse rotieren. Zum Schluss wird der der Kugelmittelpunkt vom Koordinatenursprung nach $M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ verschoben:

$$Kugel(j, q, R, M) := \begin{pmatrix} cos(j) & sin(j) & 0 \\ -sin(j) & cos(j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(q) & 0 & sin(q) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(q) & 0 & cos(q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cos(j) \cdot sin(q) \cdot R + M_0 \\ -sin(j) \cdot sin(q) \cdot R + M_1 \\ cos(q) \cdot R + M_2 \end{pmatrix}$$

Die Zahl der Gitterlinien der Kugeln wird abhängig vom jeweiligen Radius definiert um bei kleinen und großen Radien eine möglichst aussagekräftige und ansprechende Darstellung zu erhalten:

$NK1 := floor(R_1 \cdot 6)$

$nk1 := 0..NK1 \qquad jK1_{nk1} := \frac{2 \cdot p}{NK1} \cdot nk1 \qquad mk1 := 0..NK1 \qquad qK1_{mk1} := \frac{p}{NK1} mk1$

$NK2 := floor(R_2 \cdot 6)$

$nk2 := 0..NK2 \qquad jK2_{nk2} := \frac{2 \cdot p}{NK2} \cdot nk2 \qquad mk2 := 0..NK2 \qquad qK2_{mk2} := \frac{p}{NK2} mk2$

$XK1_{nk1, mk1} := Kugel\left(jK1_{nk1}, qK1_{mk1}, R_1, M_1\right)_0 \qquad XK2_{nk2, mk2} := Kugel\left(jK2_{nk2}, qK2_{mk2}, R_2, M_2\right)_0$

$YK1_{nk1, mk1} := Kugel\left(jK1_{nk1}, qK1_{mk1}, R_1, M_1\right)_1 \qquad YK2_{nk2, mk2} := Kugel\left(jK2_{nk2}, qK2_{mk2}, R_2, M_2\right)_1$

$ZK1_{nk1, mk1} := Kugel\left(jK1_{nk1}, qK1_{mk1}, R_1, M_1\right)_2 \qquad ZK2_{nk2, mk2} := Kugel\left(jK2_{nk2}, qK2_{mk2}, R_2, M_2\right)_2$

Die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte (blaue Linie mit blauen Punkten)

$Gerade(t) := g_{12}(t)$

Die Gerade wird auf beiden Seiten nur um einen Radius über die jeweilige Kugel hinaus gezeichnet:

$$t_1 := Gerade(t)_0 = \left(M_1 - 2 \cdot R_1 \cdot n_{e0}\right)_0 \ auflösen, t \rightarrow \frac{-9}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2 := Gerade(t)_0 = \left(M_2 + 2 \cdot R_2 \cdot n_{e0}\right)_0 \ auflösen, t \rightarrow 2 + \frac{6}{7} \cdot 14^{\frac{1}{2}}$$

$NG := 50$ $\quad ng := 0..NG$ $\quad Dtg := \dfrac{|t_2 - t_1|}{NG}$ $\quad tg_{ng} := min(t_1, t_2) + Dtg \cdot ng$

$G := \overrightarrow{Gerade(tg)}$

$XG_{ng} := \left[(G)_{ng}\right]_0$ $\quad YG_{ng} := \left[(G)_{ng}\right]_1$ $\quad ZG_{ng} := \left[(G)_{ng}\right]_2$

Die Durchstoßpunkte der Geraden durch die beiden Kugeln (kleine blaue Kugeln)

Um diese Punkte besser sichtbar zu machen, werden sie als kleine Kugeln gezeichnet:

$RD := .2$ $\quad ND := 30$

$nd := 0..ND$ $\quad jD_{nd} := \dfrac{2 \cdot p}{ND} \cdot nd$ $\quad md := 0..ND$ $\quad qD_{md} := \dfrac{p}{ND} md$

$XD11_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{11})_0$ $\quad XD12_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{12})_0$

$YD11_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{11})_1$ $\quad YD12_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{12})_1$

$ZD11_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{11})_2$ $\quad ZD12_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{12})_2$

$XD21_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{21})_0$ $\quad XD22_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{22})_0$

$YD21_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{21})_1$ $\quad YD22_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{22})_1$

$ZD21_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{21})_2$ $\quad ZD22_{nd,md} := Kugel(jD_{nd}, qD_{md}, RD, D_{22})_2$

Der Schnittkreis (dicke rote Linie)

Dazu definieren wir zuerst einen Vektor, der in der Schnittkreisebene liegt und die Länge R_S hat

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ n_{e_2} \\ -n_{e_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n_{e_1} \\ n_{e_0} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x := x \cdot \frac{R_S}{|x|}$$

Diesen lassen wir um die Gerade g_{12} als Drehachse rotieren. Wenn der Anfang des Vektors in M_S liegt, beschreibt der Endpunkt bei der Rotation den gesuchten Schnittkreis.

Im Detail gehen wir dabei wie folgt vor:
Wir lösen zunächst ein einfacheres Problem; wir verlängern den Einheitsvektor e_x (in Richtung x-Achse) auf die Länge R_S und lassen ihn mittels einer entsprechender Drehmatrix - nämlich D_z (siehe unten!) - um die z-Achse rotieren. Dabei ergibt sich ein Kreis, der gleich groß ist wie der Schnittkreis unserer beiden Kugeln. Anschließend müssen wir nur noch die bisherige Drehachse (= z-Achse) so drehen, dass sie zur tatsächlichen Drehachse (= Gerade g_{12}) wird. Dies geschieht wieder mit Hilfe von Drehmatrizen:

Einheitsvektoren in Richtung x- bzw. z-Achse: $e_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drehmatrizen für Drehungen um die y- bzw. z-Achse:

$$D_y(a) := \begin{pmatrix} cos(a) & 0 & sin(a) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(a) & 0 & cos(a) \end{pmatrix} \qquad D_z(a) := \begin{pmatrix} cos(a) & -sin(a) & 0 \\ sin(a) & cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $D_{xy} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ projiziert einen Vektor auf die xy-Ebene.

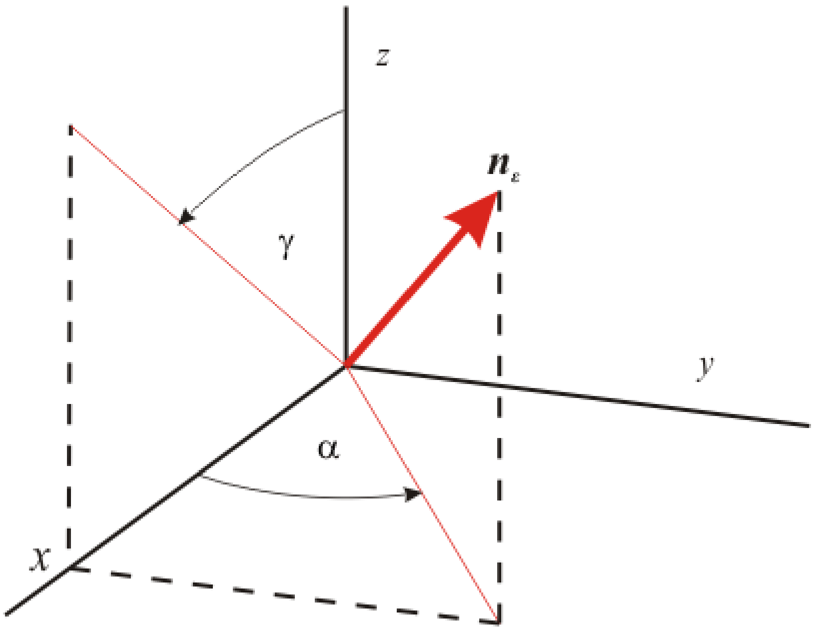
Berechnung der beiden Winkel, über welche die x-Achse in die Gerade g_{12} gedreht wird:
Dazu wird der Richtungsvektor n_e der Geraden auf die xy-Ebene projiziert; erst der Winkel zwischen dieser Projektion und der x-Achse ist der korrekte Winkel a (wobei die *sign*-Funktion für das richtige Vorzeichen sorgt).

$$a := sign\left[\left[e_x \times \left(D_{xy} \cdot n_{e0}\right)\right] \cdot e_z\right] \cdot acos\left(\frac{D_{xy} \cdot n_{e0}}{\left|D_{xy} \cdot n_{e0}\right|} \cdot e_x\right) \qquad a = 71.565\,Grad$$

Der Winkel g zwischen der Geraden und der z-Achse ist einfacher zu berechnen:

$g := acos\left(n_{e0} \cdot e_z\right)$

$g = 57.688\,Grad$



$$Schnittkreis(t) := \left(D_z(a) \cdot D_y(g) \cdot D_z(t) \cdot e_x \cdot R_S + M_S\right)$$

$NS := 150$ $\qquad ns := 0\,..\,NS$ $\qquad Dts := \dfrac{2 \cdot p}{NS}$ $\qquad ts_{ns} := ns \cdot Dts$

$SK := \overrightarrow{Schnittkreis(ts)}$

$XSK_{ns} := \left[(SK)_{ns}\right]_0$ $\qquad YSK_{ns} := \left[(SK)_{ns}\right]_1$ $\qquad ZSK_{ns} := \left[(SK)_{ns}\right]_2$

Die Schnittkreisebene (rotes Gitternetz)

Ihre Darstellung besteht aus zwei Teilen:

- Während einer einmaligen Rotation (analog zur Darstellung des Schnittkreises) wird zwischen zwei Radien (innerer Radius = R_{min}, äußerer Radius = R_{max}) hin- und hergesprungen, was radiale Linien in der Schnittkreisebene erzeugt, die durch zum Schnittkreis konzentrische kurze Kreisteile verbunden sind.
- Anschließend werden noch weitere zum Schnittkreis konzentrische Kreise gezeichnet; der Radius jedes Kreises wird schrittweise nach jedem Umlauf vergrößert.

$R_{min} := R_S$ $\qquad$ $R_{max} := max(R_1, R_2)$

$NE1 := 50$ $\qquad$ $NE1 := 2 \cdot NE1$ $\qquad$ (muss gerade sein!)

Die folgende Funktion sorgt für das periodische Hin- und Herspringen zwischen den beiden Radien

$$Ebene1(ta, tb) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow floor\left(\dfrac{ta \cdot NE1}{2 \cdot p}\right) \\ R \leftarrow (sign(mod(k,2) - 0.5) + 1) \cdot (R_{max} - R_{min}) + R_{min} \\ D_z(a) \cdot D_y(g) \cdot D_z(tb) \cdot e_x \cdot R + M_S \end{array} \right.$$

$ne1 := 0 .. NE1$ $\qquad$ $Dte1 := \dfrac{2 \cdot p}{NE1}$ $\qquad$ $te1_{2 \cdot ne1} := ne1 \cdot Dte1$

$ne1 := 1 .. NE1$ $\qquad$ $te1_{2 \cdot ne1 - 1} := ne1 \cdot Dte1$

$te11 := submatrix(te1, 1, 2 \cdot NE1, 0, 0)$ $\qquad$ $te11_{2 \cdot NE1} := te11_{2 \cdot NE1 - 1} + Dte1$

$ne1 := 0 .. 2 \cdot NE1$

$$E1 := \overrightarrow{Ebene1(te1, te11)}$$

$XE1_{ne1} := \left(E1_{ne1}\right)_0$ $\qquad$ $YE1_{ne1} := \left(E1_{ne1}\right)_1$ $\qquad$ $ZE1_{ne1} := \left(E1_{ne1}\right)_2$

Hier wird nun das Koordinatennetz der Schnittebene durch konzentrische Kreise vervollständigt:

$NE2 := 10000$ $\qquad$ $ne2 := 0 .. NE2 - 1$ $\qquad$ $Dte2 := \dfrac{20 \cdot p}{NE2}$ $\qquad$ $te2_{ne2} := ne2 \cdot Dte2$

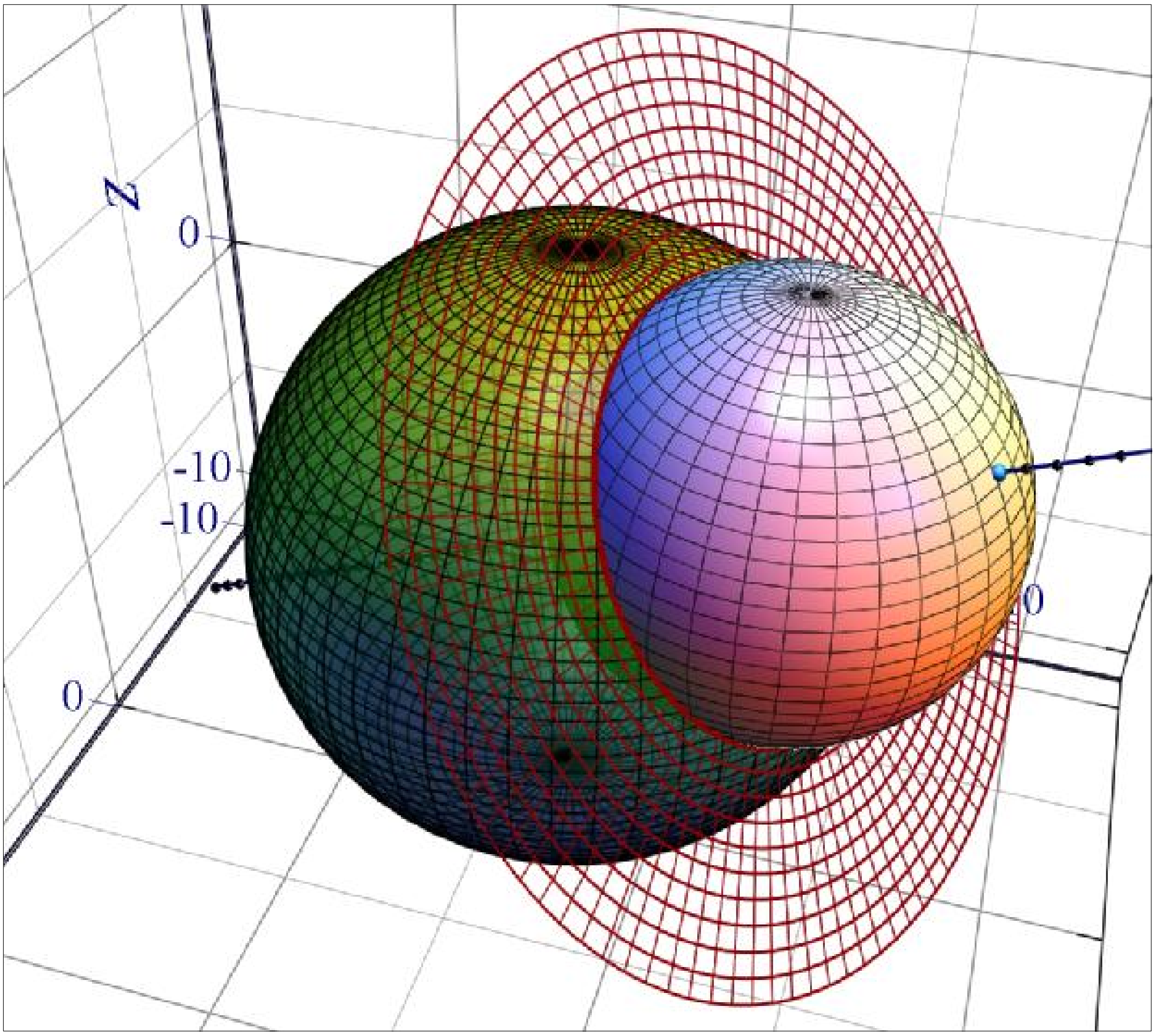
$$Ebene2(t) := \left| \begin{array}{l} R \leftarrow \left(2 - floor\left(\dfrac{t}{2 \cdot p}\right) \cdot 0.2\right) \cdot (R_{max} - R_{min}) + R_{min} \\ D_z(a) \cdot D_y(g) \cdot D_z(t) \cdot e_x \cdot R + M_S \end{array} \right.$$

$$E2 := \overrightarrow{Ebene2(te2)}$$

$XE2_{ne2} := \left(E2_{ne2}\right)_0$ $\qquad$ $YE2_{ne2} := \left(E2_{ne2}\right)_1$ $\qquad$ $ZE2_{ne2} := \left(E2_{ne2}\right)_2$

Grafische Darstellung

zum Anfang -



Hinweis: Die Argumente dieser Grafik werden sichtbar, wenn man mit der rechten Maustaste auf die Grafik fährt und den Menüpunkt "Argumente einblenden" auswählt!