Wilfried Rohm
wrohm@aon.at

Affine Abbildungen - Grundlagen der Computergrafik

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Affine Abbildungen, Lineare Abbildungen, Koordinatentransformationen, Matrizen, Determinanten

- Kurzzusammenfassung

  Affine Abbildungen sind eine Grundlage der Computergrafik. Hier sollen diese Grundlagen im 2-dimensionalen so dargestellt werden, wie sie im HTL-Unterricht als Beispiel zur Matrizenrechnung umgesetzt werden können. Daher stehen geometrische Anwendungen (Spiegelung, Streckung, Verzerrung, Drehung) und ihre formelmäßige Umsetzung im Vordergrund, auf tiefere mathematische Untersuchungen (z.B. Eigenvektoren) wird verzichtet.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Das beiliegende Arbeitsblatt wird von mir seit Jahren verwendet, um den Schülern ein Verständnis und Gefühl für die formelmäßige Umsetzung affiner Abbildungen zu geben. Die Ergebnisse bzw. weitergehende Überlegungen im 3-dimensionalen werden von den Schülern immer wieder gerne in EDV-Programmen (Grafikprogrammierung) umgesetzt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4.Jahrgang, alle Abteilungen
  "Lineare Algebra und analytische Geometrie: Matrizen (Operationen, Anwendungen), Determinanten.

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001 (wegen der Verwendung von Schiebereglern keine Vorgängerversionen)

- Literaturangaben:

  Brauch, Dreyer, Haacke: Mathematik für Ingenieure, Teubner-Verlag
  Luther, Ohsmann: Mathematische Grundlagen der Computergrafik, Vieweg Verlag.

Inhaltsübersicht

1. Einführung: Was ist eine affine Abbildung

2. Erklärung der Vorgangsweise - Ausprobieren

3. Beispiel Scherung in x-Richtung (Animation)

4. Beispiel Drehung (Animation)

5. Verknüpfungen von Abbildungen - Beispiel Drehstreckung

6. Allgemeines Simulationsmodell (Animation)

Technischer Hinweis: Die Animationen werden übersichtlicher, wenn die Regionen mit den Berechnungen ausgeblendet werden

1. Einführung: Was ist eine affine Abbildung

zur Inhaltsübersicht

Eine "Affine Abbildung" ist laut Lexikon (Schülerduden für Mathematik) "eine umkehrbare Abbildung der Ebene auf sich, die geradentreu ist, also Geraden wieder auf Geraden abbildet. Analog sind affine Abbildungen im Raum definiert ..."

Das Wort "affin" stammt au dem Lateinischen und bedeudet "angrenzend" bzw. "verwandt".

Mathematisch wird eine affine Abbildung meist durch folgende Matrizengleichung beschrieben:

$$\mathbf{x' = A*x + t}$$

x', x sind Vektoren im 2- oder 3-dimensionalen Raum (hier Beschränkung auf 2-dimensionale Vektoren)
A ist die Transformationsmatrix, für die gelten muß: $\det(A) \neq 0$, andernfalls wäre die Abbildung nicht umkehrbar.
t ist ein Verschiebungs- bzw. Translationsvektor .

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sowie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ und $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

erhält man daher folgende **Abbildungsgleichungen**:

$$x_1' = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + t_1$$
$$x_2' = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + t_2$$

Für die Determinante gilt: $\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Wird die Abbildung auf eine bestimmte Schar von Punkten (z.B. jene, die ein Dreieck oder Rechteck bilden) angewandt, so gilt:

det(A) > 0 : gleichsinnige Abbildung (z.B: Scherung)
det(A) < 0 : gegensinnige Abbildung (z.B. Spiegelung)

Ferner wird der Flächeninhalt der transformierten Figur mit det(A) multipliziert
Daher ergibt sich:
Ist det(A)=1, so ist die Abbildung flächentreu.

Typische affine Abbildungen sind

*** Verschiebungen (Translationen)**
*** Stauchungen und Streckungen (Maßstabsänderungen)**
*** Drehungen**
*** Scherungen**
*** Spiegelungen**
*** Drehstreckungen, Drehspiegelungen**
*** ....**

Computergrafiken werden in der Regel durch lineares Verbinden errechneter Punkte erzeugt, Zeichenprogramme bieten auf "Knopfdruck" Operationen wie Spiegeln, Drehen, etc. an. Die in diesem Artikel "affinen Abbildungen" sind daher als eines der grundlegenden Computergraphik - Verfahren anzusehen.

Im dreidimensionalen werden die hier besprochenen Verfahren grundsätzlich analog durchgeführt, es sei in diesem Zusammenhang aber auf die Literatur (s. Literaturverzeichnis) verwiesen.

2. Erklärung der Vorgangsweise - Ausprobieren

zur Inhaltsübersicht

Im folgenden Beispiel wird nun für ein Quadrat die Vorgangsweise verdeutlicht Die Transformationsmatrix A kann neben der Zeichnung (siehe weiter unten) verändert werden:

$P_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Das sind die 4 Punkte des Quadrates

$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad t := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ Das sind Transformationsmatrix und Translationsvektor

Die affine Abbildung wird nun auf jeden einzelnen Punkt angewendet. Die Punkte $Paff\_abb_1$ bis $Paff\_abb_4$ stellen (verbunden) das Quadrat **nach** der Affinen Abbildung dar.

Anmerkung: Aus rein technischen Gründen wurde die Bezeichnungsweise gegenüber dem Einführungsteil geändert.

$Paff\_abb_1 := A \cdot P_1 + t \qquad Paff\_abb_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Paff\_abb_2 := A \cdot P_2 + t \qquad Paff\_abb_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Paff\_abb_3 := A \cdot P_3 + t \qquad Paff\_abb_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Paff\_abb_4 := A \cdot P_4 + t \qquad Paff\_abb_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diese Vorgangsweise erscheint recht umständlich! Daher werden in der folgenden Variante diese Abbildungsgleichungen zu **einer** Abbildungsgleichung zusammengefasst, indem die Ausgangspunkte und transformierten Punkte jeweils zu einer Matrix zusammengefaßt werden

$Punkte := erweitern(P_1, P_2, P_3, P_4, P_1) \qquad Punkte = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Die 4 Punkte werden zur zeichnerischen Darstellung in eine Matrix zusammengefaßt. Der letzte Punkt muß wieder der erste sein, damit der Linienzug geschlossen gezeichnet wird

$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad t := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ $\quad T := erweitern(t, t, t, t, t)$

Die Transformationsmatrix und der Translationsvektor. Der Tranlationsvektor muß (wegen der anschließenden Addition) auf dieselbe Dimension wie die Punktematrix gebracht werden!

Für das Weitere gilt:

x und y sind die x bzw. y-Werte der Punkte der Ausgangsfigur (hier: des Quadrates)
x_1 und y_1 sind die x bzw. y-Werte der transformierten Punkte (d.h. nach der linearen Abbildung)

Die x und y Werte werden durch einen kleinen Trick aus den Matrizen extrahiert: Zuerst werden diese transponiert und anschließend die Spalten herauskopiert. Dies ist notwendig, weil Zeilen nicht direkt aus einer Matrix herausgelesen werden können!

$x := \left(Punkte^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y := \left(Punkte^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

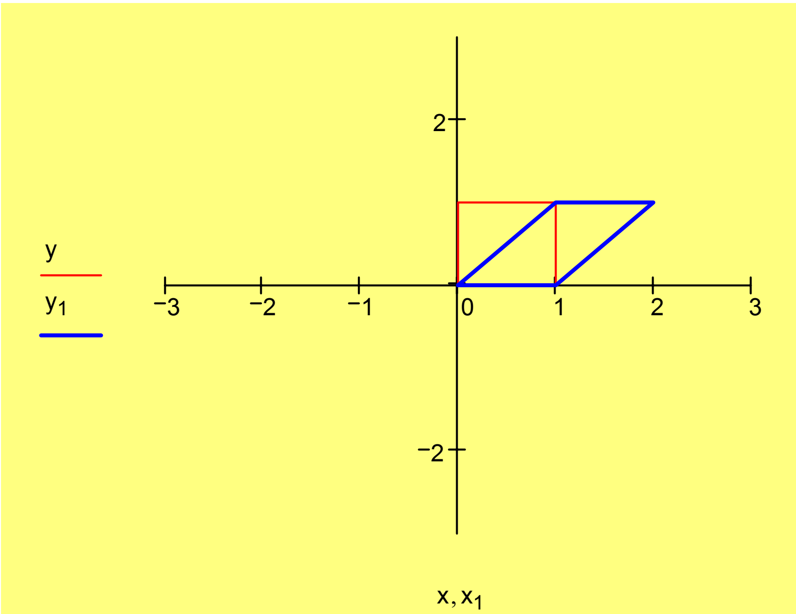
$Aff\_Abb := A \cdot Punkte + T$ $\quad Aff\_Abb = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 := \left(Aff\_Abb^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y_1 := \left(Aff\_Abb^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ $\quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun kann frei experimentiert werden:

Neben der folgenden Abbildung können Transformationsmatrix und Translationsvektor(blaue Felder) eingegeben bzw. verändert werden. Man kann versuchen, durch systematisches Verändern den Einfluß der Faktoren zu erahnen bzw. etwas durchschauen zu können. Man beachte auch die bereits in Abschnitt 1 angegebene Bedeutung der Determinante det(A)=|A|.

Techn. Hinweis:: Die Diagrammgrenzen wurden fixiert und müssen gegebenenfalls verändert werden.



Eingabe der Transformations--matrix A:

Eingabe des Translations-vektors

$a_{11} \equiv 1$ $\quad a_{12} \equiv 1$ $\quad t_1 \equiv 0$

$a_{21} \equiv 0$ $\quad a_{22} \equiv 1$ $\quad t_2 \equiv 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1$

Nun wird ein Durcharbeiten des Arbeitsblattes (**ro_Arbeitsblatt.pdf**) empfohlen. Gegebenenfalls kann diese Zeichnung durch Veränderung der Parameter bei der Lösungssuche helfen.

In den weiteren Abschnitten werden einige spezielle affine Abbildungen untersucht und veranschaulicht.

3. Beispiel Scherung in x-Richtung

zur Inhaltsübersicht

Für eine **Scherung in x-Richtung** wird NUR der x-Wert verändert, wobei der Flächeninhalt gleich bleibt. Das bedeutet - wie schon erwähnt - dass die Determinante 1 sein muß. Aus diesen Überlegungen ergibt sich (im Vergleich mit den Abbildungsgleichungen, s.oben) die folgende Transformationsmatrix

$$A(v) := \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v.... Scherungsfaktor (keine Scherung, also identische Abbildung für v=0)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A(v) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$V :=$

$$v := \frac{V}{20}$$

$v = 1.2$

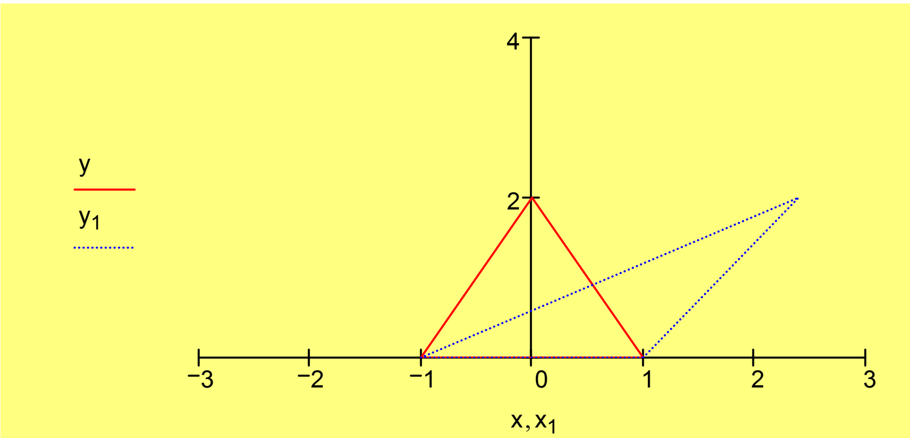
Nun soll diese Scherung am Beispiel eines Dreiecks dargestellt und interaktiv mittels des Schiebereglers verändert werden können (**Hinweis: Schieberegler einfügen über Einfügen / Komponente / Steuerelement Slider**)

$P1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Punkte := erweitern(P1, P2, P3, P1)$ Das Dreieck

$aff(Punkte, v) := A(v) \cdot Punkte$ $aff\_abb := aff(Punkte, v)$ Die Punkte nach der affinen Abbildung

$x := \left(Punkte^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $y := \left(Punkte^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ Extrahieren der x- und y- Werte des Dreieckes

$x_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $y_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ Extrahieren der x- und y- Werte des Dreieckes nach der affinene Abbildung



$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Beispiel Drehung

zur Inhaltsübersicht

Die Transformationsmatrix für die Drehung um einen Winkel ϕ ergibt sich aus elementargeometrischen Überlegungen mit Hilfe der Summensätze (siehe **ro_Arbeitsblatt.pdf**).
Ein Dreieck soll zunächst um einen bestimmten Winkel ϕ gedreht und anschließend mit Hilfe des Translationsvektors t verschoben (translatiert) werden. Zunächst wird das Prinzip wieder Schritt für Schritt erklärt und anschließend eine Animation durchgeführt.

$winkel := 45Grad \quad t := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eingabe der gewünschten Werte

$Drehmatrix(\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ Drehmatrix

$A := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \; B := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \; C := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $Punkte := erweitern(A, B, C, A)$ Das Dreieck

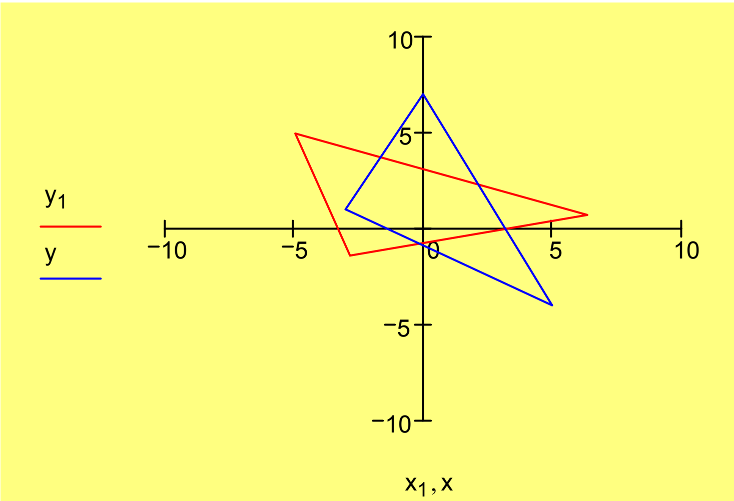
$T := erweitern(t, t, t, t)$ Der Translationsvektor, der wiederum auf dieselbe Dimension wie die Punktematrix gebracht wurde

$aff(Punkte, \phi) := Drehmatrix(\phi) \cdot Punkte + T$

$aff\_abb := aff(Punkte, winkel)$ Die Punkte nach der affinen Abbildung

$x := \left(Punkte^T\right)^{\langle 0 \rangle} \quad y := \left(Punkte^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ Extrahieren der x- und y-Werte des Dreieckes

$x_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 0 \rangle} \quad y_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ Extrahieren der x- und y-Werte nach der affinen Abbildung



$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} -2.828 \\ 6.364 \\ -4.95 \\ -2.828 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} -1.414 \\ 0.707 \\ 4.95 \\ -1.414 \end{pmatrix}$

Nun soll eine **Animation** erstellt werden:

FRAME von 0 bis 72 ermöglicht eine Animation mit einer vollen Umdrehung (bei einer Schrittweite von 5 Grad)

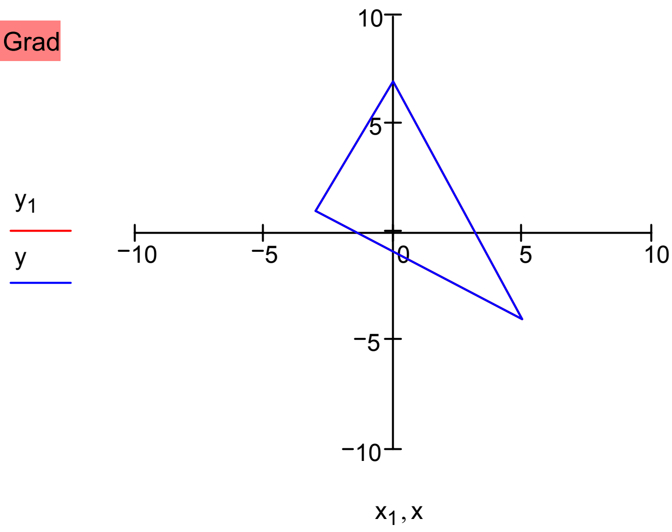
$winkel := FRAME \cdot 5Grad$ $\quad t := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T := erweitern(t, t, t, t)$ $\quad FRAME = 0$

$aff(Punkte, winkel) := Drehmatrix(winkel) \cdot Punkte + T$

$aff\_abb := aff(Punkte, winkel)$

$x_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y_1 := \left(aff\_abb^T\right)^{\langle 1 \rangle}$

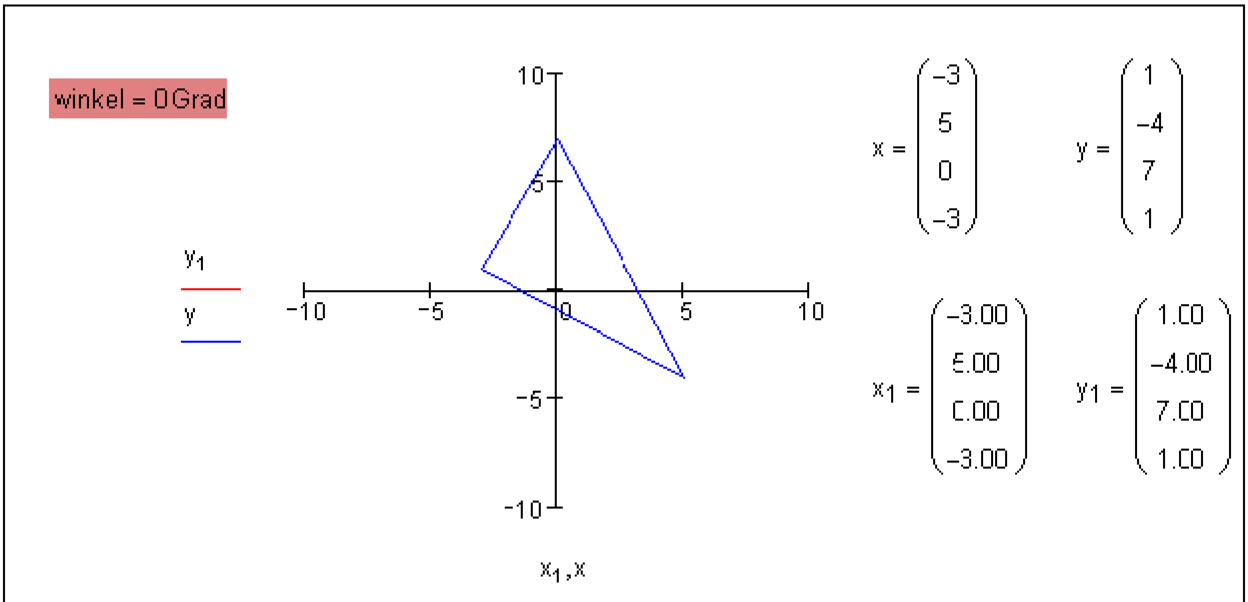
$winkel = 0\,Grad$



$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 5.00 \\ 0.00 \\ -3.00 \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -4.00 \\ 7.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

Die fertige Animation schaut beispielsweise folgendermaßen aus (Zum Ablauf anklicken; erforderlich ist, dass der AVI-File im selben Verzeichnis wie die Mathcad-Datei steht!)):



ro_drehung_Videoclip

5. Verknüpfung von Abbildungen - Beispiel Drehstreckung

zur Inhaltsübersicht

Wie werden Abbildungen verknüpft? Dies sei zunächst am Beispiel einer **Punktspiegelung am Ursprung** demonstriert.

Es sei $P := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da x- und y-Wert negativ genommen werden müssen, lautet die Transformationsmatrix für die Punktspiegelung :

$$A_{punktsp} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{punktsp} := A_{punktsp} \cdot P \qquad P_{punktsp} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass man die Punktspiegelungsmatrix auch erhält, wenn man hintereinander eine Spiegelung um die x-Achse und anschließend um die y-Achse durchführt. Dies entspricht der Multiplikation der beiden Transformationsmatrizen:

$$A_{Sx} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{Sy} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{punktsp} := A_{Sx} \cdot A_{Sy}$$

$$A_{punktsp} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Übereinstimmung der beiden Matrizen bestätigt die Richtigkeit unserer Überlegungen.
Diese Überlegungen werden nun auf den komplizierteren Fall der Drehstreckung angewendet. Die Drehstreckung wird also durch Multiplikation 2-er Matrizen verwirklicht:

$$\mathrm{Drehmatrix}(\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Streckmatrix}(k) := \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Drehstreckung}(\phi, k) := \mathrm{Drehmatrix}(\phi) \cdot \mathrm{Streckmatrix}(k) \qquad \mathrm{Drehstreckung}(\phi, k) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cdot k & -\sin(\phi) \cdot k \\ \sin(\phi) \cdot k & \cos(\phi) \cdot k \end{pmatrix}$$

Demonstration an einem Dreieck

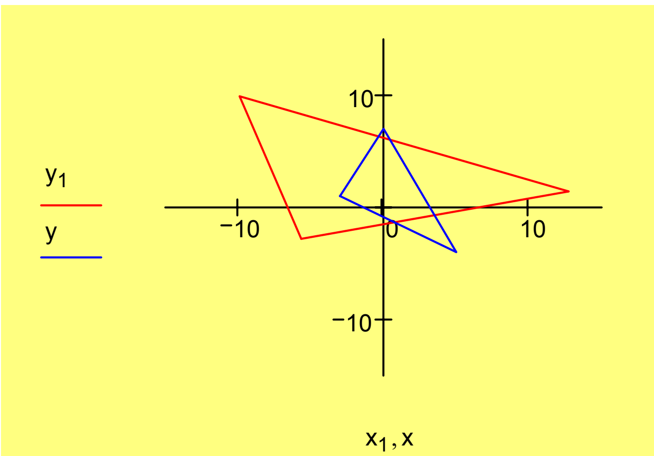
$$\mathrm{winkel} := 45\mathrm{Grad} \qquad k := 2$$

$$A := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Punkte} := \mathrm{erweitern}(A, B, C, A)$$

$$\mathrm{aff}(\mathrm{Punkte}, \phi) := \mathrm{Drehmatrix}(\phi) \cdot \mathrm{Streckmatrix}(k) \cdot \mathrm{Punkte}$$

$$\mathrm{aff\_abb} := \mathrm{aff}(\mathrm{Punkte}, \mathrm{winkel})$$

$$x := \left(\mathrm{Punkte}^T\right)^{\langle 0 \rangle} \qquad y := \left(\mathrm{Punkte}^T\right)^{\langle 1 \rangle} \qquad x_1 := \left(\mathrm{aff\_abb}^T\right)^{\langle 0 \rangle} \qquad y_1 := \left(\mathrm{aff\_abb}^T\right)^{\langle 1 \rangle}$$



$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -5.657 \\ 12.728 \\ -9.899 \\ -5.657 \end{pmatrix} \qquad y_1 = \begin{pmatrix} -2.828 \\ 1.414 \\ 9.899 \\ -2.828 \end{pmatrix}$$

6. Allgemeines Simulationsmodell

zur Inhaltsübersicht

Abschließend wird ein Simulationsmodell nach dem bisherigen Schema erstellt, in dem aber nun alle Werte der Transformationsmatrix per Schieberegler verändert werden können. Dies ermöglicht auf spielerische Weise ein Erkunden der vielen Möglichkeiten. Es erscheint aber sinnvoll, eine etwas kompliziertere Figur zu verwenden, damit die Transformationen besser sichtbar werden.

$P1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P4 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P5 := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.3 \end{pmatrix}$

$\text{Punkte} := \text{erweitern}(P1, P2, P3, P4, P1, P5, P2, P6, P3)$

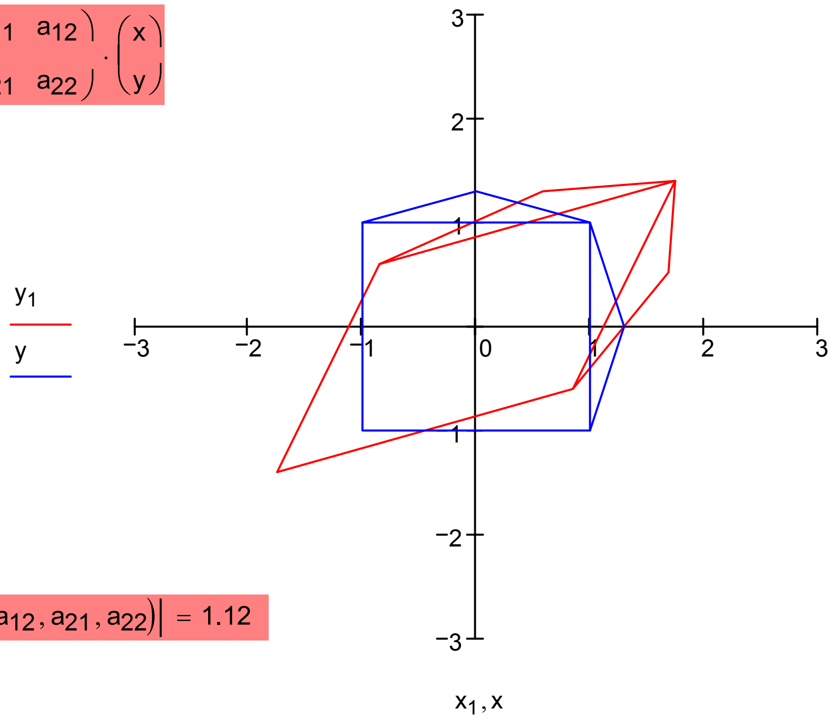
$A11 :=$ $a_{11} := \frac{A11}{20}$ $a_{11} = 1.3$

$A12 :=$ $a_{12} := \frac{A12}{20}$ $a_{12} = 0.45$

$A21 :=$ $a_{21} := \frac{A21}{20}$ $a_{21} = 0.4$

$A22 :=$ $a_{22} := \frac{A22}{20}$ $a_{22} = 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$|A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})| = 1.12$