Wilfried Rohm wrohm@aon.at

Das Stipenproblem-Test auf Poissonverteilung

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Poissonverteilung, Statistische Tests, Chiquadrattest (Anpassungstest), Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Zufallssstreubereiche, Regelkarte für Fehler pro Einheit.

- Kurzzusammenfassung

  Stipen nennt man kleine Einschlüsse (Fehler!) auf Kunststoffplatten. Da Fehler pro Einheit normalerweise einer Poissonverteilung folgen, erscheint es sinnvoll, beobachtete Fehlerzahlen entsprechend zu interpretieren bzw. zu überprüfen, ob tatsächlich dieses Verteilungsmodell zum gegebenen Problem passt.

- Lehrplanbezug:

  Angewandte Mathematik, 5.Jahrgang, alle Abteilungen

Aufgabenstellung

Bei der Fa. Senoplast (in Piesendorf, Salzburg) stellen sogenannte **STIPEN** (d.h. kleine Fehler in der Oberfläche eines Kunststoffes) ein Problem dar. Um dieses in Zukunft besser analysieren zu können, wird die Produktion eines bestimmten Kunststoffes einige Zeit lang untersucht. Es werden die Stipen je Kunststoffteil gezählt. Der QM-Manager möchte wissen, ob er davon ausgehen kann, dass eine **Poissonverteilung** vorliegt. Folgende Daten liegen vor:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Stipen / Teil} & \text{beobachtete Häufigkeiten} \\ \downarrow & \swarrow \end{array} \\ \text{daten} := & \begin{pmatrix} 0 & 55 \\ 1 & 63 \\ 2 & 38 \\ 3 & 15 \\ 4 & 7 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Sie werden beauftragt, diese Untersuchung vorzunehmen. Sie sollen dem QM-Manager das Ergebnis so präsentieren, dass dieser damit der Firmenleitung das Ergebnis möglichst anschaulich und verständlich vorführen kann. Damit der QM-Manager für eventuelle Zwischenfragen gewappnet ist, soll auch der Rechengang entsprechend kommentiert werden.

b) Wie würden Sie (gemäß dem Ergebnis) die Wahrscheinlichkeit abschätzen, dass mehr als 5 Stipen/Teil auftreten?

c) In Zukunft sollen 10 Teile in regelmäßigen Zeitabständen untersucht werden, ob die Anzahl der Stipen **nur zufällig** vom oben ermittelten Ergebnis abweicht. Sie sollen für einen Facharbeiter eine geeignete Prüfanweisung zusammenstellen. Man ermittle diese und erkläre / begründe (gegenüber dem QM-Manager) die Vorgangsweise. Zur besseren Veranschaulichung sollte man hierzu noch eine passende Simulation durchführen bzw. darstellen.

HINWEIS zu Teil a: Die letzten drei Werte (5,6,7 Stipen / Teil) sollten zusammengefaßt werden **(Begründung??)**
Die korrigierten Daten schauen also folgendermaßen aus:

Stipen / Teil ↓ ↙ beobachtete Häufigkeiten

$$daten := \begin{pmatrix} 0 & 55 \\ 1 & 63 \\ 2 & 38 \\ 3 & 15 \\ 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Teil a) Chiquadrattest (Anpassungstest)

H0 : Die beobachteten Stipen / Teil folgen einer Poissonverteilung.

Der Chiquadrat-Anpassungstest hat als Voraussetzung, dass nicht zu kleine Häufigkeiten auftreten, weil dann Zufalls-Schwankungen überproportionale Bedeutng erlangen. Meist wird verlangt: "*Höchstens 20% der Beobachteten Werte B_i dürfen kleiner als 5 sein*." Daher wurden gemäß Hinweis die letzten 3 Klassen zusammengefasst!

$x := daten^{\langle 0 \rangle}$ $B := daten^{\langle 1 \rangle}$ Der Vektor B enthält die Beobachteten Werte mit x Stipen pro Teil.

$k := 6$ Klassenanzahl k (jede Zahl ist eine eigene Klasse - mit Ausnahme der letzten Klasse, die alle restlichen Zahlen 5 bis unendlich zusammenfasst).

$i := 0..k-1$ alternative Schreibweise (weniger kurz)

$n := \sum B$ $n = 183$ Anzahl der insgesamt beobachteten "Ereignisse" (Stipen)

$\mu := \frac{x \cdot B}{n}$ $\mu = 1.295$ Schätzwert für μ

$n := \sum_i B_i$ $\mu := \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_i x_i \cdot B_i \right)$

alternative Variante

$r := 1$ Anzahl der geschätzten Parameter der Verteilungsfunktion (μ)

$f := k - r - 1$ allgemeine Berechnung der Anzahl der Freiheitsgrade der Prüfgröße

$g_{po}(x) := dpois(x, \mu)$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung

$G_{po}(x, \mu) := ppois(x, \mu)$ Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung

$g_{chi}(chiq, f) := dchisq(chiq, f)$ Dichte der Cjhiquadratverteilung (wirds für zeichnerische Darstellung des Testergebnisses benötigt.

Zur Ermittlung der unter H0 zu erwartenden Werte E_i müssen zunächst die theoretische Wahrscheinlichkeiten p_i, dass ein Einzelwert in Klasse i fällt, ermittelt werden:

$i := 0..k-1$ $p_i := g_{po}(x_i)$ $p_{k-1} := 1 - G_{po}(x_{k-1} - 1, \mu)$

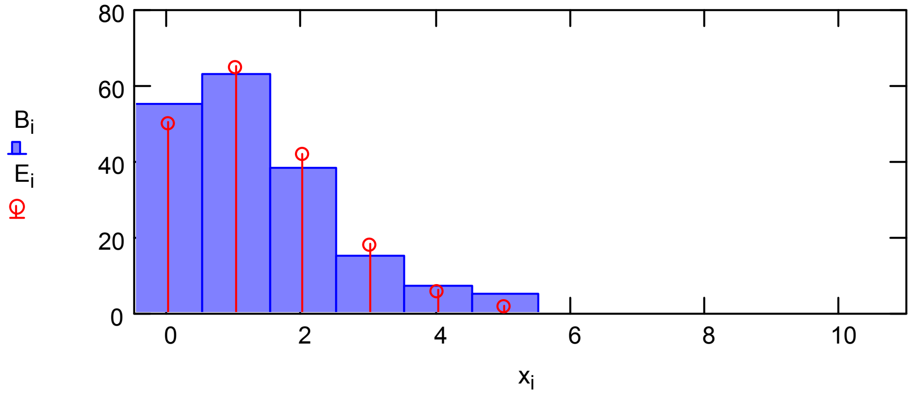
Bei der letzten Wahrscheinlichkeit berücksichtigen wir die Tatsache, daß die letzte Klasse von 9 bis unendlich verläuft.

$\sum p = 1$

Die Summe der theoretischen Wahrscheinlichkeiten muß 1 ergeben.

$E_i := n \cdot p_i$

Vergleich der beobachteten Häufigkeiten und der theoretischen (erwarteten) Häufigkeiten:



Prüfgröße:

$$\chi2_{prüf} := \sum_i \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

$\chi2_{prüf} = 6.606$

Kritische Werte: entsprechen dem (1-α)-Quantil der χ2-Verteilung mit f=k-r-1 Freiheitsgraden:

$\chi2(\alpha, f) := \mathrm{qchisq}(\alpha, f)$

Für das Quantil der χ2-Verteilung steht die Funktion qchisq zur Verfügung.

$\alpha := 5 \cdot \%$ $\chi2(1 - \alpha, f) = 9.488$

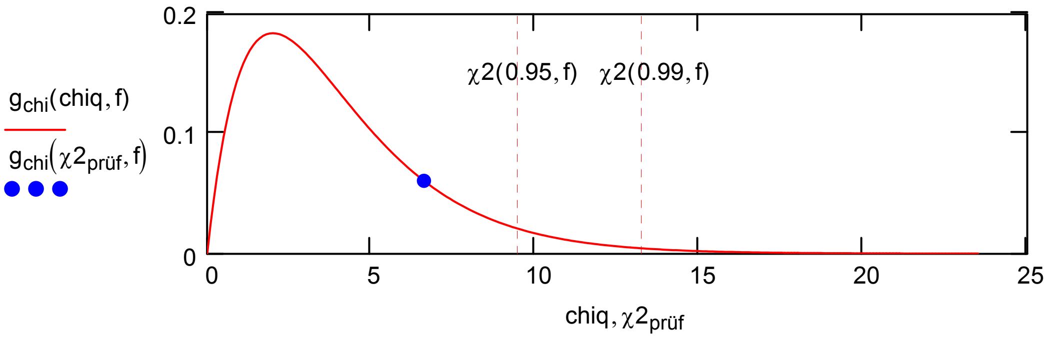
$\alpha := 1 \cdot \%$ $\chi2(1 - \alpha, f) = 13.277$

$\alpha := 0.1 \cdot \%$ $\chi2(1 - \alpha, f) = 18.467$

Die Nullhypothese H_0, daß die Zählraten poissonverteilt sind, wird nicht abgelehnt. Das bedeutet also, dass die beobachteten Häufigkeiten für i Stipen / Teil NICHT im Widerspruch zur Annahme einer Poissonverteilung stehen!

Zeichnerische Darstellung des Testergebnisses:

$\mathrm{chiq} := 0, 0.1 .. \chi2(0.9999, f)$



Teil b) Berechnungsbeispiel

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgenommener Teil MEHR als 5 Stipen aufweist, wird mit $1 - G_{PO}(5)$ berechnet.

$$1 - \text{ppois}(5, \mu) = 2.189 \times 10^{-3}$$

Teil c) Produktionsüberwachung

Die in der Angabe geforderte Überwachung der Produktion kann über eine **Qualitätsregelkarte für die Anzahl von Fehlern (Stipen) pro N=10 Teile** erfolgen.

Zur Bestimmung der Eingriffsgrenzen dieser Regelkarte muss der 99%-ZUFALLSSTREUBEREICH für N* μ Stipen / N Teile berechnet werden

$N := 10$ $\mu = 1.295$

$\mu_N := \mu \cdot N$ $\mu_N = 12.951$

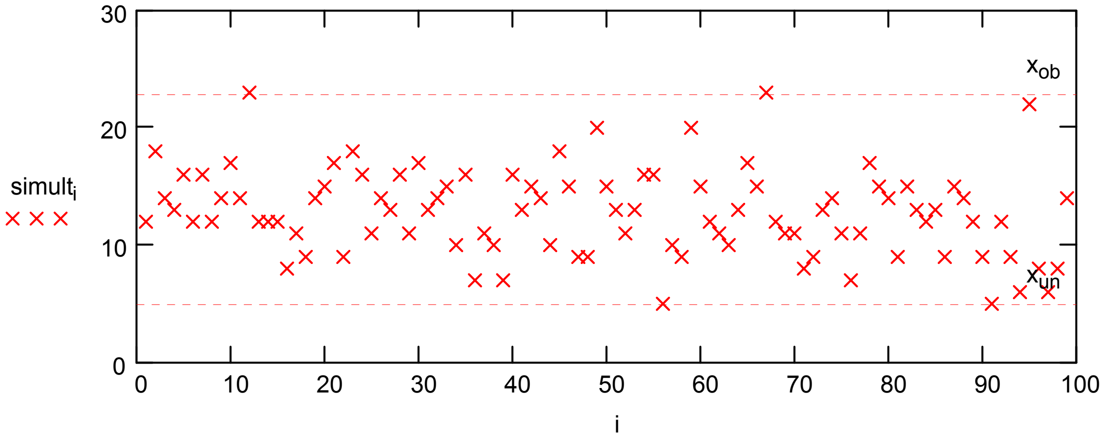
$\alpha := 0.01$

$x_{un} := \text{qpois}\left(\frac{\alpha}{2}, \mu_N\right)$ $x_{un} = 5$

$x_{ob} := \text{qpois}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \mu_N\right)$ $x_{ob} = 23$

Simulation der Regelkarte

$i := 1 .. 100$ $\text{simult} := \text{rpois}(100, \mu_N)$



[Link zur Beispielsübersicht](#)