Wilfried Rohm

Zinssatz - Berechnung - Lösen von Gleichungen

In einem Werbeprospekt wird eine Eigentumswohnung folgendermaßen angeboten:
Barzahlung : 103.000 €
Teilzahlung: Anzahlung 15.000 € und 15 Jahre lang jährlich 7.999 € (nachschüssig)

Wieviel beträgt der (jährliche) Zinssatz ?

Diese Aufgabe soll lediglich zeigen, welche Möglichkeiten in Mathcad bestehen, Gleichungen numerisch zu lösen.
Die Aufgabe läuft darauf hinaus, die folgende Gleichung nach q aufzulösen:

$$103000 = 15000 + \frac{7999 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1}}{q^{15}}$$

Da es sich dabei um eine Gleichung 15.Grades handelt, ist zu vermuten, dass keine symbolische Lösung existiert. Trotzdem versuchen wir (später), die Gleichung symbolisch zu lösen.
Zunächst versuchen wir aber einige numerische Vorgangsweisen:

Variante 1: Numerische Lösung mit dem Gleichungsblock vorgabe-suchen (given - find)

$q := 1$ Festlegung des Startwertes zur numerischen Lösungssuche mit Hilfe des Lösungsblockes VORGABE - SUCHEN

Vorgabe

$$103000 = 15000 + \frac{7999 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1}}{q^{15}}$$

$q_{eff} := \text{Suchen}(q)$ $q_{eff} = 1.04152$ **Der Zinssatz beträgt daher circa 4%**

Mit dem Anklicken des Schlüsselwortes "Suchen" mit der rechten Maustaste erhält man ein Kontextmenü, das auch eine Wahlmöglichkeit hinsichtlich des numerischen Lösungfsverfahrens zulässt!

Die gleiche Vorgangsweise wie oben soll noch etwas allgemeiner angeschrieben werden:

$q := q$

$B := 103000$ Barwert

$A := 15000$ Anzahlung

$$103000 = 15000 + \frac{7999 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1}}{q^{15}}$$

$R := 7999$ gleichbleibende Ratenzahlung

Zunächst erfolgt die Berechnung des Endwertes der Ratenzahlungen in Abhängigkeit von q und der Anzahl der Jahre (n)

$n := 15$ $E(n, q) := R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$q := 1$ nummerischer Lösungsblock wie oben

Vorgabe

$$B = A + \frac{E(n,q)}{q^n}$$ Gleichsetzen der Barwerte

$q_{eff} := \text{Suchen}(q)$ $q_{eff} = 1.042$ **Der Zinssatz beträgt daher circa 4%**

Variante 2: Numerische Lösung mit der Wurzelfunktion (root)

Statt des Lösungsblockes vorgabe-suchen hätten wir aber auch mit der "wurzel"-Funktion (engl. "root") arbeiten können, welche die Nullstelle des angegebenen Terms ermittelt.

Diese Funktion kann auf 2 Arten verwendet werden:

a) Berechnung der Lösung mit Hilfe eines gegebenen Startwertes zur Lösungssuche (so wie beim obigen Lösungsblock vorgabe-suchen)

$q := 1$

$$q_{eff} := \text{wurzel}\left(B - A - \frac{E(n,q)}{q^n}, q\right)$$ $q_{eff} = 1.042$

b) In der folgenden Variante wird kein Startwert verwendet, die Lösung soll aber im angegebenen Intervall (1,01 - 1,08) gesucht werden

$$q_{eff} := \text{wurzel}\left(B - A - \frac{E(n,z)}{z^n}, z, 1.01, 1.08\right)$$ $q_{eff} = 1.042$

Hinweis : *Mathcad überprüft die Funktionswerte der Randpunkte auf unterschiedliche Vorzeichen (dann muss ja bei einer stetigen Funktion eine Nuklkstelle im Intervall vorkommen) - ist diese Bedngung nicht erfüllt, gibt es eine Fehlermeldung; dies kann man sich im obigen Beispiel ansehen, wenn man statt 1.01 als untere Grenze den Wert 1,0 setzt*

Variante 3: Versuch einer symbolischen Lösung der Gleichung

Könnten wir auch die Möglichkeiten nutzen, welche uns Mathcad für die symbolische Lösung einer Gleichung zur Verfügung stellt ??

$q := q$ Hier wird zunächst die nummerische Definition von q für symbolische Rechnungen "überschrieben". Der nummerische Wert bleibt allerdings erhalten

Erstaunlicherweise gelingt das hier tatsächlich, wie unten gezeigt wird!

Im Programm ist offenbar ein (numerischer!) Algorithmus zum Aufsuchen aller Lösungen einer Polynomgleichung n-ten Grades eingebaut! Von den 15 Lösungen kann aber nur eine die "unsere" sein - alle anderen sind komplex!

Hinweis: Mathcad 14 hat leider (im Gegensatz zu Mathcad 11) neben der richtigen Lösung 1.04 (ganz unten im Vektor zu finden!) und den 14 komplexen Lösungen auch noch eine falsche "Lösung" dabei (q=1)

$$103000 = 15000 + \frac{7999 \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1}}{q^{15}} \text{ auflösen}, q \rightarrow \begin{pmatrix} -.79974667685340253884 - .16514221797788918659 \cdot \\ -.79974667685340253884 + .16514221797788918659 \cdot \\ -.67069025194978813220 - .46970400101914247656 \cdot \\ -.67069025194978813220 + .46970400101914247656 \cdot \\ -.43203238512205153544 - .70095137263693848939 \cdot \\ -.43203238512205153544 + .70095137263693848939 \cdot \\ -.11964405226314356811 - .82223629760214661693 \cdot \\ -.11964405226314356811 + .82223629760214661693 \cdot \\ .21987993865371525418 - .81315097356511660585 \cdot i \\ .21987993865371525418 + .81315097356511660585 \cdot i \\ .53702343135506622050 - .67191641097869337185 \cdot i \\ .53702343135506622050 + .67191641097869337185 \cdot i \\ .78990037892434945462 - .41283815652438460742 \cdot i \\ .78990037892434945462 + .41283815652438460742 \cdot i \\ 1.0415169617832369633 \end{pmatrix}$$

Auch so wäre (allerdings hier nicht so übersichtlich) die Lösung möglich gewesen:

Vorgabe

$$103000 = 15000 + \frac{7999 \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1}}{q^{15}}$$

Suchen(q) → (−.79974667685340253884 − .16514221797788918659 · i   −.79974667685340253884 + .1651

Allerdings findet das Programm im Allgemeinen keine symbolische Lösung, wenn die Lösungen einer symbolisch nicht lösbaren Gleichung gesucht sind. Dann muss man auf numerische Lösungen überwechseln.

symbolische Lösung gemäß der obigen allgemeineren Definitionen

$$B = A + \frac{E(n,q)}{q^n} \text{ auflösen}, q \rightarrow \begin{pmatrix} -.79974667685340253884 - .16514221797788918659 \cdot i \\ -.79974667685340253884 + .16514221797788918659 \cdot i \\ -.67069025194978813220 - .46970400101914247656 \cdot i \\ -.67069025194978813220 + .46970400101914247656 \cdot i \\ -.43203238512205153544 - .70095137263693848939 \cdot i \\ -.43203238512205153544 + .70095137263693848939 \cdot i \\ -.11964405226314356811 - .82223629760214661693 \cdot i \\ -.11964405226314356811 + .82223629760214661693 \cdot i \\ .21987993865371525418 - .81315097356511660585 \cdot i \\ .21987993865371525418 + .81315097356511660585 \cdot i \\ .53702343135506622050 - .67191641097869337185 \cdot i \\ .53702343135506622050 + .67191641097869337185 \cdot i \\ .78990037892434945462 - .41283815652438460742 \cdot i \\ .78990037892434945462 + .41283815652438460742 \cdot i \\ 1.0415169617832369633 \end{pmatrix}$$

- **Zurück zur Beispielübersicht "Wirtschaftsmathematik"**