



Wilfried Rohm

wilfried.rohm@schule.at

Z-Transformation: Einführung und Beispiele



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Z-Transformation, Differenzgleichungen, Dirac-Impuls, Übertragungsfunktionen, Stabilitätsanalyse
- **Kurzzusammenfassung**
Die Z-Tranformation gewinnt als "diskretes Analagon" der Laplacetransformation auch im Schulunterricht im Bereich der Regelungstechnik immer mehr an Bedeutung (natürlich vorwiegend bei Verwendung entsprechender Software). Dieser Artikel soll sowohl vom mathematischen Gesichtspunkt als auch vom technischen Standpunkt eine Einführung in dieses Gebiet bieten.
- **Didaktische Überlegungen**
Der Artikel eignet sich gemäß meiner eigenen Erfahrung auch gut als Grundlage für die selbständige Erarbeitung der Z-Transformation durch interessierte Schüler. Die Beispiele 4 und 5 dieses Artikels stammen teilweise von Schülern, welche im Rahmen von Projektarbeiten im Mathematikunterricht ihre Erfahrungen aus der Fachtheorie mit Mathcad umgesetzt haben.
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
Angewandte Mathematik, 4./5.Jahrgang, elektrotechnische Abteilungen
- **Mathcad-Version:**
Mathcad 15
Zu beachten: Bei der symbolischen z-Transfromation verhält sich die Version 15 etwa im Vergleich zur Version 11 teilweise "sehr seltsam". Die Version 11 arbeitet hier wesentlich besser. Siehe der gleiche Beitrag in der Version 11.
- **Literaturangaben:**
Wolfgang Preuß: Funktionaltransformationen (Fourier-,Laplace- und Z-Transformation) , Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2002.



Übersicht:

Der Artikel besteht aus folgenden Unterpunkten, welche unten jeweils in "Regionen" untergebracht sind:

- **Einführung und Übersicht**
- **Defintion und Rechenregeln**
- **Beispiel 1: Berechnung digitaler Antwortfunktionen**
- **Beispiel 2: Sprungantwort bei gegebener Übertragungsfunktion**
- **Beispiel 3: Modellbildung**
- **Beispiel 4: z-Transformation eines I-Reglers**
- **Beispiel 5: Stabilitätsanalyse in der z-Ebene**

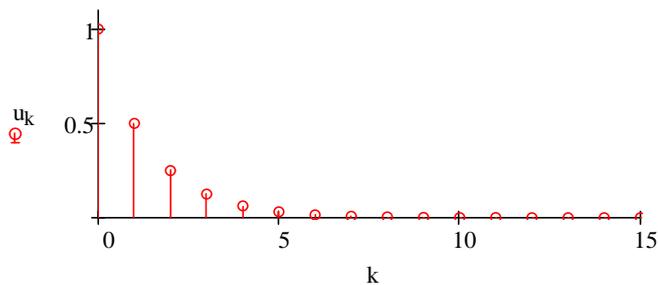
☑ Einführung und Übersicht

Die z-Transformation vereinfacht ähnlich wie die Laplace-Transformation Berechnungen mit digitalen linearen Übertragungsgliedern. Die z-Transformation transformiert dabei **DISKRETE** Funktionen (**Abtastwerte**) f_k mit $k=0,1,2,\dots$ - die unabhängige Variable ist der Index k .

Damit sind die Zeitpunkte $t_k = k \cdot T$ festgelegt ($T \dots$ konstantes Zeitintervall).

Bei der Laplace-Transformation hingegen wird eine kontinuierliche Funktion transformiert. Die z-Transformation kann daher als "diskrete Laplacetransformation" aufgefasst werden.

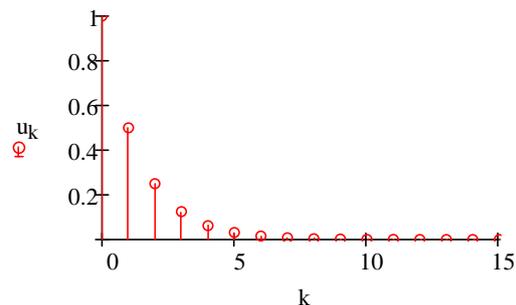
Beispiel $k := 0..15$ $u_k := 2^{-k}$



Häufig werden die Werte **REKURSIV** definiert, z.B.:

$k := 0..15$ $u_0 := 1$ $u_{k+1} := \frac{1}{2} \cdot u_k$

Dies liefert natürlich die gleichen Werte wie oben!



Mit Hilfe der z-Transformation lassen sich auf übersichtliche Weise folgende Probleme lösen:

* Lösung linearer **DIFFERENZENGLEICHUNGEN** mit konstanten Koeffizienten. Damit kann die Antwortfunktion **DIGITALER linearer Übertragungsglieder** (LRC-Glieder) auf gegebene **DIGITALE Eingangssignalverläufe** berechnet werden (z.B. Sprungantwort) - siehe Beispiele 1 und 2.

* **Verknüpfung mehrerer digitaler LRC-Glieder (im Bildbereich)** und damit (gegenüber dem Zeitbereich) einfachere Gewinnung der diese Glieder charakterisierenden Differenzgleichungen. (*mathematische Modellbildung*) - siehe Beispiel

Ein Vergleich zur Laplace-Transformation. Diese ermöglicht die Lösung folgender Probleme:

* Lösung linearer **DIFFERENTIALGLEICHUNGEN** mit konstanten Koeffizienten. Damit kann die Antwortfunktion **ANALOGER linearer Übertragungsglieder** (LRC-Glieder) auf gegebene **ANALOGUE Eingangssignalverläufe** berechnet werden. (z.B: Sprungantwort)

* Verknüpfung mehrerer analoger LRC-Glieder (im Bildbereich) und damit (gegenüber dem Zeitbereich) einfachere Gewinnung der diese Glieder charakterisierenden Differentialgleichungen (*mathematische Modellbildung*)

In der Regelungstechnik interessieren hauptsächlich Einschaltvorgänge, daher wird der Einschaltzeitpunkt mit $k=0$ festgelegt. Ähnlich wie bei der Laplace-Transf. geht man dann davon aus, dass $f_k = 0$ gilt für $k < 0$.

☑ Einführung und Übersicht

Definition und Rechenregeln

Definition der Z-Transformation

Die Definition zur z-Transformation ergibt sich aus der verallgemeinerten Laplace-Transformation zu

$$F(z) = Z(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k \cdot z^{-k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cdot \frac{1}{z^k} \right) \quad \text{mit} \quad z = e^{T \cdot s}$$

Begründung Tastet man ein kontinuierliches Signal durch ein Abtastglied mit einer gewissen Abtatsperiode T ab, so erhält man ein diskretes Signal

$$f_k(k \cdot T) = f(k \cdot T)$$

Man kann das **abgetastete Signal als Folge von Dirac-Impulsen** darstellen (**Ausblendeigenschaft**, siehe zum Beispiel das Lehrbuch von Timischl-Kaiser, Band 4)

$$f_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (f(k \cdot T) \cdot \delta(t - k \cdot T)) \quad \text{diskretes Signal}$$

Nun wird darauf die Laplace-Transformation angewandt:

$$F_k(s) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f(k \cdot T) \cdot \delta(t - k \cdot T) \cdot e^{-st}) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k \cdot e^{-kT \cdot s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cdot \frac{1}{e^{kT \cdot s}} \right)$$

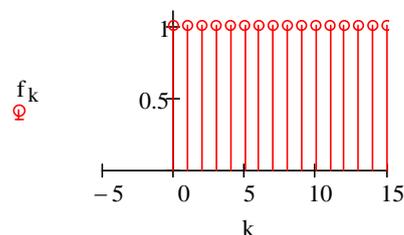
Dabei wurde verwendet, dass der Dirac-Impuls zu den Abtastzeitpunkten $k \cdot T$ unendlich groß ist, seine Impulsdauer geht aber gegen 0, die Integration liefert die Fläche 1. Die Auswertung des Integrals ergibt daher nur für die Abtastzeitpunkte $k \cdot T$ die Werte $f_k \cdot e^{-kT \cdot s}$, die zu einer Summe zusammengefasst werden.

Ersetzt man in dieser Formel die komplexe Exponentialform $e^{T \cdot s}$ durch die komplexe Variable z , so ergibt sich die Transformationsformel der z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cdot \frac{1}{z^k} \right)$$

Beispiel : z-Transformierte der Einheitssprungfolge $f_k := 1$

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{if } k < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$F(z) = Z(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 \cdot z^{-k}) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

geometrische Reihe!!
Konvergenz für $|z| > 1$
(Konvergenzbereich in der komplexen Ebene)

Daher ist

$$\frac{z}{z - 1}$$

die z-Transformierte des Einheitssprunges (siehe Tabellen!)

In MATHCAD ist die Einheitssprungfunktion durch $\Phi(t)$ definiert, auch die Z-Transformation ist möglich

$$1 \text{ ztrans, } t \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{z}{z-1} \text{ invztrans, } z \rightarrow 1$$

1 sollte eigentlich $\Phi(t)$ sein, der Rechner setzt aber offenbar von vornherein die Funktionswerte gleich 0 für $t < 0$

$$\Phi(t) \text{ ztrans, } t \rightarrow \frac{z+1}{2 \cdot (z-1)}$$

In der Version 11 liefert dieser Befehl ebenfalls $\frac{z}{z-1}$, warum das in der Version 15 anders ausfällt, weiss ich nicht wirklich !!??.

Hinweis : Die inverse z-Transformation ist über ein kompliziertes (komplexes) Integral definiert und wird von uns daher Tabellen oder Computeralgebrasystemen entnommen!

Die wichtigsten Rechenregeln der Z-Transformation (welche hier Verwendung finden)

Zeitbereich	Bildbereich	Bezeichnung
$c_1 \cdot f_{1,k} + c_2 \cdot f_{2,k}$	$c_1 \cdot F_1(z) + c_2 \cdot F_2(z)$	Linearität (c_1, c_2 konst.)
f_{k-1}	$z^{-1}F(z) + f_{-1}$	Rechtsverschiebung um 1 Schritt
f_{k-2}	$z^{-2}F(z) + f_{-1} \cdot z^{-1} + f_{-2}$	um 2 Schritte
f_0	$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	Anfangswertsatz
$f_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$	$f_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) \cdot F(z)$	Endwertsatz
f_{k+1}	$zF(z) + f_0 \cdot z$	Linkssverschiebung um 1 Schritt
f_{k+2}	$z^2F(z) + z \cdot f_0 - f_{-1}z$	um 2 Schritte

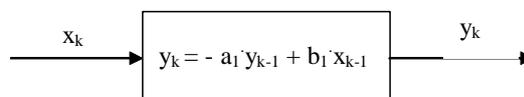
▢ Definition und Rechenregeln

▣ Beispiel 1: Berechnung digitaler Antwortfunktionen

Beispiel 1: Anwendung der z-Transformation: Berechnung von digitalen Antwortfunktionen

Gegeben sei das digitale Übertragungsglied mit folgender Differenzgleichung

$$y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} + b_1 \cdot x_{k-1} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } y_{-1}$$



Gesucht ist die Sprungantwort, d.h. die Antwortfunktion y_k für $k \geq 0$ bei sprunghöförmiger Eingangsgröße $x_k = u_0 \cdot \sigma_k$;

also: $x_k = u_0 \cdot 1^k = u_0$ für $k=0,1,2,\dots$ und 0 für $k < 0$.

Schritt 1: z-Transformation der Differenzgleichung

Aus $y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} + b_1 \cdot x_{k-1}$

wird : $y(z) = Z(y_k) = -a_1 \cdot (z^{-1} \cdot y(z) + y_{-1}) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot x(z)$

dabei wurde die Rechtsverschiebungsregel von oben verwendet

Damit erhält man im Bildbereich $f_{k-1} = z^{-1} \cdot F(z) + f_{-1}$

$$y(z) = -a_1 \cdot \left(z^{-1} \cdot y(z) + y_{-1} \right) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot x(z) \text{ auflösen, } y(z) \rightarrow \frac{b_1 \cdot x(z) - a_1 \cdot z \cdot y_{-1}}{a_1 + z}$$

$$y(z) = -a_1 \cdot \left(z^{-1} \cdot y(z) + y_{-1} \right) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot x(z) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } y(z) \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow \frac{b_1 \cdot x(z)}{a_1 + z} - \frac{a_1 \cdot z \cdot y_{-1}}{a_1 + z}$$

Etwas "freundlicher" angeschrieben

$$y(z) = \frac{-a_1 \cdot z}{z + a_1} \cdot y_{-1} + \frac{1}{z + a_1} \cdot b_1 \cdot x(z)$$

Für $y_{-1} = 0$ (Anfangsbedingung), erhält man:

$$y(z) = G_R(z) \cdot x(z) = \frac{b_1}{z + a_1} \cdot x(z)$$

wobei $G_R(z)$ die z-Übertragungsfunktion des Reglers ist

Schritt 2: Transformation der digitalen Eingangsfunktion (hier: Sprungfunktion)

$k := k$

$$x(z) := u_0 \cdot 1 \text{ ztrans, } k \rightarrow \frac{u_0 \cdot z}{z - 1}$$

$$\text{bzw. } u_0 \cdot \Phi(k) \text{ ztrans, } k \rightarrow \frac{u_0 \cdot (z + 1)}{2 \cdot (z - 1)}$$

wird wieder in der Version 15 falsch berechnet!

Jedenfalls :

$$x(z) = u_0 \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Schritt 3: Lösung im Bildbereich und deren Rücktransformation

$$y(z) = \frac{-a_1 \cdot z}{z + a_1} \cdot y_{-1} + \frac{1}{z + a_1} \cdot b_1 \cdot \left(u_0 \cdot \frac{z}{z - 1} \right)$$

Lösung im Bildbereich

$$\frac{-a_1 \cdot z}{z + a_1} \cdot y_{-1} + \frac{1}{z + a_1} \cdot b_1 \cdot \left(u_0 \cdot \frac{z}{z - 1} \right) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{a_1^2 \cdot (-a_1)^n \cdot y_{-1} - b_1 \cdot u_0 + (-a_1)^n \cdot b_1 \cdot u_0 + a_1 \cdot (-a_1)^n \cdot y_{-1}}{a_1 + 1}$$

Diese folgenden Teile des rechten Ausdrucks können ("händisch") getrennt und vereinfacht werden zu:

$$\frac{a_1 \cdot y_{-1} \cdot (-a_1)^n + a_1^2 \cdot y_{-1} \cdot (-a_1)^n}{1 + a_1} \text{ vereinfachen } \rightarrow a_1 \cdot (-a_1)^n \cdot y_{-1}$$

Somit erhält man als **Lösung im Zeitbereich:**

$$y_k = u_0 \cdot \frac{b_1}{1 + a_1} \cdot \left[-(-a_1)^k + 1 \right] - a_1 \cdot y_{-1} \cdot (-a_1)^n$$

Hinweis: Rücktransformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (die Darstellungen in den Versionen 11 und 15 ist leicht unterschiedlich, aber prinzipiell gleich):

$$\frac{z}{z + a_1} \text{ invztrans, } z \rightarrow (-a_1)^n$$

$$\frac{1}{(z + a_1) \cdot (z - 1)} \text{ invztrans, } z \rightarrow \frac{a_1 - a_1 \cdot \delta(n, 0) + (-a_1)^n - \delta(n, 0)}{a_1^2 + a_1}$$

$$\frac{1}{(z + a_1) \cdot (z - 1)} \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{ersetzen, } \delta(n, 0) = 0 \rightarrow \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow \frac{a_1}{a_1^2 + a_1} + \frac{(-a_1)^n}{a_1^2 + a_1}$$

$$\frac{1}{(z + a_1) \cdot (z - 1)} \text{ konvertieren, parfrac, } z \rightarrow \frac{1}{(a_1 + 1) \cdot (z - 1)} - \frac{1}{(a_1 + 1) \cdot (a_1 + z)}$$

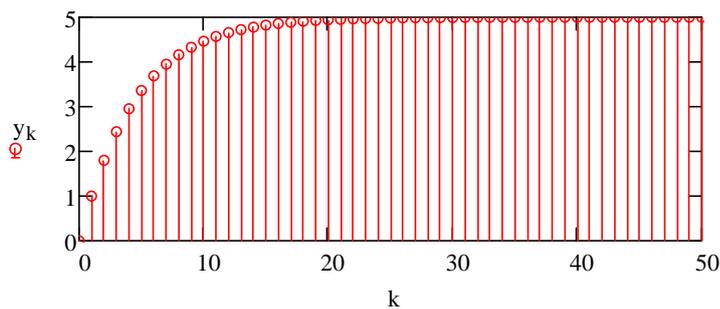
$$\frac{-1}{(1 + a_1) \cdot (z + a_1)} \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{ersetzen, } \delta(n, 0) = 0 \rightarrow \end{array} \right. \frac{(-a_1)^n}{a_1^2 + a_1}$$

$$\frac{1}{(1 + a_1) \cdot (z - 1)} \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{ersetzen, } \delta(n, 0) = 0 \rightarrow \end{array} \right. \frac{1}{a_1 + 1}$$

Graphische Darstellung der Lösung

$a_1 := -0.8$ $b_1 := 1$ $u_0 := 1$ $y_a := 0$ y_a steht hier für y_{-1}
 $k := 0..50$

$$y_k := u_0 \cdot \frac{b_1}{1 + a_1} \cdot [-(-a_1)^k + 1]$$



	0
0	0
1	1
2	1.8
3	2.44
4	2.952
5	3.362
6	3.689
7	3.951
8	4.161
9	4.329
10	...

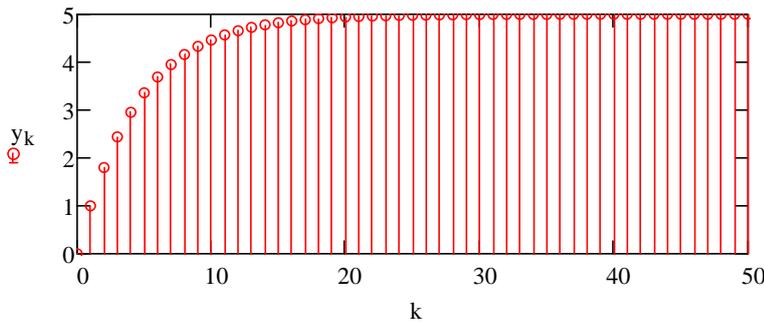
Zeichnerische Lösung über die Rekursion

$y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} + b_1 \cdot x_{k-1}$ mit der Anfangsbedingung y_{-1}

Es muss der Index "umdefiniert" werden:

$k := 0..50$ $y_0 := 0$ $x_k := 1$

$y_{k+1} := -a_1 \cdot y_k + b_1 \cdot x_k$



	0
0	0
1	1
2	1.8
3	2.44
4	2.952
5	3.362
6	3.689
7	3.951
8	4.161
9	4.329
10	...

Beispiel 1: Berechnung digitaler Antwortfunktionen

Beispiel 2: Sprungantwort bei gegebener Übertragungsfunktion

Beispiel 2: Sprungantwort bei gegebener (komplizierterer) Übertragungsfunktion

$a := 0.5$

$G_R(z) := \frac{z + a}{z^2 - z + a}$

$y(z) = G_R(z) \cdot x(z)$ ergibt für den Fall einer Einheitssprungfunktion

$y(z) := G_R(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$

Inverse z-Transformation mit den symbolischen Möglichkeiten in Mathcad:

$y(n) := y(z) \left\{ \begin{array}{l} \text{invztrans, z} \\ \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \\ \text{Gleitkommazahl, 3} \end{array} \right. \rightarrow \text{Re}[-(1.5 + 0.5i) \cdot (0.5 - 0.5i)^n] + \text{Re}[-(1.5 - 0.5i) \cdot (0.5 + 0.5i)^n] + 3.0 + \text{Im}[-(1$

Eine direkte Zuordnung zu einem Feld ist nicht möglich (Umschreiben siehe unten!).
Auch hier verhält sich die Version 15 im Vergleich zur Version 11 "seltsam";
dort lautet das (obige) symbolische Ergebnis so:

$y(n) = -3 \cdot \exp(-.347 \cdot n) \cdot \cos(.785 \cdot n) - 1 \cdot \exp(-.347 \cdot n) \cdot \sin(.785 \cdot n) + 3.$

Man erkennt also, dass eine "diskrete gedämpfte Schwingung vorliegt.

Macht man das Ganze über eine Partialbruchzerlegung,, erhält man die gesuchte Differenzgleichung
Wir verwenden dabei den wichtigen Satz:

Nach Zerlegung eines Ausdruckes per Partialbruchzerlegung in

$$H(z) = \frac{A}{z - \text{root1}} + \frac{B}{z - \text{root2}} + \frac{C}{z - \text{root3}} + \dots$$

kann jeder Bruch für sich rücktransferiert und das Ergebnis addiert werden.
Dabei wird folgendes Transformationspaar verwendet:

$$X(z) = \frac{\alpha}{z - \beta}$$



$$x_0 = 0$$

$$x_n = \alpha \cdot \beta^{n-1}$$

Wir haben also die Lösung im Bildbereich (mit der Übertragungsfunktion:

$$G_R(z) := \frac{z + a}{z^2 - z + a}$$

$$y(z) := \frac{z + a}{z^2 - z + a} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$a = 0.5$$

$$\frac{z^2 + 0.5 \cdot z}{(z^2 - z + a) \cdot (z - 1)} = \frac{A}{z - r1} + \frac{B}{z - r2} + \frac{C}{z - r3}$$

$$r1 := 1 \quad \begin{pmatrix} r2 \\ r3 \end{pmatrix} := z^2 - z + a \text{ auflösen, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5i \\ 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$$

Daher ist folgendes Gleichungssystem zu lösen

$$z^2: \quad A + B + C = 1$$

$$z^1: \quad A \cdot (r2 + r3) + B \cdot (r1 + r3) + C \cdot (r1 + r2) = -0.5 \quad \text{Vorzeichen auf die andere Seite gebracht}$$

$$z^0: \quad A \cdot (r2 \cdot r3) + B \cdot (r1 \cdot r3) + C \cdot (r1 \cdot r2) = 0$$

A, B und C erhält man durch die Lösung des Gleichungssystems in Matrizenform (erforderlich wegen den komplexen Lösungen)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r2 + r3 & r1 + r3 & r1 + r2 \\ r2 \cdot r3 & r1 \cdot r3 & r1 \cdot r2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

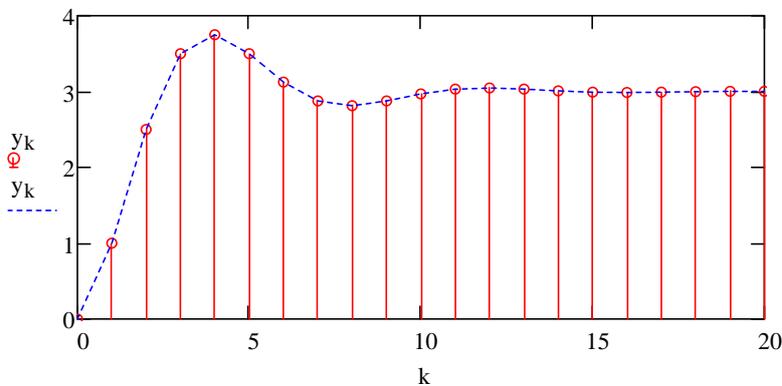
$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + 0.5i \\ -1 - 0.5i \end{pmatrix}$$

Wir erhalten daher:

$$k := 0..20$$

$$y_0 := 0 \quad y_k := A \cdot r_1^{k-1} + B \cdot r_2^{k-1} + C \cdot r_3^{k-1}$$

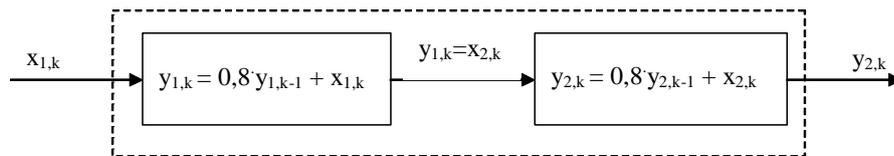
Die grafische Lösung ist identisch mit oben!



▣ Beispiel 2: Sprungantwort bei gegebener Übertragungsfunktion

▣ Beispiel 3: Modellbildung

Beispiel 3: Anwendung der z-Transformation zur mathematischen Modellbildung



Gegeben ist die obige Kettenschaltung: Die Zusammenfassung der beiden Differenzgleichungen lässt sich vereinfachen, man diese im Bildbereich durchführt.

$$y1_k = 0,8 \cdot y1_{k-1} + x1_k \quad y2_k = 0,8 y2_{k-1} + x2_k$$

$$y1(z) = 0,8 \cdot z^{-1} \cdot y1(z) + x1(z) \quad \text{ergibt} \quad y1(z) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot z^{-1}} \cdot x1(z)$$

Analog erhalten wir (da $x2(z) = y1(z)$)

$$y2(z) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot z^{-1}} \cdot x2(z) = \frac{1}{1 - 0,8 \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0,8 \cdot z^{-1}} \cdot x1(z) = \frac{1}{1 - 1,6z^{-1} + 0,64 \cdot z^{-2}} \cdot x1(z)$$

Aus dem ersten und letzten Ausdruck wird so umgeformt, dass $y2(z)$ als Summe von Ausdrücken dargestellt werden kann, um entsprechend den Regeln einfach rücktransformieren zu können:

$$y2(z) \cdot (1 - 1,6 \cdot z^{-1} + 0,64 \cdot z^{-2}) = x1(z)$$

beziehungsweise

$$y2(z) = x1(z) + 1,6 \cdot z^{-1} \cdot y2(z) - 0,64 \cdot z^{-2} \cdot y2(z)$$

Die Umkehrung des Satzes über die Rechtsverschiebung liefert nun:

$$y2_k = 1,6 \cdot y2_{k-1} - 0,64 \cdot y2_{k-2} + x1_k$$

▣ Beispiel 3: Modellbildung

☑ Beispiel 4: z-Transformation eines I-Reglers

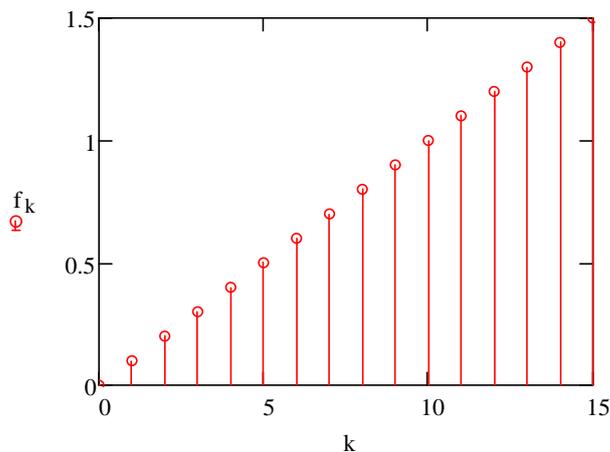
Beispiel 4: z-Transformation eines I-Reglers

$$\overset{\text{N}}{\text{N}} := 15 \quad k := 0..N$$

$$T_n := 1 \quad T_n := T_n \quad \overset{\text{T}}{\text{T}} := 0.1 \quad T := T$$

$$u(t) := \Phi(t) \quad y(t) := \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t u(t) dt$$

$$x_k := k \cdot T \quad f_k := y(x_k)$$



$$\overset{\text{N}}{\text{N}} y(z) := \sum_{k=0}^N \left(f_k \cdot \frac{1}{z^k} \right)$$

☒ Beispiel 4: z-Transformation eines I-Reglers

☑ Beispiel 5: Stabilitätsanalyse in der z-Ebene

Beispiel 5: Stabilitätsanalyse in der z-Ebene

1. Stabilitätsanalyse mittels w-Transformation

Die w-Transformation dient dazu, den Einheitskreis auf die linke imaginäre Ebene abzubilden. So kann nun mit bereits von der s-Transformation bekannten Stabilitätsanalysen bestimmt werden, ob ein System stabil ist.

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

Beispiel zur Stabilitätsanalyse in der z-Ebene mittels w-Transformation

$$G(z) := \frac{1}{z^2 + z + a}$$

Es soll der Bereich für a bestimmt werden, für den das System stabil ist.

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(w) := \frac{1}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + a}$$

In der Übertragungsfunktion muss z ersetzt werden.

Nun kann mittels des Routh-Kriteriums der Stabilitätsbereich berechnet werden.

$$G(w) \text{ vereinfachen} \rightarrow 2.0 - \frac{1.0 \cdot (8.0 \cdot w + 8.0)}{w^2 + 2.0 \cdot w + 5.0}$$

Der Nenner wird als charakteristisches Polynom bezeichnet.

charakteristisches Polynom:

$$2 \cdot w + 2 + a \cdot w^2 - 2 \cdot a \cdot w + a \text{ sammeln, } w \rightarrow 0.5 \cdot w^2 + 1.0 \cdot w + 2.5$$

$$\begin{aligned} a_3 &:= a & a_1 &:= a + 2 \\ a_2 &:= (-2 \cdot a + 2) & a_0 &:= 0 \end{aligned}$$

Es wird hier ein a0 auf 0 gesetzt, da immer eine gerade Anzahl an's vorhanden sein muss.

notwendige Kriterien:

- + alle an müssen vorhanden sein
- + alle an > 0

hinreichende Kriterien:

$$\begin{array}{lll} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ & & \text{usw.} \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ & & \text{usw.} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \\ & & \text{usw.} \\ c_{n-1} & & \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{-\left| \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix} \right|}{a_{n-1}} \qquad b_{n-1} = \frac{-\left| \begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix} \right|}{a_{n-1}}$$

+ alle bn's bzw. cn's > 0

$$c_{n-1} = \frac{-\left| \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{pmatrix} \right|}{b_{n-1}}$$

$$b_1 := \frac{-\left| \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix} \right|}{a_2} \qquad b_1 \rightarrow 2.5$$

Hier wird b1 berechnet.

Es werden nun die Kriterien überprüft, und der Bereich für a kann bestimmt werden:

$$a_2 > 0$$

$$b_1 > 0$$

$$(-2 \cdot a + 2) > 0$$

$$2 + a > 0$$

Der Bereich für a, für den das System stabil ist, geht also von -2 bis 1.

$$a < 1$$

$$a > -2$$

2. Stabilitätsanalyse mittels Einheitskreisbetrachtung in der z-Ebene

$$z = e^{s \cdot T} = e^{(\sigma + i \cdot \omega) \cdot T} = e^{\sigma \cdot T} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot T}$$

Aus der Definition von z sieht man, dass wenn s in $\sigma + i \cdot \omega$ umgeschrieben wird z gleich eine komplexe Zahl bzw. ein komplexer Zeiger ist. Ein Zeiger hat einen Betrag und einen Winkel. Der Betrag lässt sich hier sehr einfach mit der Formel $e^{\sigma \cdot T}$ und der Winkel mit $e^{i \cdot \omega \cdot T}$ beschreiben.

$$|z| = e^{\sigma \cdot T}$$

$$\arg(z) = e^{i \cdot \omega \cdot T}$$

Es ist bekannt, dass ein System stabil ist, wenn alle seine Pole (= Nullstellen des Nenners) der Übertragungsfunktion des geschlossenen Systems in der linken s-Halbebene liegen, d.h. ein System ist solange stabil, solange s negativ ist. Aus der Definition von $s = \sigma + i \cdot \omega$ sieht man, dass wenn s **negativ** sein muss, auch σ **negativ** sein muss !

s = negativ

$\sigma + i \cdot \omega$ = negativ

σ = negativ

... da $i \cdot \omega$ der Winkel des Zeiger ist

Aus diesem Zusammenhang kann man erkennen, dass ein **System nur stabil** ist, wenn die **Pole der z-Übertragungsfunktion** des geschlossenen Systems im **Einheitskreis** liegen, da $0 < e^{-\text{beliebige_Zahl}} < 1$!!!

$$0 < |z| = e^{-\sigma \cdot T} < 1$$

Beispiel zur Stabilitätsanalyse in der Z-Ebene mittels Einheitskreisbetrachtung

$$\underline{\underline{S}}(s) := \frac{1}{s \cdot (s + 1)} \quad H_0(s) := \frac{1 - e^{-s \cdot T}}{s}$$

Es handelt sich hier um ein System das abgetastet wird, durch das Halteglied 0ter Ordnung digitalisiert wird (H_0) und dann durch die Strecke S(s) geschickt wird.

$$\underline{\underline{G}}(s) := S(s) \cdot H_0(s) \rightarrow \frac{e^{-T \cdot s} - 1}{s^2 \cdot (s + 1)}$$

Nun muss die Übertragungsfunktion partialbruchzerlegt werden, damit sie z-transformiert werden kann:

$$\underline{\underline{G}}(s) := (1 - e^{-s \cdot T}) \cdot \left[\left(\frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1} \right]$$

Nun wird jeder einzelne Teil der Übertragungsfunktion z-Transformiert:

$$\underline{\underline{G(z)}} := (1 - z^{-1}) \cdot \left[\frac{T \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}} \right]$$

Danach wird für die Abtastzeit T 1 eingesetzt und die Gleichung aufgelöst:

$$\underline{\underline{T}} := 1$$

$$\underline{\underline{G(z)}} := G(z) \text{ vereinfachen} \rightarrow -\frac{z + e^{-T} + T \cdot e^{-T} - z \cdot e^{-T} - T \cdot z - 1}{(z-1) \cdot (z - e^{-T})}$$

$$G(z) \rightarrow \frac{z \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{-1} + 1}{(z-1) \cdot (z - e^{-1})}$$

Dies ist nun die z-Vorwärtsübertragungsfunktion des Systems. Nun muss das System geschlossen werden und überprüft werden ob die Pole bzw. die Nullstellen des Nenners im Einheitskreis der z-Ebene liegen.

$$G_w(z) := \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$G_w(z) \text{ vereinfachen} \rightarrow -\frac{z \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{-1} + 1}{z - z^2 + e^{-1} - 1}$$

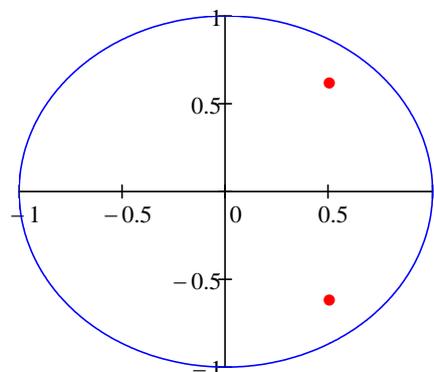
$$z := z^2 - z - e^{-1} + 1 = 0 \text{ auflösen, } z \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{\sqrt{4 \cdot e^{-1} - 3} + 1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4 \cdot e^{-1} - 3}}{2} \end{array} \right)$$

$$z = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.618i \\ 0.5 - 0.618i \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass beide Polstellen eindeutig im Einheitskreis der z-Ebene liegen und das System somit eindeutig stabil ist !

Grafische Darstellung in der z-Ebene (Bildbereich):

$$\underline{\underline{t}} := 0, 0.01 \dots 2\pi$$



●●● Polstellen
— Einheitskreis

☒ Beispiel 5: Stabilitätsanalyse in der z-Ebene