Wilfried Rohm

Vektorrechnung im Raum - 3 Übungsbeispiele

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Skalares Produkt, Vektorielles Produkt, Geradengleichungen, Ebenengleichung Schnitt von Gerade mit Ebene bzw. zweier Ebenen

- Kurzzusammenfassung

  Es handelt sich um einen Beitrag auf elementaren Niveau, d.h. es werden typische, einfache Aufgabenstellungen ("Lehrbuchaufgaben") aus dem Schulunterricht zur Vektorrechnung bzw. analytischen Geometrie gestellt und deren Lösung in Mathcad demonstriert und ausführlich kommentiert.

- Didaktische Überlegungen:

  Die Beispiele wurden von mir (samt den angeführten Hinweisen bzw. Hilfestellungen) den Schülern als Aufgaben gestellt und die Lösungen besprochen. Bei den vorgeführten Lösungen wird auch Wert darauf gelegt, mit Hilfe verschiedener "Proben" die Richtigkeit der Lösung zu bestätigen. In den angegebenen Lösungen wird versucht, eine für Schüler verständliche und trotzdem einigermassen elegante Vorgangsweise zu wählen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, ab 2.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  erstellt mit Mathcad 11

- Literaturangaben:

  Als eine Art Fortsetzung dieses Artikels empfiehlt sich der Artikel von *Robert Salvador "Vektorrechung - Schnitt zweier Kugeln"* auf der Seite www.math-tech.at

Beispiel 1 - Pyramide

Gegeben sind die Eckpunkte A, B und C eines Rechteckes im Raum.
A(1 | 2 |0); B(0 | 7 | 3) ; C(-5 | 3| z)
Gesucht: a) Die z-Koordinate des Punktes C
b) Die Koordinaten des Eckpunktes D
c) Die Spitze einer Pyramide über A,B,C,D mit Höhe h=3
Bemerkung: Typisches Beispiel aus dem 2.Jahrgang

Beispiel 1 - Pyramide

Lösung Beispiel 1-Pyramide

$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $C := \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ C_z \end{pmatrix}$ Definition der Ortsvektoren

Grundgedanke : Die Seiten eines Rechtecks stehen senkrecht aufeinander - daher muss das SKALARE PRODUKT der benachbarten Rechtecksseiten GLEICH 0 sein!

$(B - A) \cdot (C - B) \rightarrow -24 + 3 \cdot C_z$ das Skalare Produkt der beiden Rechtecksseiten

$C_z := (B - A) \cdot (C - B) = 0 \text{ auflösen}, C_z \rightarrow 8$

$C := \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ C_z \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ Lösung von Punkt a)

Der fehlende Punkt D wird durch Vektoraddition bestimmt (2 identische Varianten):

$D := C + (A - B)$ $D \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $D := A + (C - B)$ $D = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ Lösung von Punkt b)

Zur Probe von Punkt a) und b) werden die Winkel zwischen den Seiten ermittelt und damit festgestellt, ob die Bedingungen für ein Rechteck wirklich vorliegen.

$\text{winkel\_vekt}(v1, v2) := \operatorname{acos}\left(\frac{v1 \cdot v2}{|v1| \cdot |v2|}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$ Winkel zwischen 2 Vektoren in Grad

$\text{winkel\_vekt}(C - B, B - A) \rightarrow 90$

$\text{winkel\_vekt}(D - A, C - B) \rightarrow 0$

$\text{winkel\_vekt}(D - A, D - C) \rightarrow 90$

$\text{winkel\_vekt}(B - A, C - D) \rightarrow 0$

Berechnung der Pyramidenspitze: Grundsätzlich gibt es 2 Lösungen wegen der verschiedenen Orientierung des Normalvektors auf die Rechtecksfläche.
Der Normalvektor wird durch das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren der Rechtecksebene ermittelt:

$n := (B - A) \times (D - A)$ $\quad n = \begin{pmatrix} 37 \\ -10 \\ 29 \end{pmatrix}$ $\quad n_0 := \dfrac{n}{|n|}$ $\quad |n_0| = 1$

$(D - A) \times (B - A) = \begin{pmatrix} -37 \\ 10 \\ -29 \end{pmatrix}$

Diese Rechnung dient nur der Bestätitgung der Orientierungsregel von Normalvektoren, welche durch das Kreuzprodukt bestimmt werden!

Der normierte Normalvektor ergibt nun multipliziert mit der Höhe der Pyramiden die beiden "Höhenvektoren" - diese werden an den Mittelpunkt des Rechtecks "angehängt" und ergeben dann die Spitzen der Pyramiden:

$S_1 := \left(\dfrac{A + C}{2}\right) + 3 \cdot n_0$ $\quad S_1 = \begin{pmatrix} 0.309 \\ 1.876 \\ 5.81 \end{pmatrix}$

$S_2 := \left(\dfrac{A + C}{2}\right) - 3 \cdot n_0$ $\quad S_2 = \begin{pmatrix} -4.309 \\ 3.124 \\ 2.19 \end{pmatrix}$

Lösung von Punkt c)

$|S_2 - S_1| = 6$

Als Probe wird festgestellt, dass die beiden Spitzen zweimal die Höhe voneinander entfernt sind!

Lösung Beispiel 1-Pyramide

Beispiel 2 - Quadrat im Raum

Von einem Quadrat ABCD im Raum sind folgende Größen gegeben:
A(3 | 5 | 1) , B(bx | by | 1) und C (|1 | 3 | 3)

Berechne die fehlenden Koordinaten bx und by sowie anschließend den Eckpunkt D.

Hinweis*: *Du hast 2 unbekannte Größen - was muß man daher tun ?

Beispiel 2 - Quadrat im Raum

Lösung Beispiel 2 - Quadrat

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Grundidee : Da 2 Unbekannte vorliegen, kann man über ein Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten die Lösung finden. Die beiden Bedingungen sind:

1) Die benachbarten Quadratseiten stehen aufeinander normal - daher muss das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren gleich 0 sein. (siehe auch Beispiel 1)

2) Sie Seiten und damit die Beträge der Seitenvekoren müssen gleich lang sein.

Wegen der Bedingung 2 liegt ein nichtlineares Gleichungssystem vor, dass aber auch symbolisch gelöst werden kann, aber auch eine Überraschung enthält!.

Vorgabe

$$(B - A) \cdot (C - B) = 0$$

$$|B - A| = |C - B|$$

$$L := \text{Suchen}(B_x, B_y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.634 & 2.366 & 0.634 & 2.366 \\ 4.366 & 2.634 & 4.366 & 2.634 \end{pmatrix}$$

L... "Lösungsmatrix"

Wahrscheinlich ist es überraschend, dass hier 4 Lösungen herauskommen, von denen allerdings je 2 identisch sind. Einmal enthält man den Eckpunkt B LINKS von der Diagonale AC aus gesehen (wenn man z.b. von oben daraufblickt), einmal den Eckpunkt B RECHTS von der Diagonale AC aus gesehen. Damit erhalten wir zwar unterschiedliche Lösungen, die Seiten der Quadrate sollten aber gleich groß sein. Dies wollen wir überprüfen, indem wir beide Lösungen weiterverfolgen:

$B_x := L_{0,0} \qquad B_y := L_{1,0}$

$B_x = 0.634 \qquad B_y = 4.366$

$$B_1 := \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0.634 \\ 4.366 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.Lösung für den Eckpunkt B

$BB_x := L_{0,1}$ $BB_x = 2.366$

$BB_y := L_{1,1}$ $BB_y = 2.634$

$B_2 := \begin{pmatrix} BB_x \\ BB_y \\ 1 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 2.366 \\ 2.634 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2.Lösung für den Eckpunkt B

Daher erhalten wir auch 2 Lösungen für den Eckpunkt D:

$D_1 := A + (C - B_1)$ $D_1 = \begin{pmatrix} 3.366 \\ 3.634 \\ 3 \end{pmatrix}$

$D_2 := A + (C - B_2)$ $D_2 = \begin{pmatrix} 1.634 \\ 5.366 \\ 3 \end{pmatrix}$

Proben :

$\frac{A + C}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\frac{B_1 + D_1}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Berechnung des Quadratmittelpunkte auf 2 Arten

$\frac{B_2 + D_2}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Quadratseiten müssen natürlich alle gleich lang sein!

$|B_1 - A| = 2.449$ $|C - B_1| = 2.449$ $|A - D_1| = 2.449$

$|B_2 - A| = 2.449$ $|C - B_2| = 2.449$ $|A - D_2| = 2.449$

Nachträgliche mathematische Analyse:

Warum man 2 verschiedene Lösungen erhält, können wir nachvollziehen, wenn wir uns das bestimmende nichtlineare Gleichungssystem näher anschauen:

$$(B - A)\cdot(C - B) = 0 \rightarrow (B_x - 3)\cdot(1 - B_x) + (B_y - 5)\cdot(3 - B_y) = 0$$

$$|B - A| = |C - B| \rightarrow \left[\left(|B_x - 3|\right)^2 + \left(|B_y - 5|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(|1 - B_x|\right)^2 + \left(|3 - B_y|\right)^2 + 4\right]^{\frac{1}{2}}$$

Die 1.Gleichung ist eine Gleichung 2.Grades, die zweite Gleichung wird nach dem Quadrieren sogar zu einer Gleichung 4.Grades.
Unser Computerprogramm erhält daher auch bei symbolischer Rechnung 4 Lösungen. Durch das Quadrieren der Wurzelgleichung sind aber die "Doppellösungen" entstanden!

Lösung Beispiel 2 - Quadrat

Beispiel 3 - Ebenen...

geg: Ebene E1 durch die Punkte A(1|1|1) , B (2|0|5) und C(5|1|1)
Ebene E2 durch die Punkte P (10|5|5), Q(5|1|0) und R(6|2|2)

- **Schnittgerade der Ebene E1 mit der Ebene E2 (P,A,B)**
- **Normalabstand des Punktes P von der Ebene E1 (+ Erklärung der Formel)**
- **Durchstoßpunkt der Geraden von P aus normal auf die Ebene E1**

empfohlene Vorgangsweise:
1) Aufstellen der beiden Ebenengleichungen - definiere zuerst eine allgemeine Funktion für die Ebenengleichung durch 3 Punkte:
ebene(A,B,C,x,y,z) := .....
2) Schnitt der beiden Ebenen - das Ergebnis muß eine Gerade sein!
3) Formel für den Abstand eines Punktes von einer Ebene aufstellen, etwa
d(P,A,B,C) :=
4) Aufstellen der Geradengleichung von P normal auf die Ebene
5) Berechnung des Durchstoßpunktes = Schnittpunkt von Gerade und Ebene

Beispiel 3 - Ebenen...

Lösung Beispiel 3 - Ebenen...

Aufstellen der Ebenengleichungen

$n(A,B,C) := (B-A)\times(C-A)$

$$\text{ebene}(A,B,C,x,y,z) := n(A,B,C)\cdot\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-A\right] = 0$$

Idee: Das Skalarprodukt eines Normalvektors auf die Ebene mit IRGENDEINEM Vektor der Ebene muss 0 seein!

$A := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$ $C := \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$ $P := \begin{pmatrix}10\\5\\5\end{pmatrix}$ $Q := \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ $R := \begin{pmatrix}6\\2\\7\end{pmatrix}$

$E1(x,y,z) := \text{ebene}(A,B,C,x,y,z) \rightarrow 16\cdot y - 20 + 4\cdot z = 0$

Ebene schneidet NICHT die x-Achse

$E2(x,y,z) := \text{ebene}(P,Q,R,x,y,z) \rightarrow -23\cdot x + 85 + 30\cdot y - z = 0$

Allgemeine Form einer Ebenengleichung

2) Schnitt der Ebenen

Wir verwenden dazu die oben ermittelten Koordinatengleichungen der beiden Ebenen und stellen ein Gleichungssystem auf - da die Lösung eine Gerade (Schnittgerade ist) , ist die Lösung nicht eindeutig, sondern noch von einem Parameter abhängig, den wir t nennen.

Vorgabe

$16y + 4z = 20$

$23x - 30y + z = 85$

$$\text{Suchen}(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{34}{23}\cdot y + \frac{80}{23} \\ y \\ -4\cdot y + 5 \end{pmatrix} \qquad g(t) := \begin{pmatrix} \frac{80}{23} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} \frac{34}{23} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Das ist die Gleichung der Schnittgerade in Parameterform

$$g(3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{182}{23} \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punkt der Schnittgerade - eine Probe soll zeigen, dass dieser Punkt in beiden Ebenen liegt!

$$\text{ist\_in\_ebene1}(x,y,z) := \left| \begin{array}{l} \text{return "TRUE" if } -16\cdot y + 20 - 4\cdot z = 0 \\ \text{"FALSE" otherwise} \end{array} \right.$$

$$\text{ist\_in\_ebene2}(x,y,z) := \left| \begin{array}{l} \text{return "TRUE" if } 23\cdot x - 30\cdot y + z = 85 \\ \text{"FALSE" otherwise} \end{array} \right.$$

Funktion zur Überprüfung, ob ein beliebiger Punkt zur entsprechenden Ebene gehört.
(liesse sich natürlich auch mit einer Funktion und Übergabe der Parameter der Ebene o.ä. lösen)

$\text{ist\_in\_ebene1}(1,1,0) \rightarrow \text{"FALSE"}$

$\text{ist\_in\_ebene2}(1,1,0) \rightarrow \text{"FALSE"}$

Dieser Punkt liegt nicht in den beiden Ebenen

$\text{ist\_in\_ebene1}\left(\frac{182}{23},3,-7\right) \rightarrow \text{"TRUE"}$

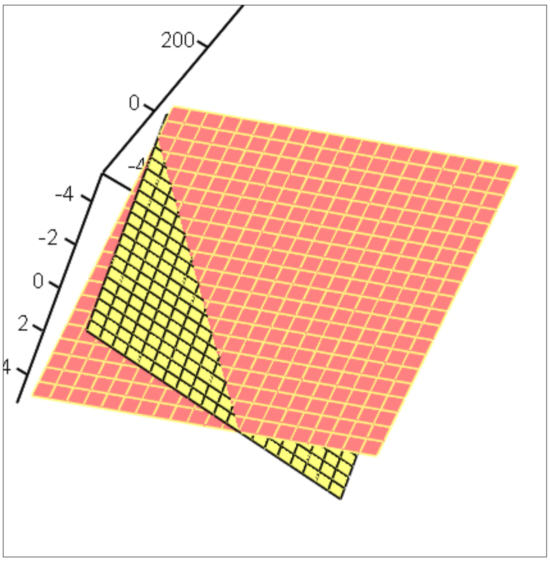
$\text{ist\_in\_ebene2}\left(\frac{182}{23},3,-7\right) \rightarrow \text{"TRUE"}$

Dieser Punkt der Schnittgeraden (Parameter t=3) erfüllt beide Ebenengleichungen !

Grafische Darsztellung der beiden Ebenen im 3-D-Diagramm: Beide Funktionen definieren Matrizen (E1 und E2), die räumlich dargestellt werden.

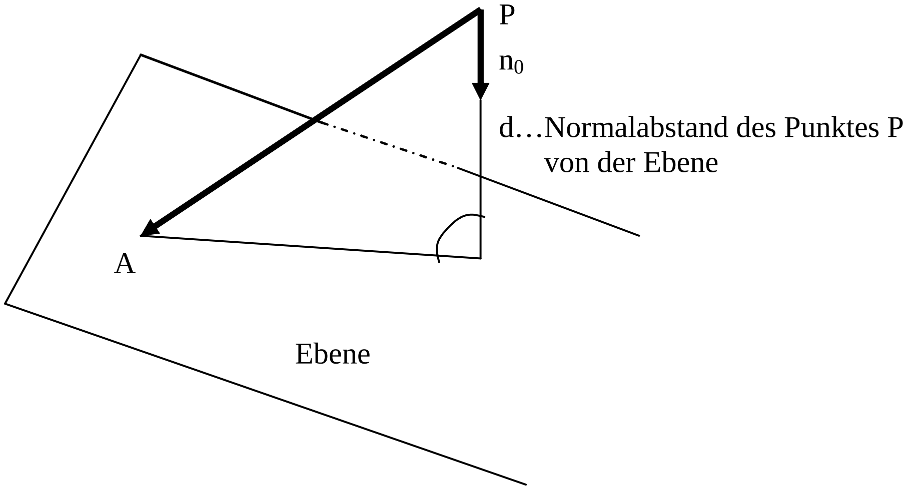
$E1(x,y) := 5 - 4y$

$E2(x,y) := 85 - 23x + 30y$



E1 , E2

Abstand von P von Ebene E1



Aus der obigen Skizze lässt sich herleiten, dass der Normalabstand eines Punktes P von der Ebene sich aus dem Skalarprodukt des Vektors PA (mit einem beliebigen Punkt A der Ebene) und dem normierten Normalvektor auf die Ebene ermitteln lässt.

$n_0(A,B,C) := \dfrac{n(A,B,C)}{|n(A,B,C)|}$

Allgemeine Funktion für den Normalvektor auf eine Ebene, die durch die 3 Punkte A, B, C festgelegt ist.

$d(P,A,B,C) := |n_0(A,B,C) \cdot (A-P)|$ $\quad d(P,A,B,C) = 4.851$

Durchstoßpunkt der Normalen durch P mit Ebene E1

Idee:
Zunächst wird die Gerade durch den Punkt P normal zur Ebene bestimmt - dies geschieht (weil ein Punkt und Richtungsvektor bekannt ist) am besten in Parameterform.
Die Gerade wird mit der Ebene geschnitten, d.h. es wird geschaut, wie groß der Parameter t in der Geradengleichung gewählt werden muss, damit der geradenpunkt auch gleichzeitig ein Ebenenpunkt ist.

Normalengleichung in Parameterform (Punkt + t*Richtungsvektor)

$g\_n(t) := P + t \cdot n(A,B,C)$ $\quad g\_n(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 5 + 16 \cdot t \\ 5 + 4 \cdot t \end{pmatrix}$

$x_1(t) := g\_n(t)_0$

$y_1(t) := g\_n(t)_1$

$z_1(t) := g\_n(t)_2$

Herausholen der Komponenten x,y,z aus dem Vektor für die Punkte auf der Geraden. Diese Komponenten der GERADE werden in die EBENENGLEICHUNG eingesetzt und der unbekannte Parameter t wird damit fixiert bzw. berechnet - eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Durchstoßpunkt

$\boxed{t_S := -16 \cdot y_1(t) + 20 - 4 \cdot z_1(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{-5}{17}}$

$\boxed{t_S := \text{ebene}(A,B,C,x_1(t),y_1(t),z_1(t)) \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{-5}{17}}$

Allgmeine Variante unter Verwendung der obigen allgemeinen Definition der Ebenengleichung

$$D := g\_n(t_S) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{5}{17} \\ \frac{65}{17} \end{pmatrix}$$

Der Durchstoßpunkt

Verschiedene Möglichkeiten für eine Probe, ob dieser Punkt der Gerade tatsächlich der Durchstoßpunkt ist, d.h. die Ebenengleichung E1 ebenfalls erfüllt:

$$ist\_in\_ebene1\left(x_1(t_S), y_1(t_S), z_1(t_S)\right) \rightarrow \text{"TRUE"}$$

$$ist\_in\_ebene1\left(D_0, D_1, D_2\right) \rightarrow \text{"TRUE"}$$

Natürlich kann jetzt das vorige Problem (die Berechnung des Abstandes des Punktes P von der Geraden) einfacher gelöst werden : Der Abstand ist gleich dem Betrag des Vektors vom Durchstoßpunkt D zu P

$|D - P| = 4.851$ das gleiche Ergebnis wie oben!

Lösung Beispiel 3 - Ebenen...