Wilfried Rohm, HTL Saalfelden

Transformator - Laplacetransformation

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Laplacetransformation, Differentialgleichungssystem

- Kurzzusammenfassung

  Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem im Zeitbereich, das bei einer Transformatorschaltung auftritt. Dieses Differentialgleichungssystem soll im Fall des Anlegens einer Gleichspannung und einer Wechselspannung berechnet werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4./5.Jahrgang, Abteilungen mit elektrotechnischen Schwerpunkten

- Mathcad-Version:

  ab Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  H.Weber: Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik, Teubner Studienskripten

- Anmerkungen

  Es entstehen durch die symbolische Laplace-Transformation bzw. ihre Inversion sehr lange Ausdrücke. Zumindest die Lösung beim Anlegen einer Gleichspannung lässt sich in den Mathcadversionen ab 2000 auf die gezeigte Weise finden. Die Variante mit Anlegen einer Wechselspannung führt teilweise zu Programmabstürzen! (Vom Autor wurde die richtige Lösung nur in der Version 2001-i für diesen Fall gefunden)

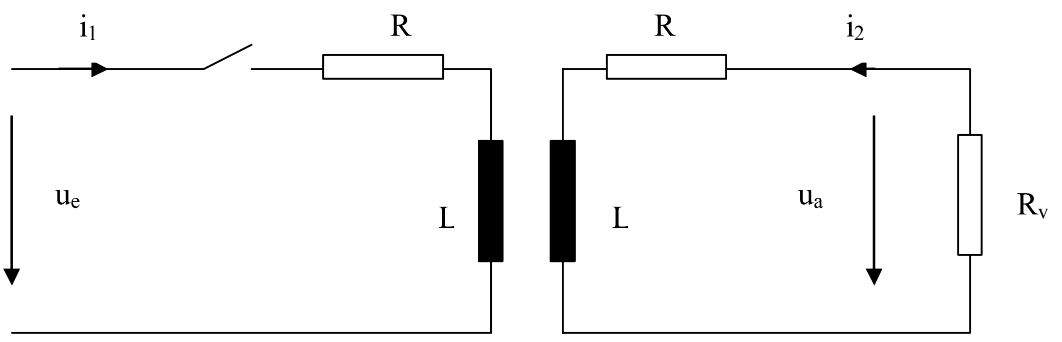
Aufgabenstellung

Wir betrachten einen Transformator, wobei wir Primärkreis und Sekundärkreis druch eine Ohmschen Widerstand R und einen induktiven Anteil L charakterisieren. Die Gegeninduktivität $M = k \cdot L$ beschreibt die Rückwirkung vom Sekundärkreis auf den Primärkreis. Wir erhalten daher folgendes Differentialgleichungssystem:

$$u_e(t) = R \cdot i_1(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + M \cdot \frac{d}{dt} i_2(t)$$

$$u_a(t) = R \cdot i_2(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) + M \cdot \frac{d}{dt} i_1(t)$$

$$u_a(t) = -R_v \cdot i_2(t)$$



a) Erklären Sie, wie man zu diesem Differentialgleichungssystem gelangt.

b) Das Differentialgleichungssystem soll mittels Laplacetransformation gelöst werden für den Fall des Anlegens einer
1) Gleichspannung U_0
2) Wechselspannung $U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Die Lösungsfunktionen $i_1(t)$ und $i_2(t)$ sollen graphisch dargestellt und interpretiert werden.
Hinweise:
Man ersetze M durch $k \cdot L$
Falls Probleme mit langen Ausdrücken auftreten, kann (im Notfall) auch mit der Annahme
$R_V = 0$ (Kurzschluß) gearbeitet werden.
Zur grafischen Darstellung wähle man folgende spezielle Werte:

$L := 500\text{mH}$ $R := 10\Omega$ $U_0 := 10\text{V}$ $R_V := R$ $k := 0.9\ (0.5)$ $f := 50\text{Hz}$

c)Erläutern Sie die Grundidee der Laplacetransformation und die speziellen Vorteile, welche diese bei der Lösung dieser Aufgabe bietet. Leiten Sie einige wesentlichen Elemente der Laplace-Transformation her, wie sie in diesem Beispiel verwendet werden. Schildern Sie (ideenmäßig) auch den Zusammenhang zur Fouriertransformation.

Teil a und Teil b: Lösung für den Fall des Anlegens einer Gleichspannung

$L := L$ $R := R$ $R_V := R_V$ $U_0 := U_0$ $k := k$ $f := f$

Anfangsbedingungen $i_1(0) = i_2(0) = 0$

Die Maschengleichungen ergeben folgendes Differentialgleichungssysttem

$$L\left(\frac{d}{dt}i_1(t)\right) + M \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) + R \cdot i_1(t) = u_e(t)$$ Primärseite

$$\left(L \cdot \frac{d}{dt}i_2(t)\right) + M \cdot \frac{d}{dt}i_1(t) + R \cdot i_2(t) = u_a(t)$$ Sekundärseite

Hier wurde die Summe der Spannungen im Primär bzw. Sekundärkreis angesetzt. Ue und Ua setzen sich aus den Spg. an den R und L zusammen und M*i1' bzw. M*i2' beschreibt die Wirkung von prim. auf sek. Kreis und umgekehrt

$$u_a(t) = -R_V \cdot i_2(t)$$

$u_a(t)$ ist laut ohmschem Gesetz i_2 * Rv, das minus kommt durch die Einzeichnungsrichtung von ua, da diese gegen die stromrichtung liegt

Dieses Gleichungssystem wird nun in den Laplace-Bildbereich übertragen. Dies kann händisch geschehen. Verwendet man Mathcad, muss (bei höheren Versionen als 7) jede Seite der Gleichung getrennt transformiert werden. Ausserdem muss man anschließend die Anfangsbedingungen einsetzen und für die Laplacetransformierten eigene Funktionsnamen einführen, um das Ganze lesbarer zu gesatalten!

$$\text{laplace}\left(R\cdot i_1(t)+L\cdot\frac{d}{dt}i_1(t)+M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t),t,s\right)\rightarrow R\cdot\text{laplace}(i_1(t),t,s)+L\cdot(s\cdot\text{laplace}(i_1(t),t,s)-i_1(0))\cdot$$

$$\text{laplace}(U_0,t,s)\rightarrow\frac{U_0}{s}$$

$$\text{laplace}(u_a(t),t,s)\rightarrow\text{laplace}(u_a(t),t,s)$$

$$\text{laplace}\left(R\cdot i_2(t)+L\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)+M\cdot\frac{d}{dt}i_1(t),t,s\right)\rightarrow R\cdot\text{laplace}(i_2(t),t,s)+L\cdot(s\cdot\text{laplace}(i_2(t),t,s)-i_2(0))\cdot$$

$$\text{laplace}(-R_V\cdot i_2(t),t,s)\rightarrow -R_V\cdot\text{laplace}(i_2(t),t,s)$$

In lesbare Form verwandelt erhält man nach Einsetzen der Anfangsbedingungen und dem Umschreiben von $\text{laplace}(i_1(t),t,s)$ zu I_1 und analogen Vereinfachungen das folgende algebraische Gleichungssystem, das mit Hilfe des Lösungsblockes symbolisch gelöst werden kann.

Vorgabe

$$(L\cdot s+R)\cdot I_1+M\cdot s\cdot I_2=\frac{U_0}{s}$$

$$M\cdot s\cdot I_1+(L\cdot s+R)\cdot I_2=Ua$$

$$Ua=-R_V\cdot I_2$$

$$\begin{pmatrix}II1\\II2\\UU2\end{pmatrix}:=\text{Suchen}(I_1,I_2,Ua)\;\Big|\begin{array}{l}\text{ersetzen},M=k\cdot L\\\text{vereinfachen}\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}\dfrac{-U_0}{-R^2-2\cdot R\cdot L\cdot s-R\cdot R_V-L^2\cdot s^2-L\cdot s\cdot R_V+k^2\cdot}\\U_0\cdot k\cdot\dfrac{L}{-R^2-2\cdot R\cdot L\cdot s-R\cdot R_V-L^2\cdot s^2-L\cdot s}\\-R_V\cdot U_0\cdot k\cdot\dfrac{L}{-R^2-2\cdot R\cdot L\cdot s-R\cdot R_V-L^2\cdot s^2-L}\end{pmatrix}$$

Wir extrahieren aus der obigen Lösung die uns interessierenden Größen für I_1 bzw. I_2 - das sind die gesuchten Funktionen im Bildbereich!

$$I_1(s,R,R_V,L,k,U_0):=II1\rightarrow\frac{-U_0}{-R^2-2\cdot R\cdot L\cdot s-R\cdot R_V-L^2\cdot s^2-L\cdot s\cdot R_V+k^2\cdot L^2\cdot s^2}\cdot\frac{R+L\cdot s+R_V}{s}$$

$$I_2(s,R,R_V,L,k,U_0):=II2\rightarrow U_0\cdot k\cdot\frac{L}{-R^2-2\cdot R\cdot L\cdot s-R\cdot R_V-L^2\cdot s^2-L\cdot s\cdot R_V+k^2\cdot L^2\cdot s^2}$$

Auf diese Funktionen wird nun die inverse Laplacetransformation angewandt, die Ausdrücke sind allerdings extrem lang und praktisch nicht lesbar. Sie können aber unter i_1 bzw. i_2 abgespeichert und anschließend auch in Abhängigkeit von den Parametern gezeichnet werden.

$$i_1(t, R, R_V, L, k, U_0) := \text{invlaplace}(I_1(s, R, R_V, L, k, U_0), s, t) \text{ vereinfachen } \rightarrow -U_0 \cdot \frac{L \cdot \exp\left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot R + R_V)\right.}{}$$

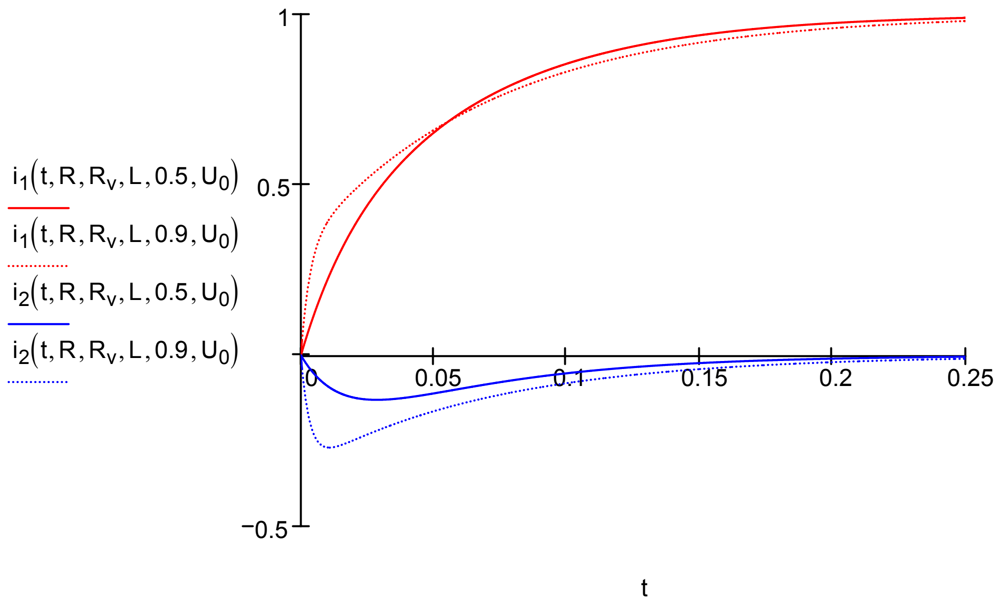
$$i_2(t, R, R_V, L, k, U_0) := \text{invlaplace}(I_2(s, R, R_V, L, k, U_0), s, t) \text{ vereinfachen } \rightarrow -2 \cdot U_0 \cdot k \cdot L \cdot \exp\left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \right.$$

Zeichnung der

$L := 500mH \quad R := 10\Omega \quad U_0 := 10V \quad R_V := 10\Omega$

$$\tau := \frac{L}{R}$$

$$t := 0s, \frac{\tau}{1000} .. 5 \cdot \tau$$



Die Zeichnung zeigt den Verlauf der gesuchten Ströme und die Auswirkung eines steigenden Kopplungsgrades

Link zur Beispielsübersicht

$+ M \cdot \left(s \cdot \mathrm{laplace}\left(i_2(t), t, s\right) - i_2(0)\right)$

$+ M \cdot \left(s \cdot \mathrm{laplace}\left(i_1(t), t, s\right) - i_1(0)\right)$

$$\frac{}{L^2 \cdot s^2} \cdot \frac{R + L \cdot s + R_V}{s}$$

$$\frac{}{s \cdot R_V + k^2 \cdot L^2 \cdot s^2}$$

$$\frac{}{L \cdot s \cdot R_V + k^2 \cdot L^2 \cdot s^2}$$

$$) \cdot \frac{t}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot L}\right] \cdot R_v \cdot \left[\frac{-1}{L^2}\cdot\frac{4\cdot k^2\cdot R^2 + 4\cdot k^2\cdot R\cdot R_v + R_v^2}{\left(-1+k^2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot k^2 \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-1}{L^2}\cdot\frac{4\cdot k^2\cdot R^2 + 4\cdot k^2\cdot R}{\left(-1+k^2\right)^2}\right.\right.$$

$$R + R_v\right) \cdot \frac{t}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot L}\right] \cdot \left[\frac{-1}{L^2}\cdot\frac{4\cdot k^2\cdot R^2 + 4\cdot k^2\cdot R\cdot R_v + R_v^2}{\left(-1+k^2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-1}{L^2}\cdot\frac{4\cdot k^2\cdot R^2 + 4\cdot k^2\cdot R}{\left(-1+k^2\right)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\cdots R \cdot R_v + {R_v}^2}{\cdots 2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] + 4 \cdot R^2 \cdot \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot R + R_v\right) \cdot \frac{t}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot L}\right] \cdot k^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-1}{L^2} \cdot \frac{4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2 \cdot \cdots}{\left(-1 + k^2\cdots\right.}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\cdots \cdot R_v + {R_v}^2}{\cdots}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \cdot \frac{-1 + k^2}{4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2 \cdot R \cdot R_v + {R_v}^2}$$

$$\frac{\left.\frac{R \cdot R_V + R_V^{\,2}}{\big)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t \Bigg] + 4 \cdot \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot R + R_V\right) \cdot \frac{t}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot L}\right] \cdot k^2 \cdot R_V \cdot \cos\Bigg[\frac{1}{2} \cdot \Bigg[\frac{-1}{L^2} \cdot \frac{4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2}{\big(-1 + k^2}}{R \cdot \left(4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2 \cdot R \cdot R_V + R_V^{\,2}\right)}$$

$$\frac{\cdot R \cdot R_V + R_V^{\,2}}{2)^2}\Bigg]^{\frac{1}{2}} \cdot t\Bigg] \cdot R - L \cdot \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot R + R_V\right) \cdot \frac{t}{(k-1) \cdot (k+1) \cdot L}\right] \cdot R_V \cdot \left[\frac{-1}{L^2} \cdot \frac{4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2 \cdot R \cdot R_V \cdot}{\left(-1 + k^2\right)^2}\right.$$

$$\frac{\ldots + R_v^2\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-1}{L^2}\cdot\frac{4\cdot k^2\cdot R^2 + 4\cdot k^2\cdot R\cdot R_v + R_v^2}{\left(-1+k^2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot t\right] + \exp\left[\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot R + R_v\right)\cdot\frac{t}{(k-1)\cdot(k+1)\cdot L}\right]\cdot I}{}$$

$$\frac{R_V^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-1}{L^2} \cdot \frac{4 \cdot k^2 \cdot R^2 + 4 \cdot k^2 \cdot R \cdot R_V + R_V^2}{\left(-1 + k^2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - 4 \cdot k^2 \cdot R^2 - 4 \cdot k^2 \cdot R \cdot R_V - R_V^2}{}$$