Robert Salvador salvador@htlinn.ac.at

Gefensterte Fouriertransformation

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Fouriertransformation mit zusätzlicher Information über den Zeitverlauf der Frequenzanteile
  Bei genauerer Überlegung steckt auch die systemtheoretische Faltung im Problem

- Kurzzusammenfassung

  Die gefensterte Fouriertransformation ermöglicht es, außer der üblichen reinen Frequenzinformationen über ein Zeitsignal auch die zeitliche Aufeinanderfolge der einzelnen Frequenzanteile zu erfassen. Dies wird anhand verschiedener grafischer Darstellungen anschaulich gezeigt.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Erweiterungen der herkömmlichen Fouriertransformation

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik/Impulstechnik, 4./5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

  Tilman Butz, Fouriertransformation für Fußgänger, B. G. Teubner
  Christian Blatter, Wavelets - Eine Einführung, Vieweg

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Die Thematik wurde vom Autor bisher im Fach Impulstechnik im 4. Jg. der Abtlg. Elektronik (Ausbildungszweig Telekommunikation) unterrichtet

Einleitung

Die kontinuierliche Fouriertransformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

eines nichtperiodischen Zeitsignals $x(t)$ erlaubt es bekanntlich, den Frequenzinhalt des betreffenden Signals zu berechnen.

Allerdings erhält man damit keinerlei Zeitinformationen, d. h. es bleibt verborgen, welche Frequenzen zu welchen Zeiten besonders bedeutsam sind.
Derartige zusätzliche Zeitinformationen kann man sich verschaffen, indem man nicht das gesamte Signal auf einmal transformiert, sondern nur jeweils Ausschnitte davon. Dazu legt man ein "Zeitfenster" über $x(t)$, welches Schritt für Schritt antlang der Zeitachse verschoben wird. Man muss allerdings beachten, dass damit die Frequenzinformationen verfälscht werden, weil in diesem Fall nicht das Originalsignal transformiert wird. Anders ausgedrückt: das Spektrum des Fenstersignals geht (über eine Faltungsoperation) in das Ergebnis ein, wie die Systemtheorie lehrt!

Im folgenden wird für ein (mit Absicht sehr konstruiertes) Zeitsignal die gefensterte Fouriertransformation berechnet, in verschiedener Weise grafisch dargestellt und interpretiert.

Das Zeitsignal

Es setzt sich im wesentlichen aus drei Teilen zusammen:

- einer Schwingung mit $f_1 := 1\text{Hz}$, die zum Zeitpunkt $t = -5$ abrupt beginnt und bei $t = 0$ in
- eine Schwingung mit $f_2 := 2\text{Hz}$ übergeht. Deren Amplitude nimmt zunächst zu und klingt anschließend wieder ab.
- Bei $t = 8$schaltet sich schlagartig ein Gleichanteil ein, der sich zu $t = 15$ebenso sprunghaft wieder abschaltet.

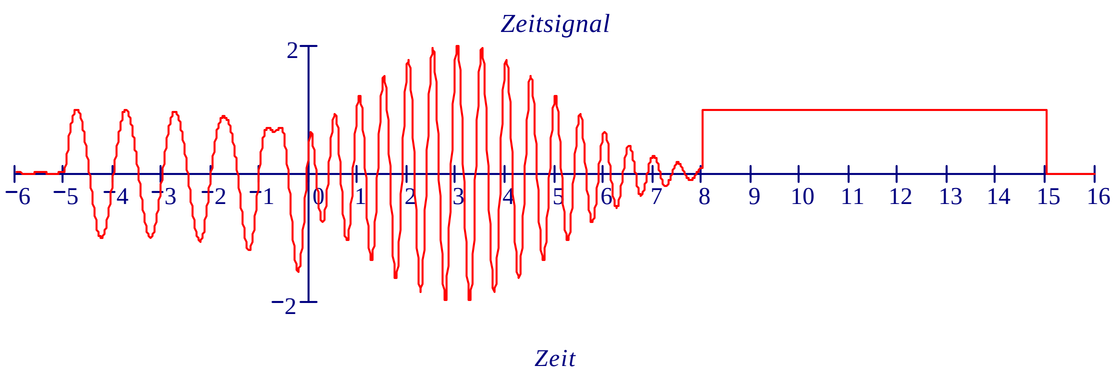
$$x_1(t) := \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \cdot (\Phi(t+5) - \Phi(t))$$

$$x_2(t) := 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) \cdot e^{\frac{-(t-3)^2}{8}} \cdot (\Phi(t+6) - \Phi(t-8))$$

$$x_3(t) := \Phi(t-8) - \Phi(t-15)$$

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$t := -6, -5.99 .. 16$$



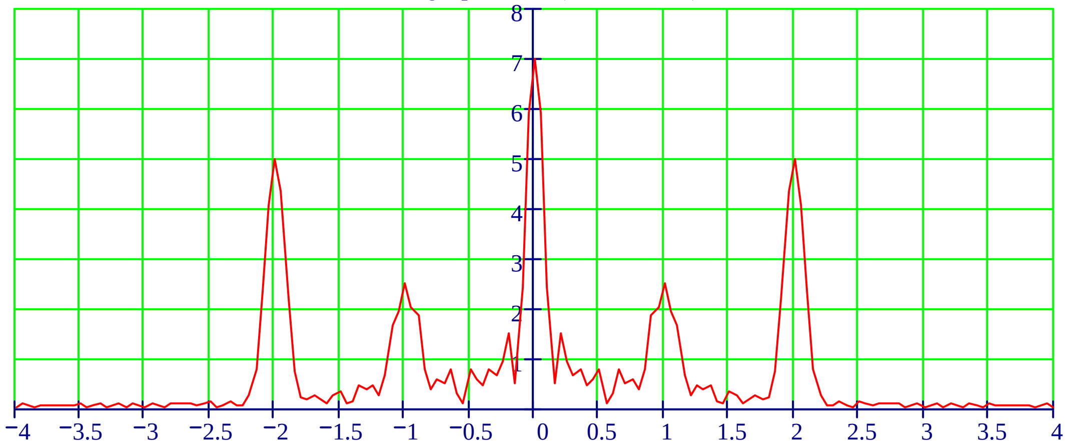
Die traditionelle Fouriertransformation

wird hier rein numerisch berechnet (und kann daher schnell an ein anderes Zeitsignal angepasst werden - es müssen nur evtl. die Integrationsgrenzen geändert werden) und im Frequenzbereich $-4..4$ Hz grafisch dargestellt:

$$X(\omega) := \int_{-5}^{15} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

$$f := -4, -3.95 .. 4$$

Betragsspektrum (traditionell)



Man erkennt sehr gut die Hauptanteile bei $f_1 = 1$ Hz und $f_2 = 2$ Hz und den Gleichanteil, ohne aber zu erfahren, wann welche Frequenzen bevorzugt auftreten.

Die gefensterte Fouriertransformation

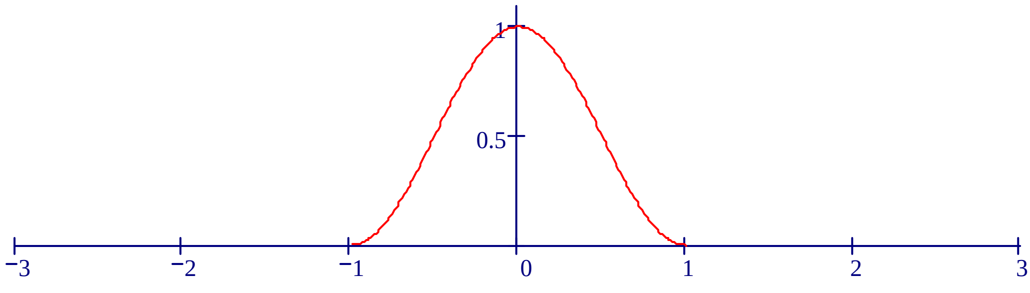
Nun wird das Zeitsignal mit der geeignet platzierten Fensterfunktion $w(t)$ multipliziert; das Zeitsignal wird also "scheibchenweise" erfasst, das Spektrum wird zeitabhängig:

$$X(\omega, t_v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t, t_0) \cdot w(t - t_v) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

Wir verwenden hier das aus der digitalen Signalverarbeitung bekannte Hanningfenster (b stellt die Breite des Fensters dar); es lohnt sich aber, auch mit anderen Fensterfunktionen zu experimentieren :

$$hanning(t, b) := \frac{1}{2} \cdot \left[1 - cos\left[\frac{2\cdot\pi}{b} \cdot \left(t - \frac{b}{2}\right)\right]\right] \cdot \left(\Phi\left(t + \frac{b}{2}\right) - \Phi\left(t - \frac{b}{2}\right)\right)$$

Hanningfenster der Breite 2



Anstatt wie oben eine einzige Fouriertransformierte (für viele Frequenzwerte zur grafischen Darstellung) zu berechnen, werden nun viele Transformationen entsprechend den einzelnen Zeitfensterpositionen berechnet. Damit entsteht nun eine zweidimensionale Fouriertransformierte X_W mit den Variablen Frequenz und Zeit und der Fensterbreite b als Parameter:

$$X_W(\omega, tv, b) := \int_{tv-\frac{b}{2}}^{tv+\frac{b}{2}} x(t) \cdot hanning(t - tv, b) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

Nachfolgend werden zunächst alle Fenstermitte-Positionen definiert, in deren Umgebung man einen "kurzen Blick" auf das Signal und seinen Frequenzinhalt wirft und anschließend die Frequenzwerte, an denen die entsprechenden Fouriertransformierten numerisch ausgewertet werden:

$tv_{min} := -6$ $\quad tv_{max} := 16$ $\quad M := 44$ $\quad m := 0..M$ $\quad ttv_m := tv_{min} + \frac{tv_{max} - tv_{min}}{M} \cdot m$

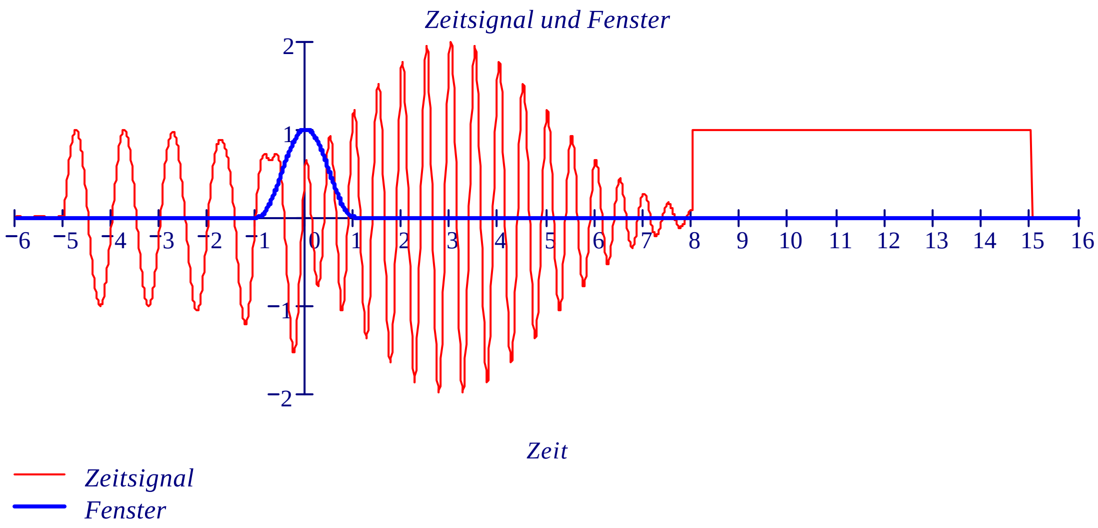
$f_{min} := -4$ $\quad f_{max} := 4$ $\quad N := 48$ $\quad n := 0..N$ $\quad ff_n := f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{N} \cdot n$

Gewählte Fensterbreite: $b := 2$

Berechnung der Matrix für die Grafiken:

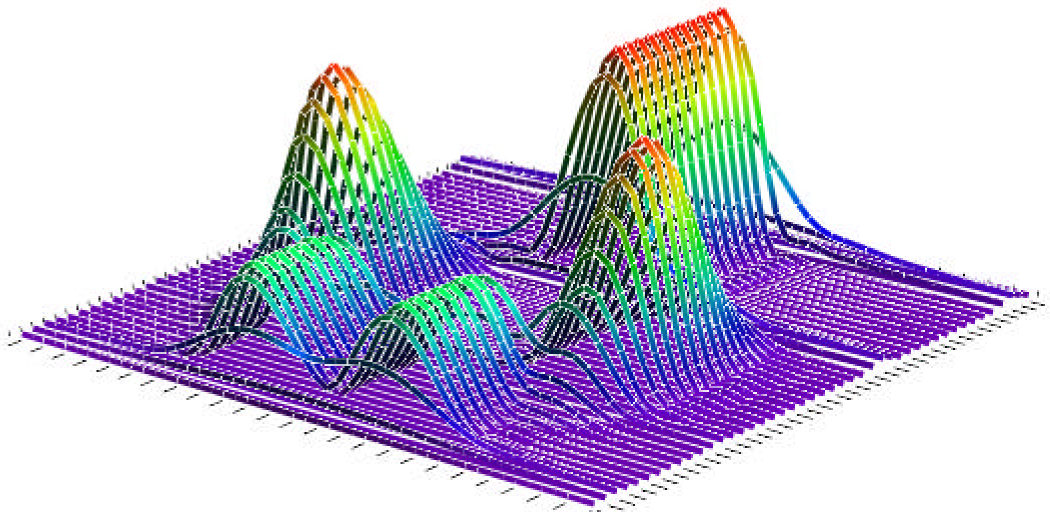
$$FourMat_{W_{m,n}} := \left| X_W\left(ff_n \cdot 2 \cdot \pi, ttv_m, b \right) \right|$$

Grafische Darstellungen, Diskussion



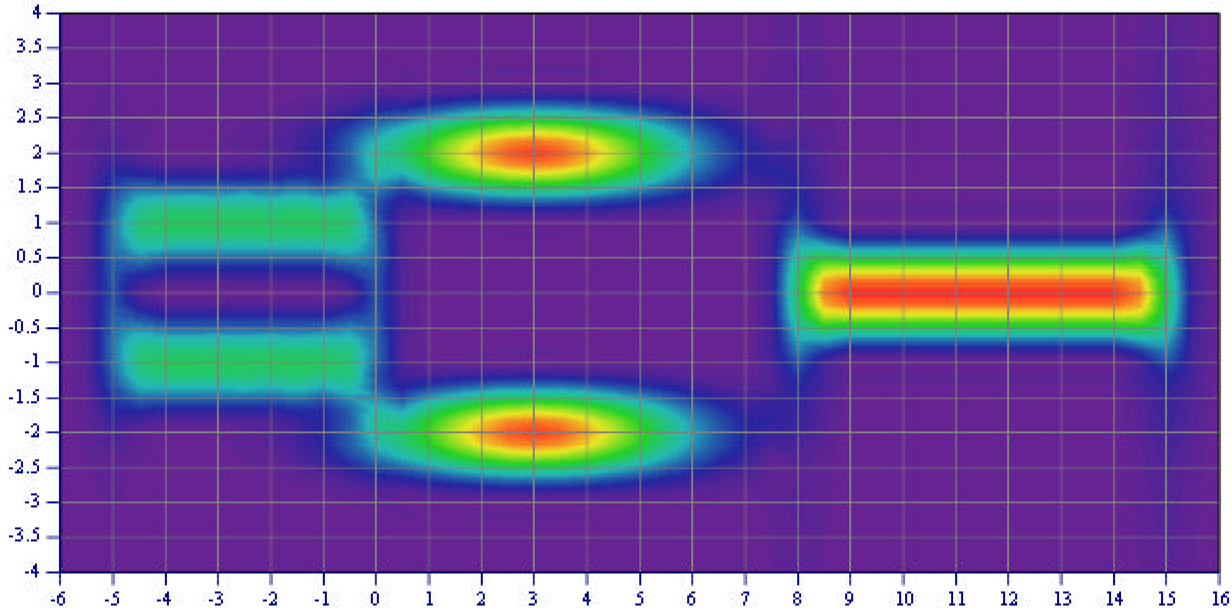
Die folgende Grafik zeigt die einzelnen Fouriertransformierten, die zu den $M + 1 = 45$ Zeitfensterpositionen gehören. Die Zeitachse weist schräg nach rechts hinten in die Zeichenebene hinein.
Man erkennt am Anfang die beiden ±1Hz -Gebirgszüge, die später in die ±2Hz-Berge übergehen. Danach kommt der Kamm des Gleichanteils.

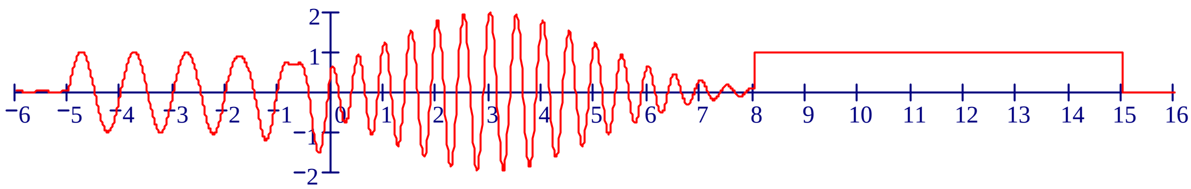
Die einzelnen Betragsspektren für die verschiedenen Fensterpositionen



Numerische Details können besser aus einem Umrissdiagramm herausgelesen werden: Die Zeitachse verläuft waagrecht, die Frequenzachse (Hz) senkrecht.
Die drei Frequenzanteile bei ±1 Hz, ±2Hz und 0 Hz zeichnen sich deutlich ab, ebenso wie ihre Amplitudenverhältnisse. Die zeitliche Aufeinanderfolge der Teilsignale kann übersichtlich und einfach abgelesen werden (zum besseren Vergleich wurde das Zeitsignal darunter noch einmal bei gleicher Zeitachse dargestellt):

Betragsspektrum gefenstert (Umrissdiagramm)

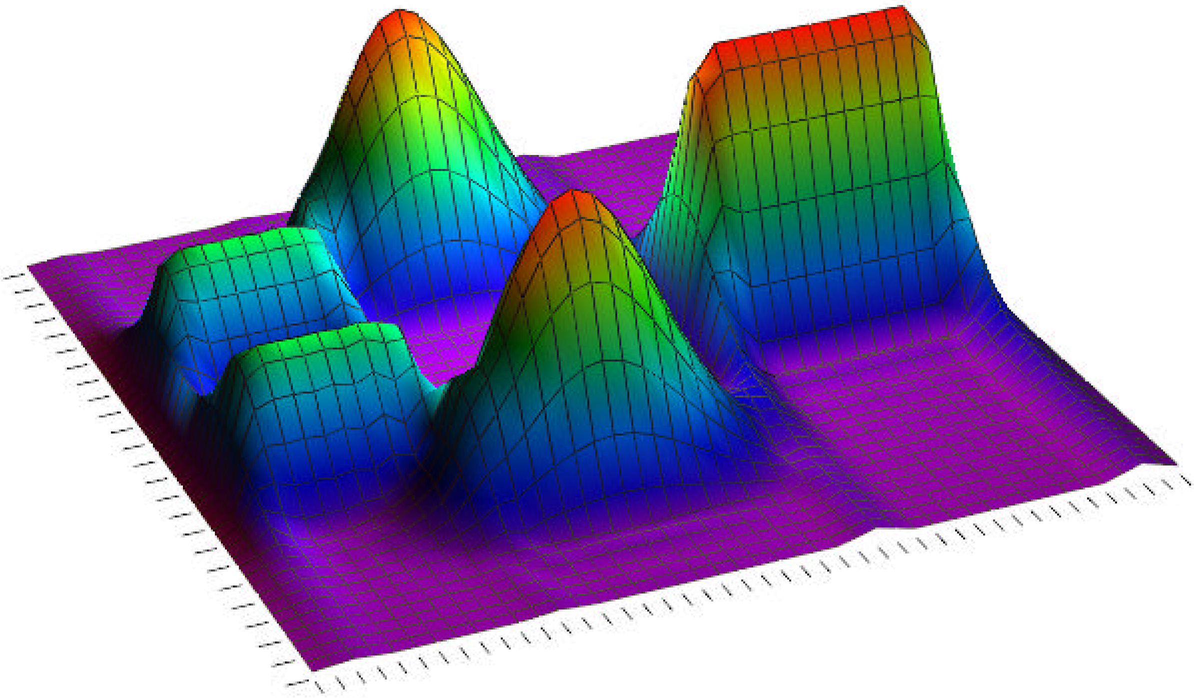




Zeit

Noch eine andere Art der Darstellung:
In diesem spektralen Bergland sieht man unter anderem besonders plastisch, wie sich das Spektrum kurzzeitig stark verbreitert, wenn schnelle, sprunghafte Signaländerungen stattfinden (insbesondere am Beginn und Ende der Gleichanteilphase):

Betragsspektrum gefenstert (3D-Flächendiagramm)



Abschließende Bemerkungen

Wie der Beitrag zeigt, können mit Hilfe der gefensterten Fouriertransformation statt der sonst ausschließlich enthaltenen Frequenzinformationen Frequenz-Zeit-Informationen über ein Zeitsignal gewonnen werden.
Das konkrete Ergebnis hängt natürlich ab von der gewählten Fensterform (Rechteck, Dreieck, Gauß, ...), der Fensterbreite und der Schrittweite.
Da, wie schon oben erwähnt, das Spektrum des Fensters in die Rechnung eingeht, sollte das Fenster einen möglichst sanften Verlauf haben und keine Unstetigkeiten aufweisen.
Je breiter das Fenster ist, desto mehr verschwimmt die Zeitinformation, desto genauer jedoch wird die Frequenzinformation über das betreffende Zeitintervall. Daher können Zeit- und Frequenzinformationen nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit erfasst werden (vgl. Heisenberg´sche Unschärferelation der Quantentheorie!).

Viel Spaß beim Fensterln mit verschiedenen Fensterformen und -breiten!