Wilfried Rohm **wrohm@aon.at**

Lebensdaueruntersuchungen an Energiesparlampen

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Weibullverteilung, Lebensdaueruntersuchungen, Ausfallrate, charakteristische und mittlere Lebensdauer, Prinzip der kleinsten Quadrate, Ausgleichsfunktion.

- Kurzzusammenfassung

  Es soll aus gegebenen Versuchsdaten das Lebensdauergesetz für bestimmte Energiesparlampen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate ermittelt werden. Ausserdem sollen Betrachtungen über die Begriffe *Ausfallrate, charakterische Lebensdauer und mittlere Lebensdauer angestellt werden.*

- Lehrplanbezug **Angewandte Mathematik, 5.Jahrgang, alle Abteilungen**

Aufgabenstellung

In den Jahren 1991-1994 wurden an der HTL Saalfelden in Zusammenarbeit mit der Tauernkraftwerke AG und der Salzburger AG für Elektrizitätswirtschaft Vergleichsuntersuchungen an Beleuchtungskörpern durchgeführt. Dabei ging es in erster Linie um die Ermittlung von Lebensdauerdaten.
Es soll demonstriert werden, wie die Ermittlung der Lebensdauerverteilung eines bestimmten Lampentyps aus den Daten erfolgen kann.

a) Aus den angegebenen Daten ist (nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate) die passende Lebensdauerverteilung zu ermitteln. Vorgangsweise und Ergebnis sind entsprechend zu erklären bzw. zu kommentieren. Unter anderem soll die gefundene Verteilung in geeigneter Weise auch als Gerade dargestellt werden ("Lebensdauernetz").

b) Erklären Sie, was man unter der "Ausfallsrate" versteht und stellen Sie diese in Abhängigkeit von der Zeit für diesen Lampentyp dar (Interpretation der Kurve!).

c) Es sollen die Begriffe "mittlere Lebensdauer" und "charakteristische Lebensdauer" sowie ihr Zusammenhang (unabhängig vom obigen Beispiel; z.B. mit T=100) in Abhängigkeit von der Ausfallssteilheit ausführlich rechnerisch und graphisch erläutert werden.

Lebensdauerdaten von 70 Energiesparlampen $k := 18$ $i := 0..k-1$

k Anzahl der Datenpunkten (Klassen)

$N := 70$ Anzahl der untersuchten Lampen eines bestimmten Typs

t_i Zeitpunkte in Stunden

$überleb_i$ Anzahl der zu einem bestimmten Zeitpunkt noch funktionsfähigen Lampen

$t_i :=$	$überleb_i :=$
0	70
1000	70
2000	69
3000	67
4000	65
5000	63
6000	60
7000	55
8000	48
9000	41
10000	38
11000	32
12000	28
13000	25
14000	19
15000	14
16000	11
17000	7

Teil a) Ermittlung der Lebensdauerverteilung (Weibullverteilung)

$Rdach_i := \frac{überleb_i}{N}$

Vektor mit den beobachteten relativen Häufigkeiten an Lampen, welche einen Zeitraum t_i überleben.

$R(t, T, b) := e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit der zweiparametrigen Weibullverteilung
T ... charakteristische Lebensdauer
b ... Ausfallssteilheit

$n := \text{länge}(überleb)$ $n = 18$ Dimension des gegebenen Vektors

Ermittlung der passenden Werte b und T nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate:

sinnvolle Schätzwerte für den numerischen Lösungsblock $T := \frac{\max(t) + \min(t)}{2}$ $T = 8.5 \times 10^3$

$b := 1$ (Exponentialverteilung)

$F(T, b) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(Rdach_i - R(t_i, T, b)\right)^2$

Diese Zielfunktion soll ein Minimum werden
(Prinzip der kleinsten Quadrate)

Vorgabe

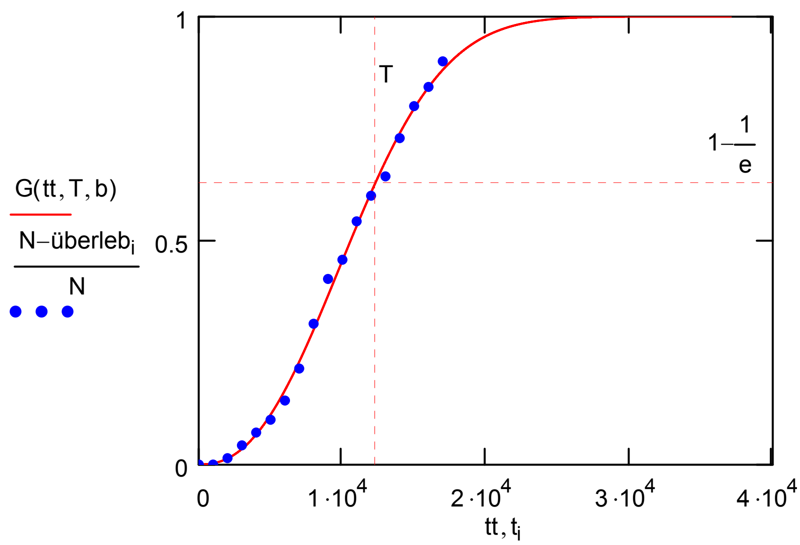
$F(T, b) = 0$

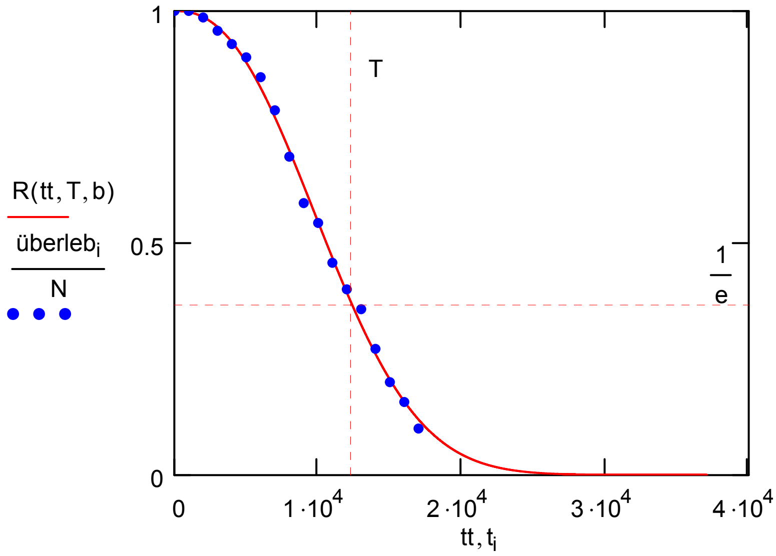
$\begin{pmatrix} T \\ b \end{pmatrix} := \text{Minfehl}(T, b)$ $\begin{pmatrix} T \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.235 \times 10^4 \\ 2.365 \end{pmatrix}$

Zeichnerischer Vergleoich zwischen den gemessenen Werten und der Ausgleichsfunktion (Weibullverteilung)

Verteilungsfunktion $G(t, T, b) := 1 - R(t, T, b)$ $tt := 0 .. 3 \cdot T$

Überlebenswahrschienlichkeit $R(t, T, b) := e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$





Darstellung im sogenannten Lebensdauernetz:

Dort soll die Weibullverteilung als Gerade dargestellt werden.

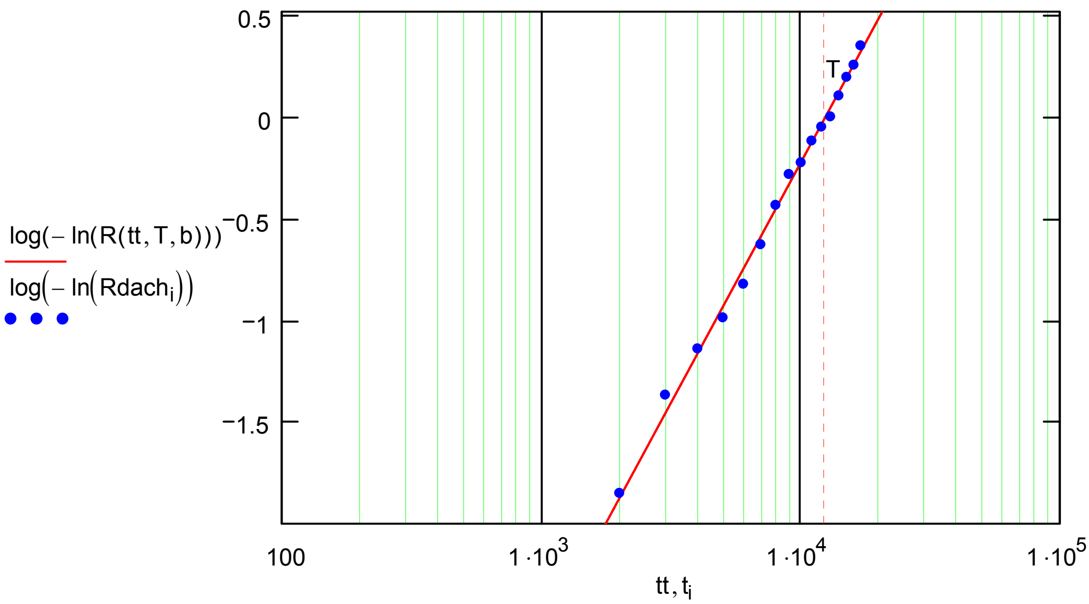
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Durch 2-maliges Logarithmieren wird R(t) zu einer "Geraden" gemacht

$$\ln(R(t)) = -\left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$\log(-\ln(R(t)) = -b \cdot \log(t) + b \cdot \log(T)$$

In einem entsprechend skalierten Lebensdauernetz ist dies eine Gerade mit Steigung b ("Ausfallssteilheit")



Teil b) Ausfallrate

Die Stichprobengröße, welche zur näherungsweisen Berechnung der Ausfallrate verwendet wird, heisst **Ausfallquote** und ist folgendermassen definiert:

$$\lambda_{dach}(t) = \frac{B(t_i) - B(t_{i+1})}{B(t_i)} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

Es wird also der Anteil der ausgefallenen Elemente bezogen auf den aktuellen Bestand $B(t_i)$ und den Beobachtungszeitraum Δt berechnet.

Durch Umformen erhält man:

$$\lambda_{dach}(t) = \frac{B(t_i) - B(t_{i+1})}{B(t_0)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{B(t_0)}{B(t_i)} = g_{dach}(t) \cdot \frac{1}{R(t_i)}$$

Für t gegen Unendlich und unter Berücksichtigung von $g(t) = \frac{d}{dt}G(t) = -\frac{d}{dt}R(t)$ erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}R(t) = -\lambda(t) \cdot R(t)$$

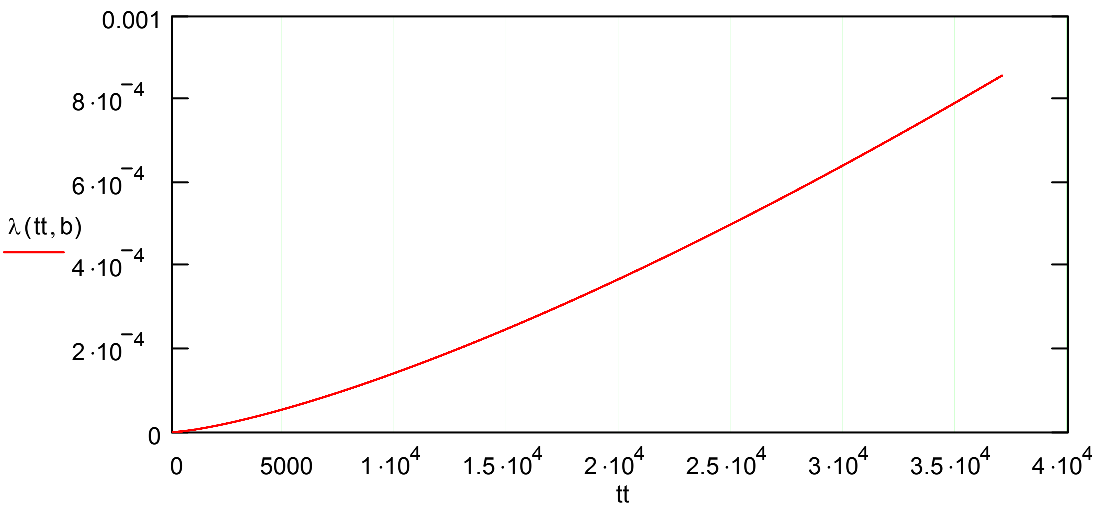
Daher kann man sagen: Die Ausfallrate $\lambda(t)$ ist der Proportionalitätsfaktor, mit der die Überlebenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zeit abnimmt. Ist $\lambda(t)$ = constant, so erhält man die Differentialgleichung, welche die Exponentialverteilung festlegt (Analogie zum radiokativen Zerfall!)

Hinweis: g(t) ... Dichtefunktion
G(t) ... Verteilungsfunktion
R(t) = 1-G(t) ... Überlebenswahrscheinlichkeit

Verlauf von λ(t) für unser Beispiel $b = 2.365$

Laut Formelsammlung gilt:

$$\lambda(t, b) := \frac{b}{T} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1}$$



Die obige Kurve zeigt, dass die Ausfallrate der Energiesparlampen mit der Zeit ZUNIMMT. Dieses Verhalten ist typisch für Produkte, welche einem Verschleiss in Abhängigkeit von der Zeit unterliegen. Dies ist wiederum typisch für Lebensdauerverteilungen mit einer Ausfallssteilheit b>1, welche typischerweise für Produkte in Phase III der sogenannten "Badewannenkurve für die Ausfallrate λ(t)" gilt.

Für b=1 (Fall der Exponentialverteilung) erhält man aus der obigen eine Funktionsgleicung für λ(t) einen konstanten Wert, wie man nachfolgend siieh:

$$\lambda(t,1) \rightarrow \left(\frac{1}{T}\right)$$

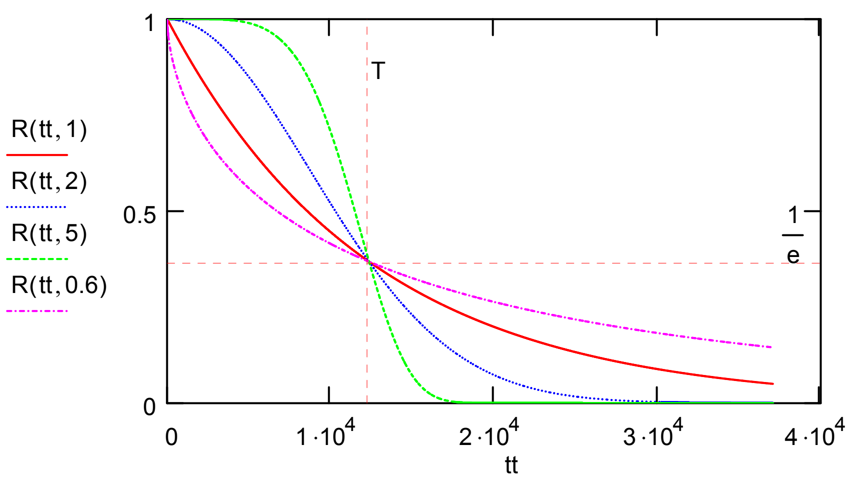
Teil c) Vergleich Erwartungswert (mittlere Lebensdauer) mit charakteristischer Lebensdaue

Die **charakteristische Lebensdauer T** ist jene Zeit, welche $\frac{1}{e} = 36.788\,\%$ der Lampen überleben. Dies erhält man, wenn man in der Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit t=T einsetzt:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad \text{wird zu} \quad R(T) = e^{-1}$$

Interessanter Weise hat - wie man sieht - die Ausfallssteilheit einen Wert, der UNABHÄNGIG von der Ausfallssteilheit b ist, wie man auch aus dem folgenden Diagramm sieht.

$$R(t,b) := e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$



Die **mittlere oder durchschnittliche Lebensdauer** hingegen entspricht dem ERWARTUNGSWERT der entsprechenden Weibullverteilung und wird daher folgendermassen berechnet:

$$G_{weibull}(t,T,b) := 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$g_{weibull}(t,T,b) := \frac{d}{dt}G_{weibull}(t,T,b) \qquad \mu(T,b) := \int_0^{\infty} t \cdot g_{weibull}(t,T,b)\, dt$$

Anschaulich entspricht die mittlere Lebensdauer dem Schwerpunkt der Abszisse der Dichtefunktion!

Die mittlere Lebensdauer μ und die charakteristische Lebensdauer T können über einen relativ kompliziert zu berechnenden Faktor a(b) miteinander in Beziehung gesetzt werden:

$\mu = a(b) \cdot T$

Der Faktor a(b) ist für b>1 (also für Elemente mit Verschleisserscheinungen = Phase III der Badewannenkurve) stets kleiner als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets kleiner als die charakteristische Lebensdauer.

Der Faktor a(b) ist b<1 (also für sogenannte "Frühausfälle" = Phase I der Badewannenkurve) stets größer als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets größer als die charakteristische Lebensdauer

Nur für den Fall b=1 (konstante Ausfallrate; Exponentialverteilung) ist mittlere Lebensdauer gleich der charakteristischen Lebensdauer.

Dies wird in den nachfolgenden Berechnungsbeispielen und der Grafik verifiziert:

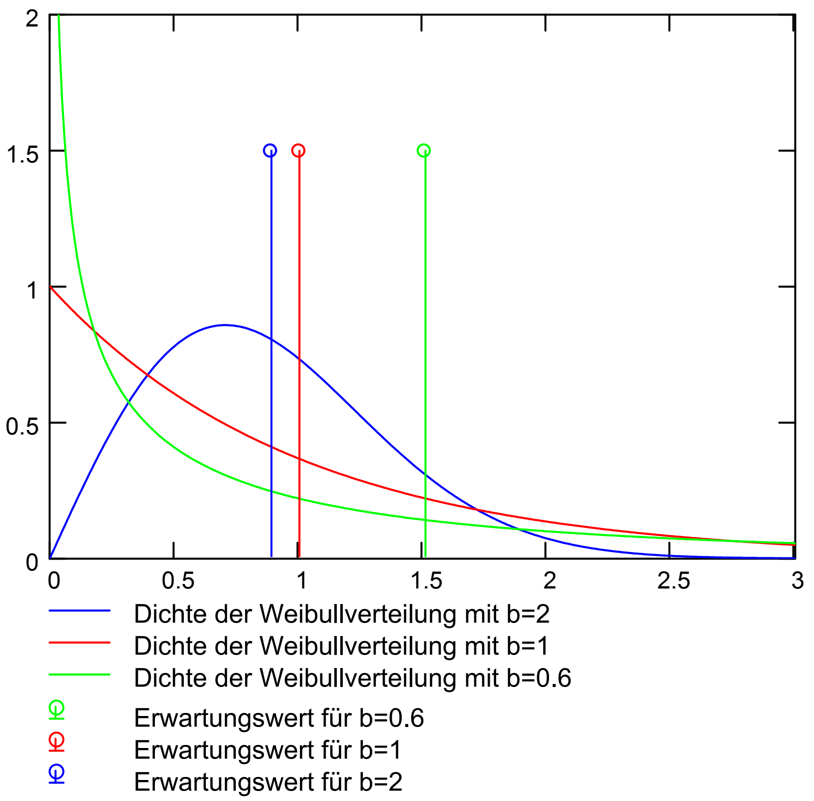
$a(T,b) := \frac{\mu(T,b)}{T}$ $\mu(1,1) = 1$ $\mu(1,1.5) = 0.903$ $\mu(1,0.8) = 1.133$

$\mu(1,2) = 0.886$ $\mu(1,0.5) = 2$

$\mu(1,3) = 0.893$

$\mu(1,5) = 0.918$

$tt := 0, \frac{1}{100} .. 3$



Auch eine entsprechende Animation ist auf der Basis dieser Berechnungen un der Grafik möglich.

Link zur Beispielsübersicht