Wilfried Rohm wrohm@aon.at

Das Wechselstromparadoxon

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Ortskurven, Komplexe Widerstände, Differentialrechnung

- Kurzzusammenfassung

  Das sogenannte Wechselstromparadoxon tritt auf, wenn ein ohm´scher Widerstand in Serie mit einem Kondensator geschalten ist, dem ein veränderlicher Widerstand parallel geschalten wird: Der Stromstärke wird bei Veränderung des Widerstandes nicht in jedem Fall größer, sondern weist einen auf den ersten Blick eigenartigen Verlauf auf. Dies wird rechnerisch (symbolisch, numerisch und graphisch) begründet.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik und/oder Allgemeine Elektrotechnik, 2./3. Jahrgang

- Mathcad-Version:
  Mathcad 2000 / 2001

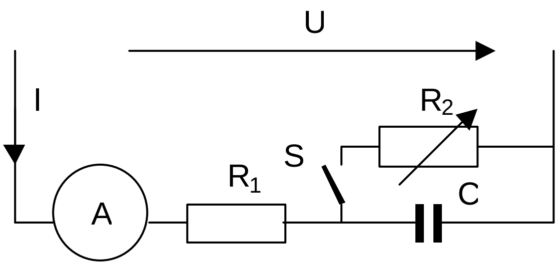
- Literaturangaben:

  Krikava / Ruhswurm / Seiser: Grundlagen der Elektrotechnik, Band 2

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Das vorgeführte Beispiel hält sich eng an die Ausführungen im oben angeführten Lehrbuch (Krikava u.a.)

Bei Anschluß eines ohm´schen Widerstandes R1 in Reihe mit dem Blindwiderstand Xc nach der nebenstehenden Abbildung zeigt das Amperemeter (bei offenem Schalter S) eine bestimmte Stromstärke I= I_1 an.



Wird nun durch Schließen dieses Schalters der verstellbare Widerstand R2 eingeschalten, so würde man vermuten, dass die Stromstärke auf jeden Fall größer wird, da jetzt der Strom auch durch R2 fließen kann.
Man erhält aber in Wirklichkeit eine Situation, welche durch folgende 3 Punkte gekennzeichnet ist (was durch Rechnung und Zeichnungen bestätigt werden soll):

a) bei einem bestimmten Widerstand R2=R2_gleich zeigt das Amperemeter denselben Wert I_1 an wie bei offenem Schalter S.

b) bei einem bestimmten Widerstand R2=R2_min wird die Stromstärke ein Minimum (I_min)

c) bei R2>R2_min wird die Stromstärke wieder größer und erreicht für R2 gegen Unendlich wieder den Wert I_1.

Allgemeine Rechnung

ad a) Bei welchem Widerstand R2_gl zeigt das Amperemeter nach dem Schliessen des Schalters denselben Wert I_1

Die Beträge der beiden Scheinwiderstände (Schalter offen bzw. geschlossen) müssen gleich sein:

$$Z_{offen} = R1 - j \cdot Xc \qquad Z = R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}$$

Z bezieht sich auf die geschlossenene Schalterstellung

$$|R1 - j \cdot Xc| = \left|R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}\right| \text{ auflösen}, R2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{Xc^2}{R1}$$

$$R2_{gl} := \frac{1}{2} \cdot \frac{Xc^2}{R1} \qquad I_1 := \left|\frac{U}{R1 - j \cdot Xc}\right| \qquad I_1 \text{ vereinfachen} \rightarrow \left[\frac{U^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Probe:

$$\left|R1 + \frac{R2_{gl} \cdot (-j \cdot Xc)}{R2_{gl} - j \cdot Xc}\right| \text{ vereinfachen} \rightarrow \left(R1^2 + Xc^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|R1 - j \cdot Xc| \rightarrow \left(R1^2 + Xc^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ad b) Wir suchen jenen Widerstand R2_min, bei dem die Stromstärke (bei geschlossenem Schalter) minimal wird (Probleme in Mathcad 2000 - funktioniert ohne Probleme in Mathcad 2001 !)

$$I(R2) = \left|\frac{U}{R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}}\right|$$

$$\frac{d}{dR2}\left|\frac{U}{R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}}\right| = 0 \text{ auflösen}, R2 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot R1} \cdot \left[Xc + \left(Xc^2 + 4 \cdot R1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot Xc \\ \frac{1}{2 \cdot R1} \cdot \left[Xc - \left(Xc^2 + 4 \cdot R1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot Xc \end{bmatrix}$$

Da R2 nicht negativ sein kann (und der Wert unter der Wurzel sicher größer als Xc ist, kommt von diesen beiden symbolischen Lösungen nur die obere in Betracht:

$$R2_{min} := \frac{1}{2 \cdot R1} \cdot \left[Xc + \left(Xc^2 + 4 \cdot R1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot Xc$$

ad c) Gesucht ist die Stromstärke bei geschlossenenm Schalter für R2 gegen Unendlich. Diese soll gleich sein wie die Stromstärke bei geöffnetem Schalter

$$\lim_{R2 \to \infty} \left| \frac{U}{R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}} \right| \to \left[\frac{U^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{unendlich} := \left[\frac{U^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad I_1 \text{ vereinfachen } \to \left[\frac{U^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Die symbolische Rechnung zeigt, dass tatsächlich gilt: $I_{unendlich} = I_1$

Zeichnerische Darstellung für bestimmte Werte:

$R1 := 3000 \cdot \Omega$ $\qquad$ $C := 1 \cdot \mu F$

$U := 220 \cdot V$ $\qquad$ $f := 50 \cdot Hz$

$$Xc := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \qquad Xc = 3.183 \times 10^3\, \Omega$$

$Z_{offen} := R1 - j \cdot Xc$ $\qquad$ Scheinwiderstand bei offenenm Schalter

$Z(R2) := R1 + \frac{R2 \cdot (-j \cdot Xc)}{R2 - j \cdot Xc}$ $\qquad$ Z bezieht sich auf die geschlossene Schalterstellung

$$I(R2) := \frac{U}{Z(R2)} \qquad I_1 := \left| \frac{U}{Z_{offen}} \right| \qquad I_1 = 0.05\, A$$

Wir übernehmen ausserdem noch die oben berechneten Werte

$$R2_{gl} := \frac{1}{2} \cdot \frac{Xc^2}{R1} \qquad R2_{gl} = 1.689\, k\Omega$$

$$R2_{min} := \frac{1}{2 \cdot R1} \cdot \left[Xc + \left(Xc^2 + 4 \cdot R1^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot Xc \qquad R2_{min} = 5.292\, k\Omega$$

Anmerkung: Wie die folgenden numerischen Werte zeigen, sind die Beträge der Scheinwiderstände Z_offen und Z_geschl(R2_gl) wie vorausgesetzt gleich groß, es besteht jedoch ein anderer Phasenwinkel!!

$\left|Z_{offen}\right| = 4.374\, k\Omega$ $\qquad$ $\arg\left(Z_{offen}\right) = -46.696\, Grad$

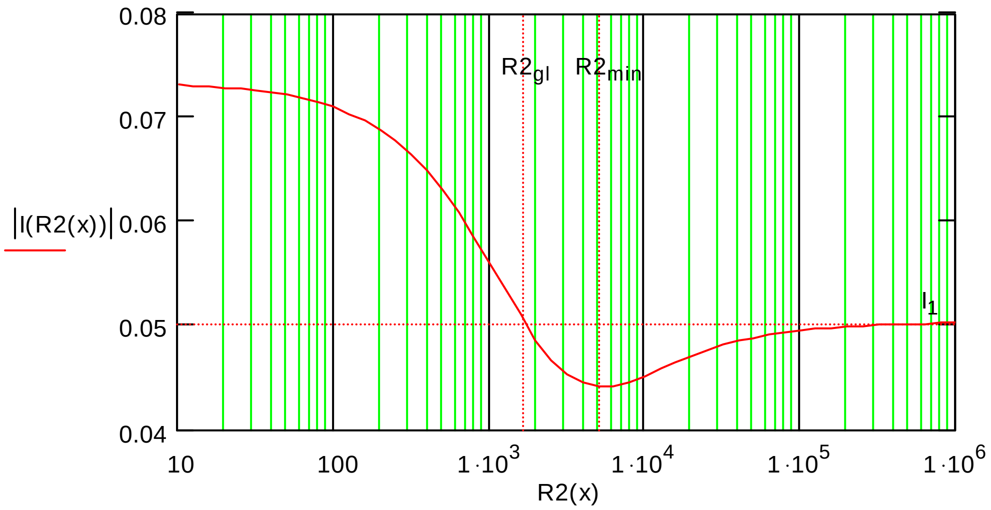
$\left|Z\left(R2_{gl}\right)\right| = 4.374\, k\Omega$ $\qquad$ $\arg\left(Z\left(R2_{gl}\right)\right) = -9.197\, Grad$

$x := -2, -1.9 .. 3$

TIPP: Bei logarithmischer Darstellung die Zehnerpotenz als Laufvariable verwenden!

$R2(x) := 10^x \cdot k\Omega$

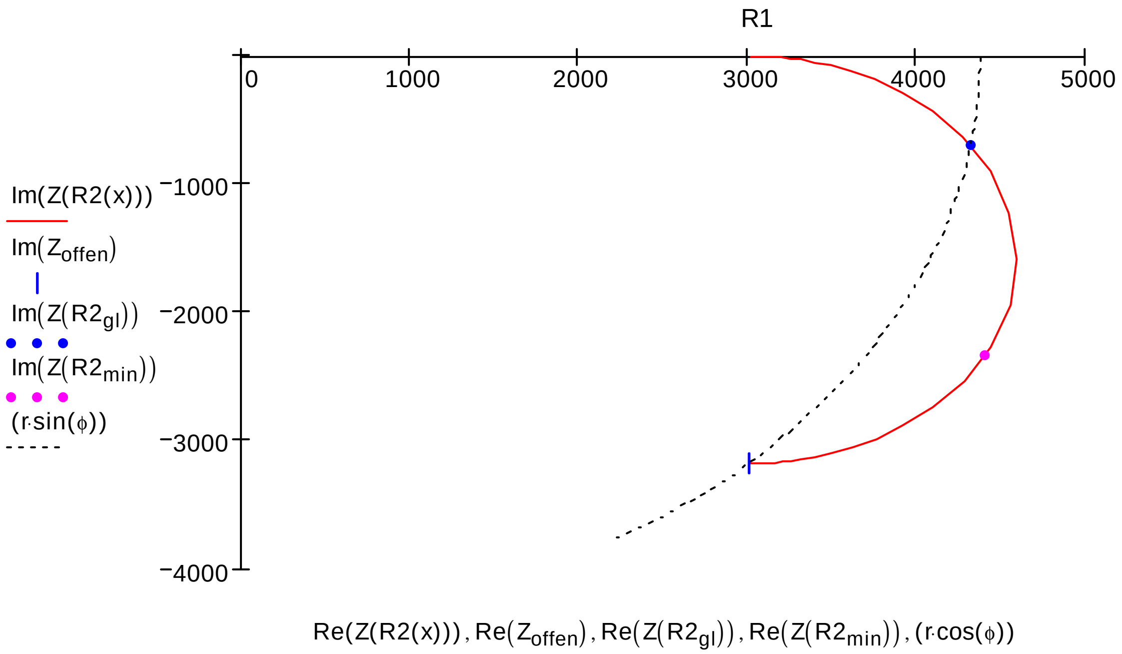
Der folgende Funktionsverlauf im abszissenlogarithmischen Maßstab zeigt die Abhängigkeit des Stromes I von R2 bei konstanten Werten von U, R1 und Xc. Außerdem sind die berechneten Größen eingezeichnet. Der Bereich des "Paradoxons" ist der Funktionsverlauf oberhalb von $R2_{gl}$



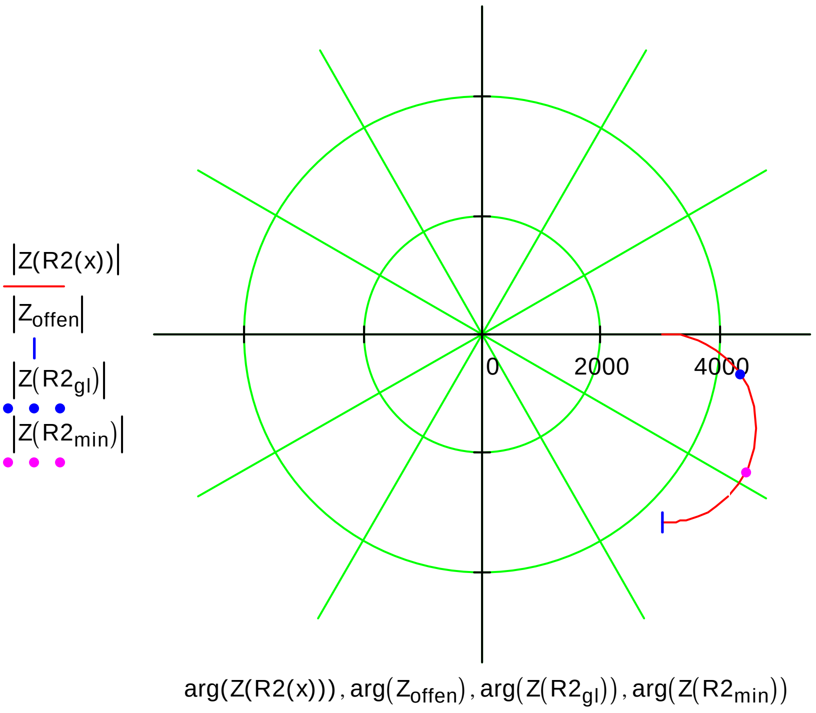
Die **Ortskurve des komplexen Widerstandes Z(R2)** erlaubt im Gegensatz zum obigen Schaubild neben Aussagen über den Betrag auch eine über den Winkel (Phasenlage).
So sieht man in der unten gezeigten Ortskurve den komplexen Zeiger zu Z(R2_gl) (**blauer Punkt**) auf demselben Kreis (also mit dem gleichen Betrag) wie den komplexen Zeiger Z_offen (**blaue Raute**). Aber man erkennt hier die unterschiedliche Phasenlage sofort.
Der am weitesten vom Ursprung entfernte Punkt (**magenta Punkt**) ist der Endpunkt des komplexen Zeigers zu Z(R2_min) - also jener (maximale) Scheinwiderstand, bei dem die Stromstärke minimal ist.

$r := |Z_{offen}|$

$\phi := 0Grad, -1Grad .. -60Grad$



Variante zur Erstellung der Ortskurve über das Kreisdiagramm



ANMERKUNG: In den früheren Versionen (bis einschließlich Mathcad 2000) ist mir die symbolische Berechnung des Stromminimums nicht geglückt. Dann muß man sich numerisch behelfen, wie hier kurz gezeigt:

Berechnung von I_min rein numerisch

$R2 := 10^3 \cdot \Omega$ Startwert für die Iteration der Gleichung

Vorgabe

$$\frac{d}{dR2}\left|I(R2)\right| = 0$$

$R2\_min := \text{suchen}(R2)$ $R2\_min = 5.292 \times 10^3\,\Omega$ Diese Lösung stimmt mit oben überein.

I1 = function

$$\left[U^2 \cdot \frac{R1^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)^2} + U^2 \cdot \frac{Xc^2}{\left(R1^2 + Xc^2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.05\,A$$