Wilfried Rohm

Reifeprüfungsaufgaben (SRDP) 2015

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Funktionen, Trigonometrie, Differentialrechnung, Integralrechnung, Normalverteilung, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Regression, Ausgleichsfunktionen, Interpolation, Polynomfunktionen, Lineare Funktion, Exponentialfunktion, Differentialgleichungen

- Kurzzusammenfassung

  Hier werden die Lösungen der standardisierten Reifeprüfungsaufgaben 2015 (Haupttermin) für die Cluster 1, 2, 3 und 5 an den Höheren Technischen Lehranstalten Österreichs unter Verwendung von Mathcad vorgeführt. Diese Aufgaben wurden zentral vom BIFIE (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens) gestellt.
  Bezüglich der Aufgabenstellungen siehe auch: https://www.bifie.at/node/81

- Didaktische Überlegungen:

  Es wird (fast überall) bei den hier vorgestellten Lösungen über die gestellte Aufgabenstellung hinausgegangen. Dies deswegen, um der Bedeutung dieser Aufgaben für den Einsatz im Unterricht besser gerecht zu werden.
  In vielen Fällen werden mehrere Lösungswege aufgezeigt (teils auch unter Verwendung verschiedener Methoden von Mathcad)

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2.-5.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version: **Mathcad 15**

- Wichtige Anmerkungen:

  Im vorliegenden File wurde nur teilweise davon Gebrauch gemacht, direkt in Matchcad mit Einheiten zu rechnen. Immer dann, wenn das Rechnen mit Einheiten größere Routine im Umgang mit Einheiten erfordert, wurde der einfacheren Lesbarkeit wegen darauf verzichtet.

  Bei Grafiken wurden durchgehend die jeweiligen Laufvariablen mit Unterstrich geschrieben (zum Beispiel die Zeit t als "t_"). Dies deswegen, weil bei der Definition der Laufvariablen beispielsweise mit
  t:=0, 0.01 .. 10 ein Vektor für t erzeugt wird. Dies würde aber bei nachfolgenden numerischen oder symbolischen Auswertungen bzw. Berechnungen teils zu Problemen führen. Außerdem steht bei der Verwendung von Einheiten in Mathcad 15 "t" für "1 Tonne".
  Zur besseren Übersicht werden geforderte Ergebnisse GELB hervorgehoben, Angaben hingegen TÜRKIS/BLAU.

  Die Aufgaben aus Teil A wurden in ALLEN Schulen des Berufsbildenden Schulwesens in Österreich (HTL, HAK, HBLA, HLW, BAKIP) in gleicher Form gestellt. Es handelt sich also dabei um die Aufgaben 1 bis 5.
  Die Aufgaben 6, 7, 8 sind "clusterspezifisch", d.h. sie sind bestimmten Typen von Höheren Technischen Lehranstalten zugeordnet (siehe auch: https://www.bifie.at/node/81)
  Cluster 1: Bautechnische Abteilungen und Verwandte
  Cluster 2: Elektrotechnische Abteilungen und Verwandte
  Cluster 3: Maschinenbauliche Abteilungen und Verwandte
  Cluster 4: Chemie
  Cluster 5: Informationstechnik

Teil A: Aufgabe 1 - Farbenfrohe Gummibären

Teil A: Aufgabe 1 - Farbenfrohe Gummibären

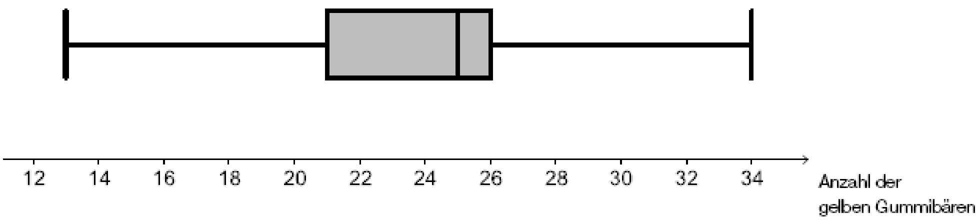
Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung. *[1 Punkt]*

b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

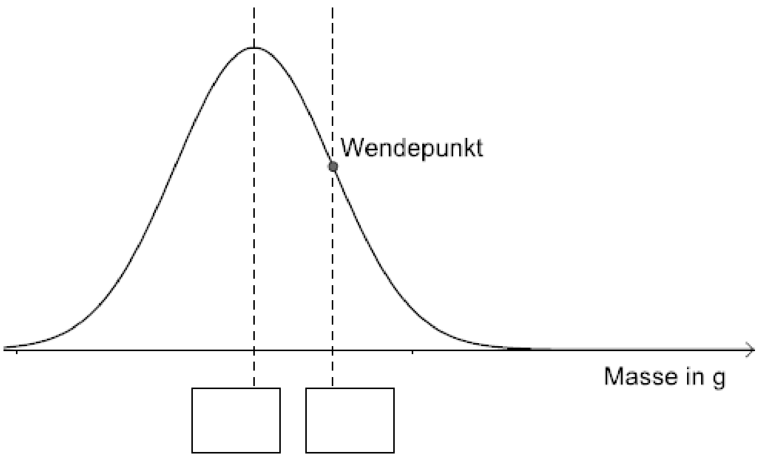
– Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss. *[1 Punkt]*

c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben. *[1 Punkt]*

d) Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[1 Punkt]*



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ± 0,25 g vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird. *[1 Punkt]*

Teil a) Arithmetisches Mittel der Gummibären pro Packung

$$n\_weiss := \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix}$$ Anzahl der weissen Gummibären pro Packung

$$n\_Packung := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Anzahl der Packungen

$$x_{quer} := \frac{17 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + 24 \cdot 4}{2 + 3 + 3 + 1 + 4} = 21.154$$

$i := 0 .. 4$

$$x_{quer} := \frac{n\_weiss \cdot n\_Packung}{\sum_i n\_Packung_i} = 21.154$$

Bei dieser Varainte der Rechnung wird das Skalarprodukt aus den beiden Vektoren n_weiss und n_Packung ermittelt!

Hinweis : Variante für die Eingabe der Daten

$$daten := \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 20 & 3 \\ 21 & 3 \\ 22 & 1 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$n\_weiss := daten^{\langle 0 \rangle} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad n\_Packung := daten^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teil b) Interpretation des gegebenen Boxplotts:

Der gesuchte Bereich für die gelben Gummibären ist: $26 \le n \le 34$

Begründung : Beim Box-Plott wird die der Größe nach geordnete Datenmenge in vier Viertel unterteilt - links bzw. re von den "mittleren 50%" finden sich jeweils noch 25% der Daten.

Teil c) Prozentanteil der Pasckungen mit Gummibären der Farbe rot

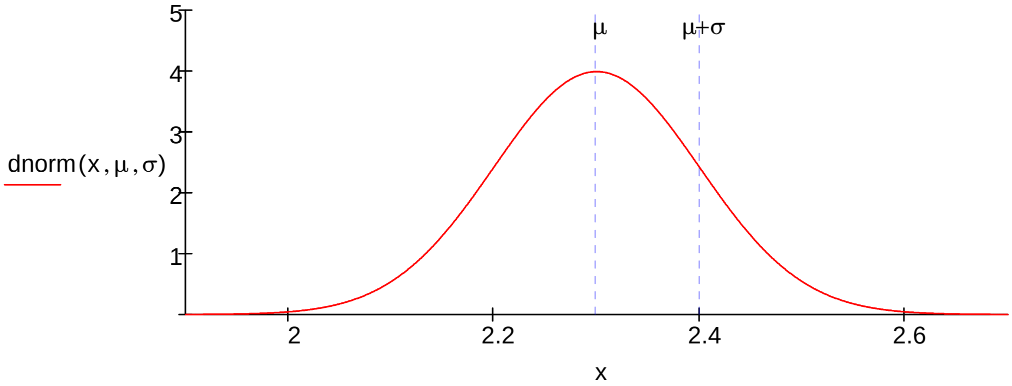
$$Anteil_{rot} := \frac{2}{6} = 33.333 \cdot \%$$

Ermittelt nach der Grundformel für Wahrscheinlichkeiten:

$$p(E) = \frac{Anzahl\_der\_für\_E\_günstigen\_Fälle}{alle\_Möglichkeiten}$$

Teil d) Normalverteilte Massen von Gummibären

$\mu := 2.3$ $\sigma := 0.1$ (Angaben in g)



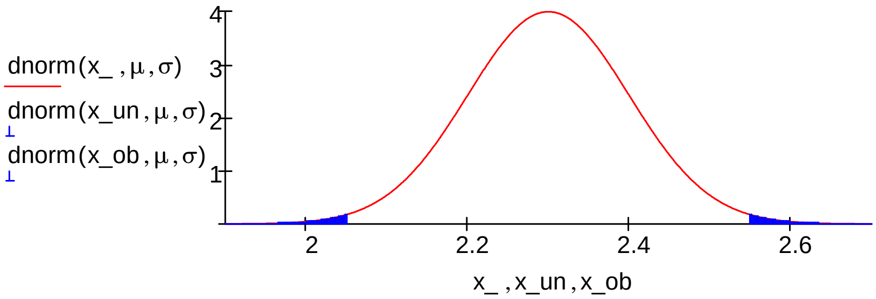
Aussortiert werden Gummibären mit einer Masse, welche um mehr als 0,25g vom Erwartungswert μ abweicht.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird, ist daher:

$p := pnorm(\mu - 0.25, \mu, \sigma) + 1 - pnorm(\mu + 0.25, \mu, \sigma) = 1.242 \cdot \%$

Veranschaulichung : Die Wahrscheinlichkeit p entspricht dem blauen Flächenanteil in der Zeichnung

$x\_ := 1.9, 1.901 .. 2.7$

$x\_un := 1.9, 1.901 .. \mu - 0.25$ $x\_ob := \mu + 0.25, \mu + 0.25 + 0.001 .. 2.7$

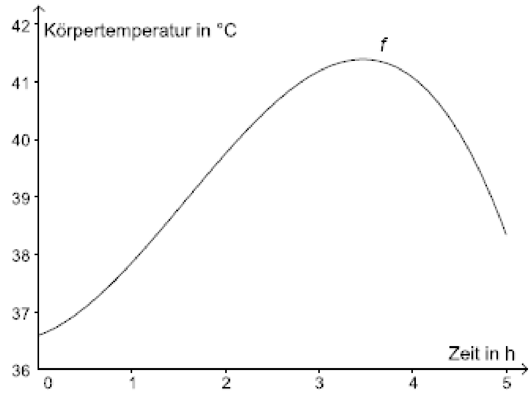


Teil A: Aufgabe 1 - Farbenfrohe Gummibären

Teil A: Aufgabe 2 - Ganzkörperhyperthermie

Teil A: Aufgabe 2 - Ganzkörperhyperthermie

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) – Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt. *[1 Punkt]*

b) – Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann. *[1 Punkt]*
– Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann. *[1 Punkt]*

c) – Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme. *[2 Punkte]*

d) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

– Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Intervall [0; 5]. *[1 Punkt]*

$f(t) := -0.18 \cdot t^3 + 0.85 \cdot t^2 + 0.6 \cdot t + 36.6$

Teil a) Zeitpunkt , zu dem die Körpertemperatur 37°C beträgt:

$$f(t) = 37 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.27 \\ 0.429 \\ -0.981 \end{pmatrix}$$

Da eine Gleichung dritten Grades aufgelöst wird, gibt es zwar 3 Lösungen, aber nur eine liegt im Bereich der Definitionsmenge der Funktion f(t)

$t_{37°} := 0.429$ in Stunden

Teil b) Extremstellen

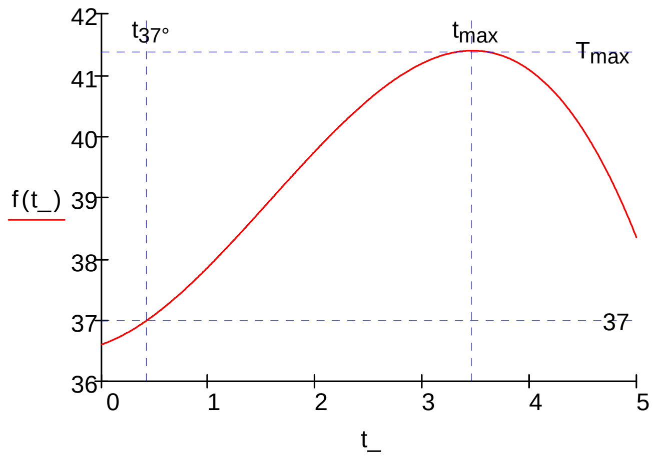
Die 1.Ableitung liefert die Steigung der Tangente im jeweiligen Punkt. Zum Zeitpunkt des (relativen) Maximums ist die Steigung 0. Daher kann man durch Nullsetzen der 1.Ableitung den Zeitpunkt dieses Maximum finden. (Eine genauere Analyse mit Hilfe der 2.Ableitung ist hier nicht erforderlich, weil ersichtlich nur ein Maximum in diesem Bereich mögli
Durch Einsetzen in der Funktion f(t) erhält man diese Maximaltemperatur.

$$t_{extremwert} := \frac{d}{dt}f(t) = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{Gleitkommazahl}, 3\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}-0.32\\3.47\end{pmatrix}$$

$t_{max} := 3.47$ $\quad T_{max} := f(t_{max}) = 41.396$

Grafische Veransachaulichung:

$t\_ := 0, 0.01 .. 5$



Eine Polynomfunktion 3.Grades kann nur 2 Extremstellen haben, weil die 1.Ableitung dieser Polynomfunktion eine Polynomfunktion 2.Grades ist. Wenn man diese Ableitungsfunktion zum Ermitteln der Extremstellen gleich 0 setzt, quadratische Gleichung zu lösen. Diese kann aber maximal 2 Lösungen haben.

$y(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ Polynomfunktion 3.Grades

$y_1(x) := \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$ 1.Ableitung - Polynomfunktion 2.Grades

$$y_1(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 3 \cdot a \cdot c}}{3 \cdot a} \\ -\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 3 \cdot a \cdot c}}{3 \cdot a} \end{pmatrix}$$

2 Nullstellen dieser Ableitungsfunktion

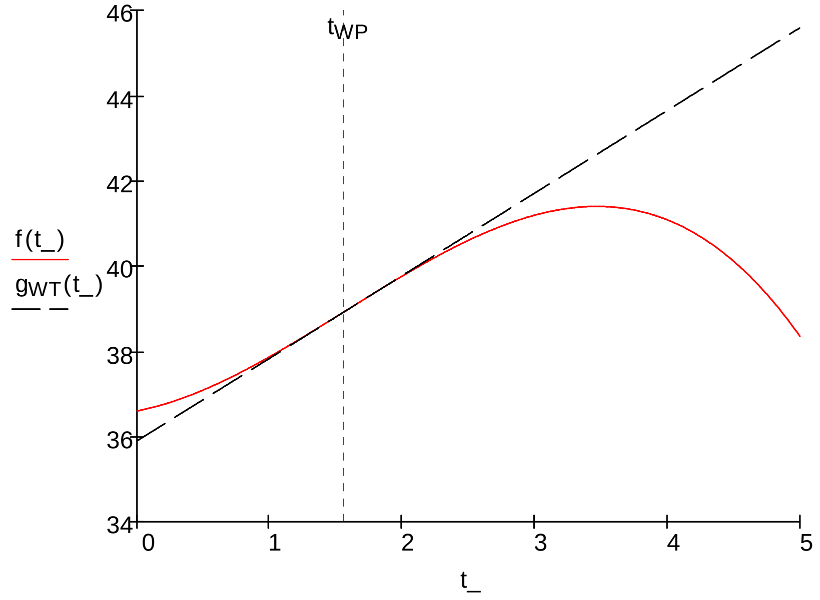
Teil c) Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme

Die Temperaturzunahme - also die 1.Ableitung der Funktion f(t) - wird maximal, wenn diese Ableitung eine Extremstrelle aufweist. Diese Extremstelle findet man durch Nullstzen der Ableitung der Ableitung, also der 2.Ableitung. Damit ist der Wendepunkt gleichzeitig jener Punkt, in dem die Temperaturzunahme maximal ist. Wie die unten eingezeichnete Wendetangente auch optisch zeigt, ist der Anstieg der Tangente dort maximal.

$$t_{WP} := \frac{d^2}{dt^2} f(t) = 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \rightarrow 1.57$$

$$k := \frac{d}{dt} f(t) \;\; \text{ersetzen}, t = t_{WP} \rightarrow 1.937954$$

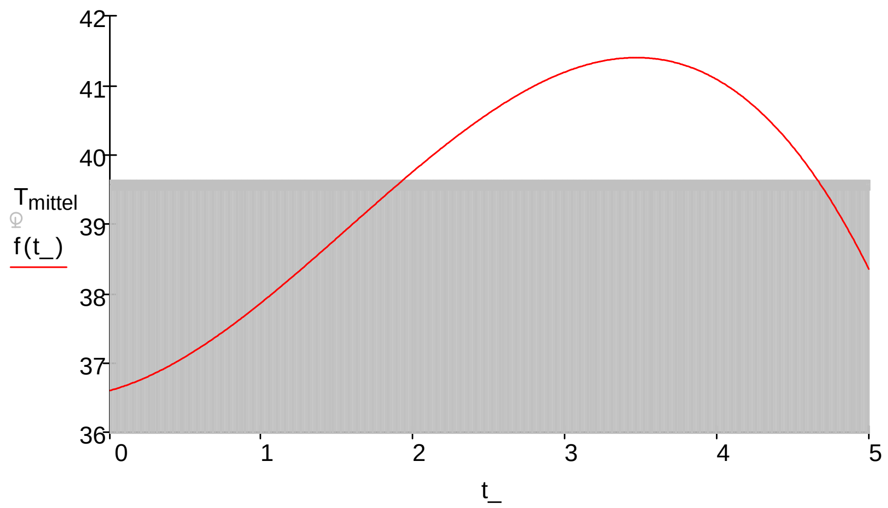
$$d := f(t_{WP}) - k \cdot t_{WP} = 35.898 \qquad g_{WT}(t) := k \cdot t + d$$



Teil d) mittlere Körpertemperatur

$$T_{mittel} := \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\, dt = 39.558$$

Da dies die mittlere Temperatur im genannten Intervall ist, muss die Bereich zwischen der Funktion f(t) und der t-Achse flächengleich dem Rechteck 5*T_{mittel} sein (siehe Grafik!)

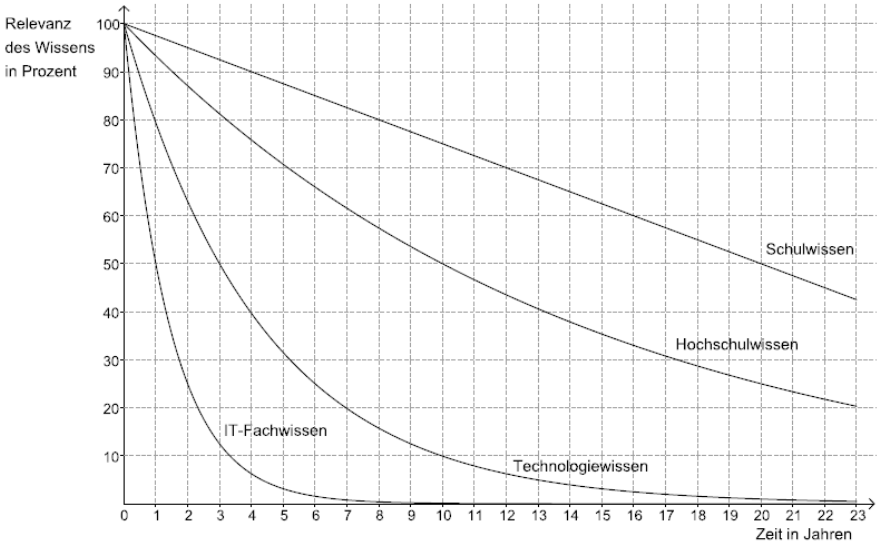


Teil A: Aufgabe 2 - Ganzkörperhyperthermie

Teil A: Aufgabe 3 - Halbwertszeit des Wissens

Teil A: Aufgabe 3 - Halbwertszeit des Wissens

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

– Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein. *[1 Punkt]*

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

– Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist. *[1 Punkt]*

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat. *[1 Punkt]*

d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

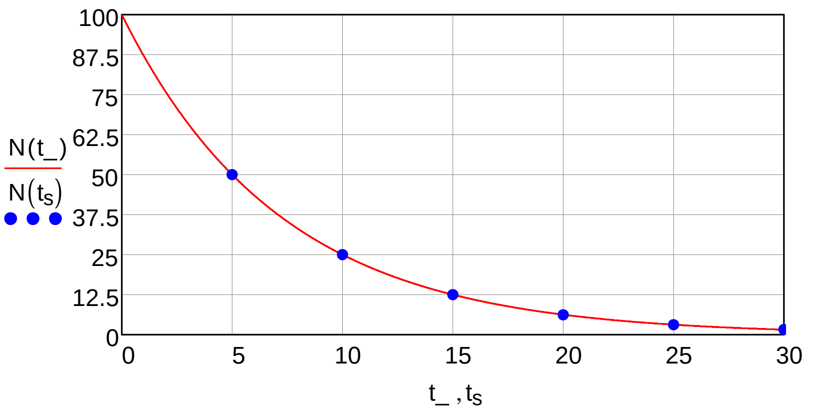
– Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab. *[1 Punkt]*

Teil a) Abfall des beruflichen Fachwissens

Die einzuzeichnende Funktion lautet $N(t) := 100 \cdot 0.5^{\frac{t}{5}}$

Man muß aber natürlich die einzuzeichnende Funktion nicht formelmäßig kennen. Auf Grund der Angabe kommt es alle 5 Jahre zu einer **Halbierung** des Fachwissens, also beträgt nach 5 Jahren das Fachwissen 50% des Ausgangswertes, nach 10 Jahren 25%, nach 15 Jahren 12,5% usw... (siehe die eingezeichneten Punkte in der Grafik!)

$t\_ := 0, 0.01 .. 30$ $t_s := 5, 10 .. 30$



b) Relevanz des Technologiewissens:

Die Halbwertszeit beträgt nun 3 Jahre. Die Exponentialfunktion wird hier auf 2 Arten (mit der Basis 0,5 bzw. mit der Basi aufgestellt. Die Grafik zeigt, dass man den gleichne Funktionsverlauf erhält (die Kurven liegen übereinander)

$N(t) := 100 \cdot 0.5^{\frac{t}{3}}$

$N_e(t) = 100 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Ansatz über die e-Funktion und berechnen des Parameters λ durch Einsetzen eines speziellen Punktes in die Gleichung

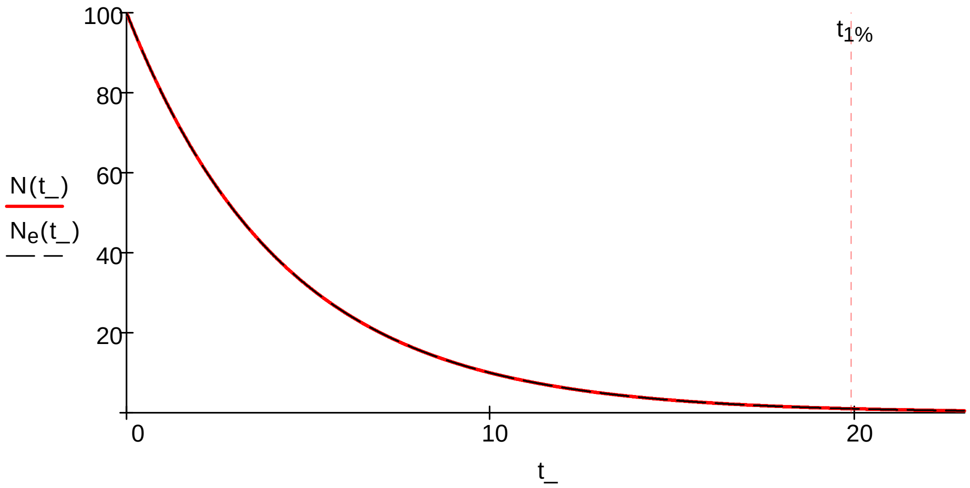
$\lambda := 50 = 100 \cdot e^{\lambda \cdot 3}$ auflösen , λ $\rightarrow -\frac{\ln(2)}{3}$

$N_e(t) := 100 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

$t_{1\%} := N(t) = 1$ auflösen , t; Gleitkommazahl , 3 $\rightarrow 19.9$

Nach ca. 20 Jahren ist das Technologiewissen auf 1% des Ausgangswertes (100%) gesunken.

$t\_ := 0, 0.01 .. 23$ Grafische Darstellung



Teil c) Abnahme des Hochschulwissens

$N(t) := 100 \cdot e^{-0.0693 \cdot t}$

$N(7) = 61.6$ Nach 7 Jahren sind noch 61,6% des Hoschulwissens relevant

Die Abnahme beträgt daher in Prozent: $100 - N(7) = 38.4$

Teil d) Relevanz des Schulwissens

Die gesuchte Steigung liest man ab zu: $k = -\frac{20}{8} = -2.5$

Teil A: Aufgabe 3 - Halbwertszeit des Wissens

Teil A: Aufgabe 4 - Gold

Teil A: Aufgabe 4 - Gold

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg). Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

– Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern. *[1 Punkt]*

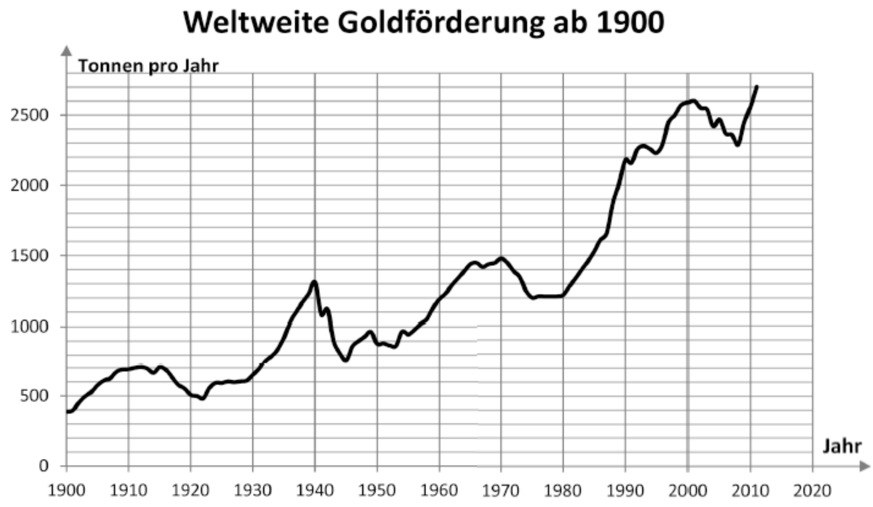
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

– Erstellen Sie eine Formel für W. *[1 Punkt]*

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert)

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist. *[1 Punkt]*

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen.“

– Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist. *[1 Punkt]*

Teil a) Weltweit geförderte Goldmenge - Umrechnung in einen Würfel

$Masse := 1.713 \cdot 10^{8} kg$ $\qquad \rho := 19.3 \frac{10^{-3} kg}{cm^{3}}$

$V := Masse = V \cdot \rho \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, V \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \rightarrow 8.88e9 \cdot cm^{3}$

$Kantenlänge := \sqrt[3]{V} = 20.708 m$

Teil b) Formel für den Wert eines Nuggets

$W = \frac{m}{31.1035} \cdot p$

Begründung : Der erste Ausdruck $\frac{m}{31.1035}$ ergibt die Anzahl an Feinunzen (oz) des Nuggets.

Teil c) Anstieg der weltweiten Förderung

In der Grafik erkennt man, dass der Anstieg (das ist die Differenz der Goldförderung in Tonnen dividiert durch 10) im Zeitraum von 1980 auf 1990 am größten ist.

Teil d) Analyse einer Zeitungsmeldung

Gemäß dem Zeitungsberiocht werden die Prozentsätze zusammengezählt

$p1 := 20\%$ $\qquad p2 := 10\%$ $\qquad p1 + p2 = 30 \cdot \%$

Es ist jedoch so, dass im zweiten Jahr der Anstieg 10% des Wertes von 2010 beträgt - und dieser ist 20% als der ursprüngliche Wert W0

$W_{2010} := W_0 + W_0 \cdot p1 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{Faktor} \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \rightarrow 1.2 \cdot W_0$ Wertzuwachs nach einem Jahr 20%

$W_{2011} := W_{2010} + W_{2010} \cdot p2 \text{ vereinfachen } \rightarrow 1.32 \cdot W_0$ Wertzuwachs nach 2 Jahren

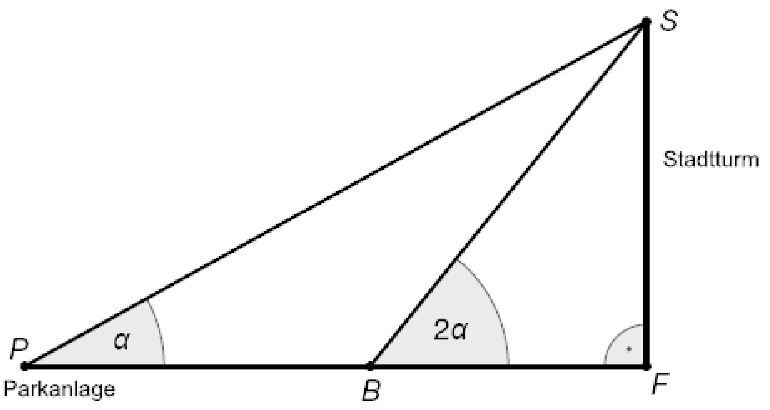
Anders ausgedrück: $(1 + p1) \cdot (1 + p2) = 1.32$ Das heißt: Der Wertzuwachs beträgt 32%

Teil A: Aufgabe 4 - Gold

Teil A: Aufgabe 5 - Stadtturm

Teil A: Aufgabe 5 - Stadtturm

a) Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38{,}2°$.



– Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke *PF* nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist (siehe oben stehende Skizze). *[2 Punkte]*

b) Der Stadtturm mit einer Höhe *h* wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge *b*.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf. *[1 Punkt]*

c) Der 51 m hohe Stadtturm hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche; die Seitenlänge dieses Quadrats beträgt 4 m. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Stadtturms sollen mit Glasplatten verkleidet werden. Pro Quadratmeter beträgt die Masse der verwendeten Glasplatten 30 Kilogramm.

– Dokumentieren Sie, wie Sie die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen berechnen können. *[1 Punkt]*

Teil a) Annäherung an den Stadtturm

$\alpha := 38.2°$ $\qquad h := 51\,\mathrm{m}$

Aus $\tan(\alpha) = \frac{h}{PF}$ ergibt sich $\quad PF := \frac{h}{\tan(\alpha)} = 64.81\,\mathrm{m}$

Analog ist: $\quad BF := \frac{h}{\tan(2\alpha)} = 12.34\,\mathrm{m}$

Damit ergibt sich: $\quad \text{Annäherung} := PF - BF = 52.47\,\mathrm{m}$

Teil b) Formel zur Berechnung des Höhenwinkels aus dem Schatten der Länge b:

Aus $\tan(\alpha) = \frac{h}{b}$ ergibt sich $\quad \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{h}{b}\right)$

.

Teil c) Berechnung der Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen

$a := 4m$

Berechnung der Fläche, welche mit Glas verkleidet wird (2 Rechtecke)

$\text{Fläche} := a \cdot h = 204\,m^2$

$\text{GesamtMasse} := \text{Fläche} \cdot 30\,\frac{kg}{m^2} = 6.12 \times 10^3 \cdot kg$

Die ermittelte Fläche muss mit der Masse von 30 kg pro Quadratmeter mutipliziert werden.

$\text{GesamtMasse} = 6.12 \cdot t$

Die Umrechnung auf Tonnen erfolgt durch eine Multiplikation des Ergebnisses mit 10^{-3}

Teil A: Aufgabe 5 - Stadtturm

Aufgabe 6: Schadstoffausbreitung (Cl1; Cl2; Cl3; Cl5)

Aufgabe 6 - Schadstoffausbreitung (für Cluster 1,2,3,5)

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m³). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung σ = 8,5 mg/m³ beträgt. *[2 Punkte]*

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

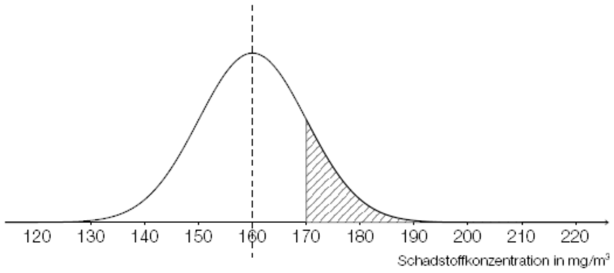


Abbildung 1

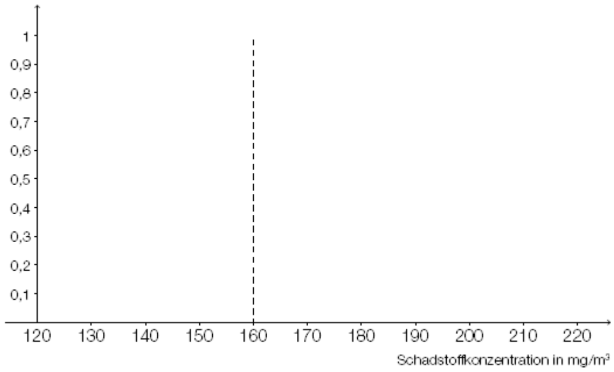


Abbildung 2

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein. *[1 Punkt]*
– Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen. *[1 Punkt]*

c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert μ = 160 mg/m³ und von der Standardabweichung σ = 10 mg/m³ aus.

– Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich). *[1 Punkt]*
– Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen. *[1 Punkt]*

Teil a) Auswertung der Messungen

$$\text{messwerte} := \begin{pmatrix} 152 \\ 166 \\ 149 \\ 153 \\ 172 \\ 147 \\ 157 \\ 164 \\ 157 \\ 168 \end{pmatrix} \cdot \frac{kg}{m^3}$$

messwerte =

	0
0	152
1	166
2	149
3	153
4	172
5	147
6	157
7	164
8	157
9	168

$\frac{kg}{m^3}$

Eingabe der Messwerte in ein Feld

Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung der 10 Messwerte

$n := \text{länge}(\text{messwerte}) = 10$

$x_q := \text{mittelwert}(\text{messwerte}) = 158.5\,\frac{kg}{m^3}$

Variante : $x_q := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \text{messwerte}_i = 158.5\,\frac{kg}{m^3}$

$s := \text{Stdev}(\text{messwerte}) = 8.554\,\frac{kg}{m^3}$

$\sigma := 8.5\,\frac{mg}{m^3}$

Berechnung des Vertrauensbereiches (Konfidenzintervalles) für den Erwartungswert μ bei einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit

$\alpha := 5\%$

$$\mu_{unten} := x_q - qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 158.5\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_{oben} := x_q + qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 158.5\,\frac{kg}{m^3}$$

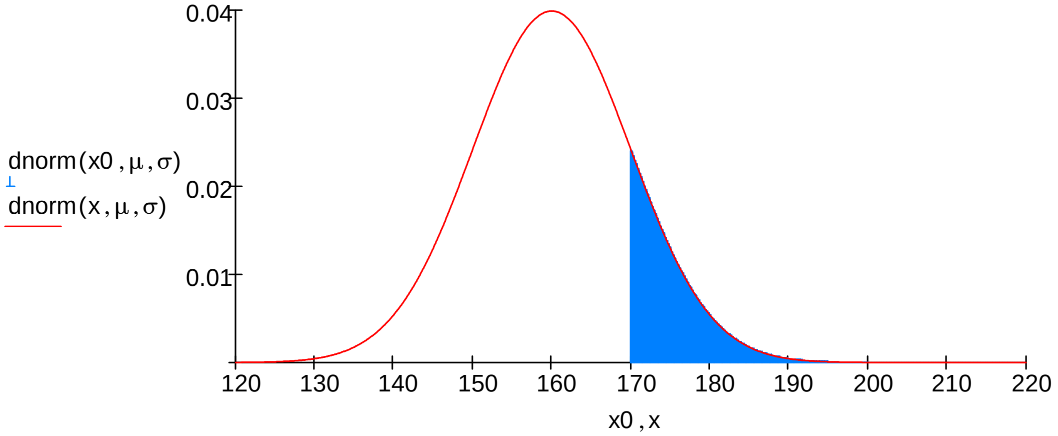
Teil b) Zeichnen von Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung und Interpretation des Zusammenhanges zwischen diesen beiden Funktionen

$\mu := 160$ $\sigma := 10$

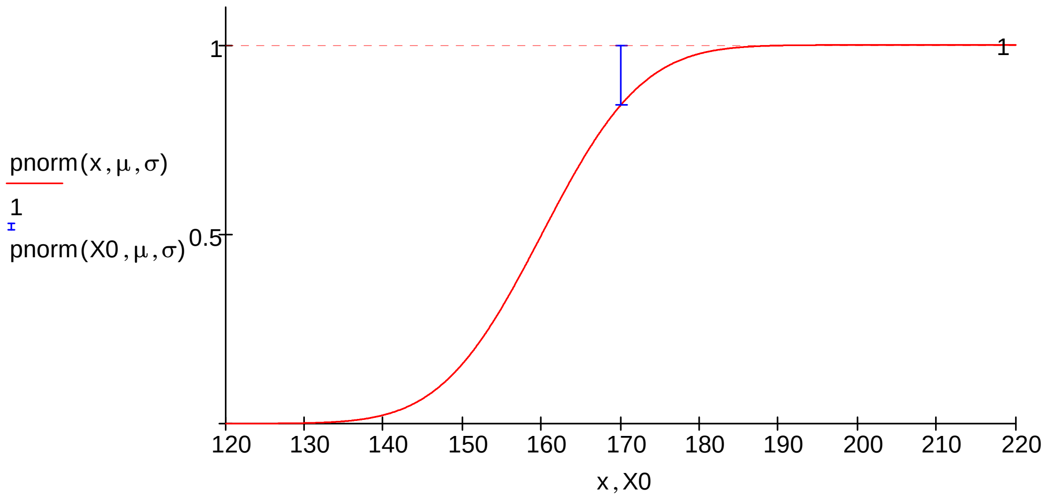
Hinweis : Diese Werte können nicht mit Einheiten angegeben werden, falls man die Standardfunktionen dnorm bzw. pnorm verwenden will, weil dort die Parameter keine Einheiten erlauben.

Darstellung der Dichtefunktion inklusive Markierung des interessierenden Bereiches:

$X0 := 170$ $x0 := X0, X0 + 0.01 .. 200$



Darstellung der Verteilungsfunktion

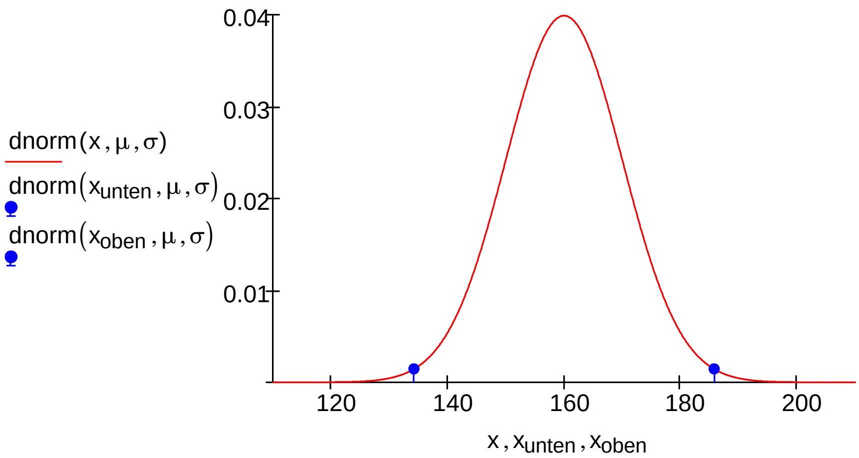


Mathematischer Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion:
Die Verteilungsfunktion stellt das Integral der Dichtefunktion von minus Unendlich bis zu einem gewissen Wert X0 dar umgekehrt ist die Dichtefunktion die Ableitungsfunktion der Verteilungsfunktion an einer bestimmten Stelle x.

Daher ist in der obigen Abbildung die Fläche unterhalb der Dichtefunktion ab den Wert 170 (bzw. X0) gleich dem "Ergänzungswert" auf 1 in der Abbildung der Verteilungsfunktion

Teil c) Ermittlung des (1-α) - Zufallsstreubereiches

$\alpha := 0.01$ $\quad x_{unten} := \text{qnorm}\left(\frac{\alpha}{2}, \mu, \sigma\right) = 134.242$ $\quad x_{oben} := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \mu, \sigma\right) = 185.758$



Wenn man die Irrtums-wahrscheinlichkeit α variiert, so ändert sich entsprechend der Zufallsstreu-bereich (Bereich zwischen den markierten blauen Ordnern).

Eine Erhöhung von α auf 5% Irrtumswahrscheinlichkeit führt dementsprechend zu einer Verringerung der Breite des Zufalsstreubereiches. (**Demonstration durch eine Veränderung von α)**

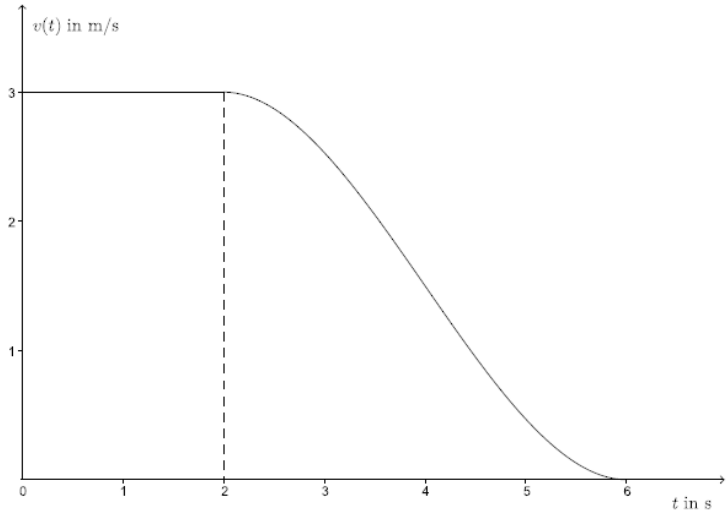
Aufgabe 6: Schadstoffausbreitung (Cl1; Cl2; Cl3; Cl5)

Aufgabe 7: Kransteuerung (Cl1) = Aufgabe 8 bei Cl5

Aufgabe 7 - Kransteuerung (für Cluster 1) (entspricht Aufgabe 8 für Cluster 5)

Beim Transport von Lasten mittels Kränen ist die richtige Steuerung des Abbremsvorgangs wichtig.

a) Der Geschwindigkeitsverlauf beim Transport einer Last während eines Beobachtungszeitraums von 6 Sekunden ist im unten stehenden Diagramm dargestellt. Zuerst bewegt sich die Last mit konstanter Geschwindigkeit. Der Bremsvorgang beginnt nach 2 Sekunden. Die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ist noch 0 m/s². Nach 6 Sekunden ist die Geschwindigkeit gleich 0 m/s und die Beschleunigung gleich 0 m/s².
Der Geschwindigkeitsverlauf soll im Intervall [2; 6] durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.



– Stellen Sie die zur Ermittlung der Polynomfunktion notwendigen Gleichungen auf. *[2 Punkte]*
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion. *[1 Punkt]*

b) Der Geschwindigkeitsverlauf während eines Bremsvorganges eines Krans kann näherungsweise durch eine Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}08 \cdot t^3 - 0{,}6 \cdot t^2 + 5$

t ... Zeit ab Beginn des Bremsvorganges in Sekunden (s) mit $0 \leq t \leq 5$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Krans bei Beginn des Bremsvorganges. *[1 Punkt]*
– Dokumentieren Sie, wie man den Bremsweg in Metern berechnen kann. *[1 Punkt]*

Beim Bremsen tritt eine negative Beschleunigung auf. Den Betrag dieser negativen Beschleunigung bezeichnet man als *Bremsverzögerung*.

– Berechnen Sie die maximale Bremsverzögerung. *[2 Punkte]*

Teil a) Beschreibung des Geschwindigkeitsverlaufes durch eine Polynomfunktion

Für die angeführten Bedingungen werden eine Polynomfunktion 3.Grades (für die Beschreibung Geschwindigkeit) und Ableitung (für die Beschreibung der Beschleunigung) benötigt:

$$v(t,a,b,c,d) := a\cdot t^3 + b\cdot t^2 + c\cdot t + d$$

$$a\_(t,a,b,c,d) := \frac{d}{dt}v(t,a,b,c,d) \rightarrow 3\cdot a\cdot t^2 + 2\cdot b\cdot t + c$$

Vorgabe

$v(2,a,b,c,d) = 3$ Einsetzen der gegebenen Bedingungen

$a\_(2,a,b,c,d) = 0$

$v(6,a,b,c,d) = 0$

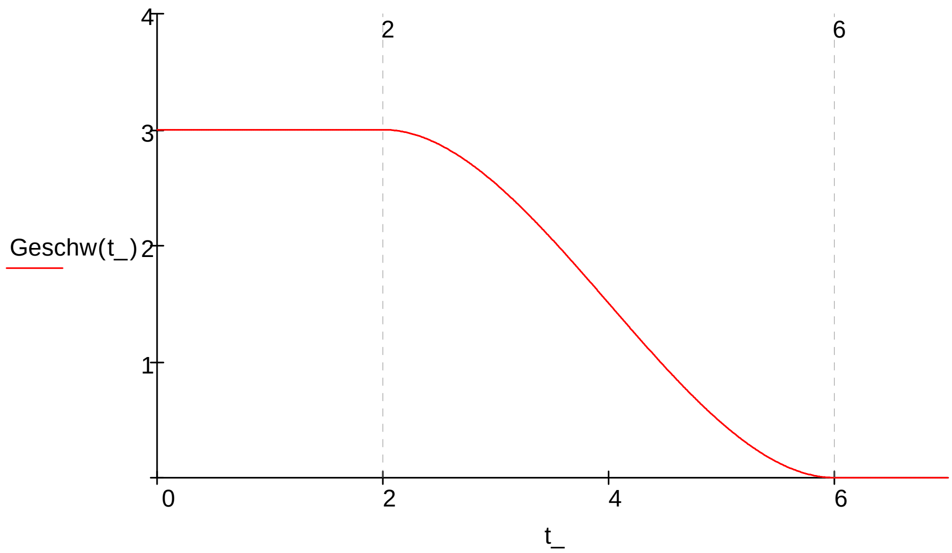
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a,b,c,d) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{27}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.094 \\ -1.125 \\ 3.375 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen der Koeffizienten durch symbolische Auswertung des vorgabe-suchen-Blockes

Grafische Darstellung und damit Überprüfung des Ergebnisses im Vergleich zur Angabe; dabei wird hier von der Mögli
Gebrauch gemacht,stückweise über ein "Programm" die Funktion zu definieren.:

$$\text{Geschw}(t) := \begin{cases} 3 & \text{if } 0 \le t < 2 \\ v(t,a,b,c,d) & \text{if } 2 \le t \le 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$t\_ := 0, 0.01 .. 7$



Teil b) Geschwindigkeit und Bremsvorgang

$v(t) := 0.08 \cdot t^3 - 0.6 \cdot t^2 + 5$

Das ist der Geschwindigkeitsverlauf ab Beginn des Bremsvorganges

$0s \le t \le 5s$

$v(0) = 5$ in m/s $v(5) = 0$ in m/s

Geschwindigkeiten am Anfang und am Ende des Bremsvorganges

Da die Geschwindigkeit v(t) die Ableitung des Weges nach der Zeit ist ($v = \frac{ds}{dt}$) muß umgekehrt gelten:

$$s = \int v(t)\,dt$$

Daher gilt für den Bremsweg:

$$s_{brems} := \int_0^5 v(t)\,dt = 12.5$$ in m

Gesucht ist nun die maximale Bremsverzögerung (negative Beschleunigung). Dazu wird das (lokale) Minimum der Beschleunigungsfunktion a(t) im gegebenen Intervall $0s \le t \le 5s$

$$a(t) := \frac{d}{dt} v(t)$$

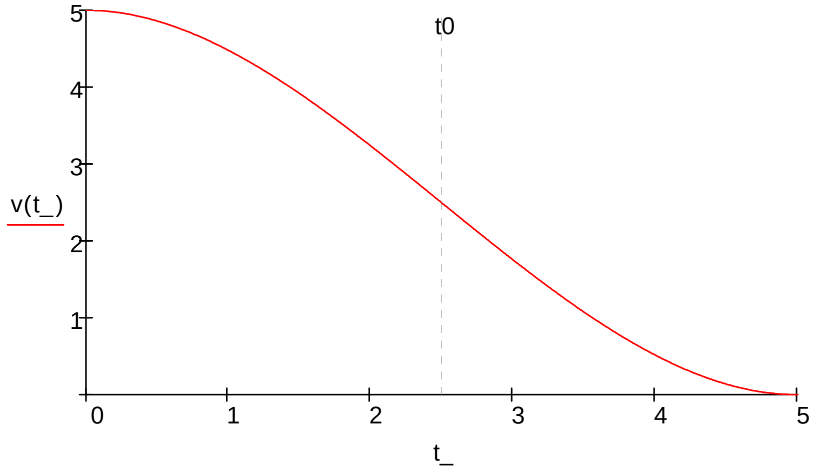
$$t0 := \frac{d}{dt} a(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 2.5$$

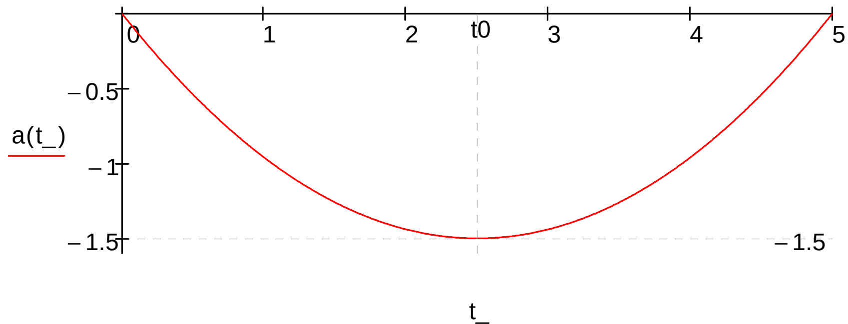
Es gibt nur eine Nullstelle der Ableitungsfunktion - diese entspricht dem Zeitpunkt des Wendepunktes der Geschwindigkeitsfunktion (siehe untenstehende Grafiken)

$a(t0) = -1.5$ in m/s^2

Die maximale Bremsverzögerung

Grafische Veranschaulichung :





Aufgabe 7: Kransteuerung (Cl1) = Aufgabe 8 bei Cl5

Aufgabe 7: Bakterienkultur (Cl2; Cl3; Cl5)

Aufgabe 7 - Bakterienkultur (für Cluster 2,3,5)

a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf. *[1 Punkt]*
- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. *[1 Punkt]*
- Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind. *[1 Punkt]*
- Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat. *[1 Punkt]*

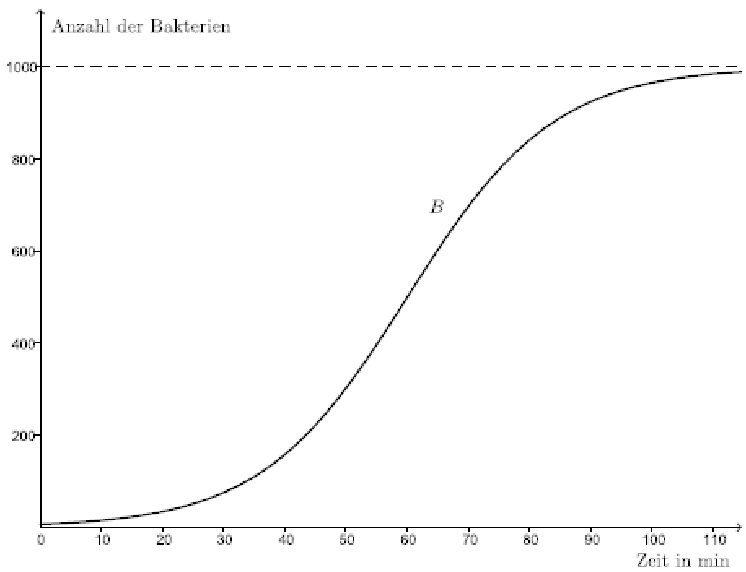
b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

- Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt. *[1 Punkt]*
- Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind. *[1 Punkt]*

c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist. *[1 Punkt]*

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8{,}35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1\,000 - B) \quad \text{mit} \quad B > 0$$

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt. *[1 Punkt]*

$N := N$ Überschreiben von weiter oben durchgeführten Defintion, um mit "N" bzw. "k" symbolische Berechnungen
$k := k$ durchführen zu können

Punkt a) Lösung der Differentialgleichung

Gemäß Angabe ist die 1.Ableitung der Funktion N proportional zu N. Nach Einführung einer Proportionalitätskonstante k erhält man daher

$$\frac{d}{dt}N = k \cdot N$$

Trennen der Variablen führt auf die Gleichung: $\frac{1}{N}dN = k \cdot dt$

Beide Seiten können nun (getrennt) integriert werden:

$$\int \frac{1}{N}\,dN \rightarrow \ln(N) \qquad \int k\,dt \rightarrow k \cdot t$$

Die Integrationskonstante muss (extra) berücksichtigt werden (hier CC genannt). Dann kann die Funktion N(t) wie folgt definiert werden:

$$N(t) := \ln(N) = k \cdot t + CC \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, N\\ \text{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow e^{CC} \cdot e^{k \cdot t}$$

Die Konstante e^{CC} wird nun als C geschrieben. Diese Konstante wird durch Einsetzen der Anfangsbedingung N(0)=50 bestimmt:

$$50 = C \cdot e^{k \cdot 0} \text{ auflösen}, C \rightarrow 50 \qquad N(t) := 50 \cdot e^{k \cdot t}$$

Die Konstante k wird durch Einsetzen von N(100)=750 ermittelt:

$$k := 750 = N(100) \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{\ln(15)}{100} = 0.027$$

Mit dem eben errechneten Wert von k ist nun die Funktion eindeutig bestimmt

$$N(t) := 50 \cdot e^{k \cdot t}$$

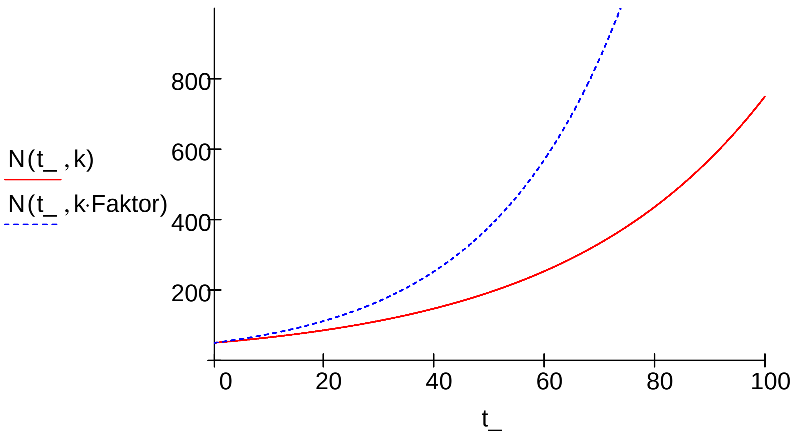
Es kann wie verlangt die Anzahl der Bakterien zu einem anderen Zeitpunkt (3 h = 180 Minuten) bestimmt werden

$N(180) = 6.545 \times 10^3$ Also etwa 6500 Bakterien

$$N(t,k) := 50 \cdot e^{k \cdot t}$$

Nun wird noch graphisch gezeigt, wie sich eine Vergrößerung der Wachstumsrate k auf den Funktionsverlauf auswirkt:

$t\_ := 0, 0.01 .. 100$ $\quad$ $Faktor := 1.5$



Punkt b) Exponentielle Ausgleichsfunktion

Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

$$daten := \begin{array}{c} \text{Zeit t} \quad \text{Bakterienanzahl} \\ \begin{pmatrix} 15 & 110 \\ 20 & 120 \\ 25 & 156 \\ 30 & 185 \\ 35 & 190 \\ 40 & 245 \\ 45 & 274 \\ 50 & 340 \\ 55 & 360 \\ 60 & 430 \end{pmatrix} \end{array}$$

$Zeit := daten^{\langle 0 \rangle}$ $\quad$ $Bakt := daten^{\langle 1 \rangle}$

$n := länge(Zeit) = 10$

Die Daten werden aus der Matrix herausextrahiert (*man könnte die Daten natürlich auch gleich in getrennte Vektroen schreiben*)

Die Suche nach der Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion zur Beschreibung der Bakterienzahl in Abhängigl von der Zeit kann in Mathcad sehr unterschiedlich durchgeführt werden, wobei auf Grund unterschiedlicher Vorgangsweisen auch durchaus unterschiedliche Ergebnisse herauskommen können. Wegen Verwendung einer anderen Technologie kommt es hier auch zu Abweichungen zur Lösung im offiziellen Korrekturheft. Speziell die Lösung über di Funktion "minfehl" ist jedoch von sehr großem didaktischen Interesse - daher soll dies hier genauer ausgeführt werden!

Zunächst die Lösung über die in Mathcad eingebaute FIT-Funktion für Exponentialfunktionen:

$$expanp(Zeit, Bakt) = \begin{pmatrix} 103.62944 \\ 0.02529 \\ -44.52119 \end{pmatrix}$$

$$y(t) := 103.629 \cdot e^{0.02529 \cdot t} - 44.5212$$

Erläuterung: Die Funktion "expanp" bzw. "expfit" liefert einen Vektor mit den Werten a,b, und c für eine Ausgleichsfunktion der Form:

$$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x} + c$$

Daher weicht das Ergebnis auch (recht deutlich!) von der Lösungserwartung des BIFIE ab. Dort steht:

$$f(t) = 69.43 \cdot e^{0.03065 \cdot t}$$

Also wurde hier (wie das wohl die meiste zur Verfügung stehende Technologie automatisch macht) als Ansatz eine Exponentialfunktion der Form $y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ gewählt, sodass hier ein anderes Ergebnis herauskommt. Natürlich erscheint dieser Ansatz für das gestellte Problem logischer und besser, der dritte Parameter (Verschiebung auf der y-Achse) ergibt hier keinen praktischen Sinn. Jedoch wird es viele Probleme in der Praxis geben (z.b. Abkühlungsvorgänge) wo gerade dieser Parameter höchst sinnvoll erscheint und ansonsten möglicherweise zusätzlich angegeben oder geschätzt werden muss.
Wie schon oben erwähnt kann jedoch das Prinzip der kleinsten Quadrate zur Ermittlung von Ausgleichsfunktionen in M didaktisch besonders wertvoll über die Funktion "minfehl" erfolgen, was nun demonstriert wird:

Direkte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate mit Hilfe der Funktion "minfehl":

$f(x,a,b) := a \cdot e^{b \cdot x}$ Funktionsansatz für die Ausgleichsfunktion unter Berücksichtigung der unbekannten Parameter a und b

$$sumq(a,b) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(Bakt_i - f(Zeit_i, a, b)\right)^2$$

Das ist die "Zielfunktion", welche gemäß dem "Prinzip der kleinste Quadrate" minimiert werden soll (Quadrierte Summe aller y-Abstände zwischen den gemessenen Werten und den Werten der Ausgleichsfunktion zu den in den Daten angeführten Zeitpunkten!

$a := 10$ $b := 0.01$ Angabe von "Startwerten" für die numerische Lösungssuche (diese müssen speziell bei der Exponentialfunktion einigermaßen "passen")

Vorgabe

$$sumq(a,b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := Minfehl(a,b) = \begin{pmatrix} 71.72973 \\ 0.02992 \end{pmatrix}$$

Über den vorgabe-minfehl-Block werden nun jene Parameter a, b gesucht, bei denen die Zielfunktion (die "Quadratsumme") möglichst nahe bei "0" ist, also minimal ist.
Die Funktion "minfehl" arbeitet nach numerischen Verfahren, welches über die rechte Maustaste auch unterschiedlich ausgewählt werden kann

Es soll hier aber auch noch eine dritte Variante demonstriert werden: Die oben angeführte Zielfunktion "sumq" nach den Prinzip der kleinsten Quadrate ist von 2(!) unabhängigen Variablen a und b abhängig. Daher kann versucht werden, die Lösung zu finden, indem man die partiellen Ableitungen der Funktion "sumq" nach a bzw. b gleich 0 setzt und das Gleichungssystem löst. Dies gelingt hier tatsächlich:

$a := 10$ $b := 0.1$

Vorgabe

$$\frac{d}{da} sumq(a,b) = 0$$

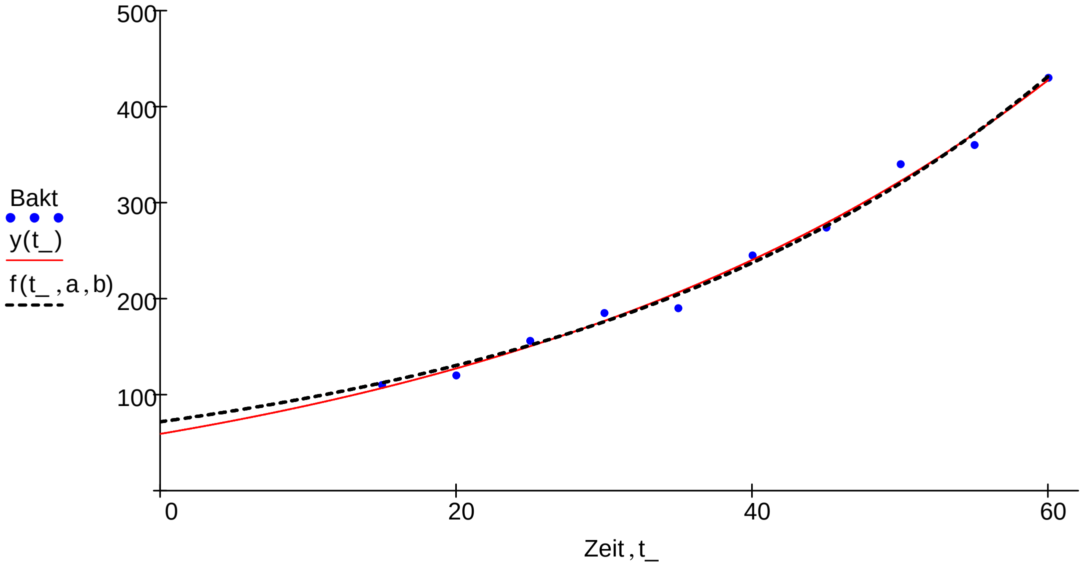
$$\frac{d}{db} sumq(a,b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := Suchen(a,b) = \begin{pmatrix} 71.72978 \\ 0.02992 \end{pmatrix}$$

Vergleich der Ergebniss:

Zunächst soll der Vergleich graphisch erfolgen. Die letzten beiden Verfahren liefern praktisch keinen Unterschied, sodass sie hier zusammengefasst werden.
Es werden verglichen:
* die gegebenen Datenpunkte (blaue Punkte)
* Die Ausgleichsfunktion über minfehl (Ansatz : $f(t,a,b) = a \cdot e^{b \cdot t}$) - schwarz strichlierte Linie.
* Die Ausgleichsfunktion y(t), welche mit der internen Funktion expanp ermittelt wurde nach dem Ansatz
$y(t) = a \cdot e^{b \cdot x} + c$ (rote Linie)

$t\_ := 0, 0.01 .. 60$



Ein rechnerischer Vergleich kann über die Summe der Fehlerquadrate erfolgen. Je kleiner diesre Wert ist, desto bess natürlich grundsätzlich die Anpassung:

$$SSQ := \sum_{i=0}^{n-1} \left(y(Zeit_i) - Bakt_i\right)^2 = 934.949$$

Das ist die Fehlerquadratsumme für die Funktion

y(t) mit dem Ansatz $y(t) = a \cdot e^{b \cdot x} + c$

$$sumq(a, b) = 1.021 \times 10^3$$

Das ist die Fehlerquadratsumme für die Funktion, welche über minfehl bzw. die partiellen Ableitungen ermittelt wurde mit dem Ansatz : $f(t, a, b) = a \cdot e^{b \cdot t}$

$$sumq(69.43, 0.03065) = 1.076 \times 10^3$$

Das ist die Fehlerquadratsumme mit jenen Werten a, b der Funktion $f(t, a, b) = a \cdot e^{b \cdot t}$, wie sie im BIFIE-Korrekturheft als Lösung angegeben sind. (Übrigens liefert EXCEL (auch?) genau diese Werte.

FAZIT :
Nimmt man die Fehlerquadratsumme als Maßstab, so ist die angegebene lösung die "schlechteste", während der dreiparametrige Ansatz über die Funktion "expanp" bzw. "expfit" das beste Ergebnis liefert.
Allerdings sind diese Unterschiede bezüglich der Bewertung kein Problem, denn im Korrekturheft steht aus gutem Grund der folgende Satz:
Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.
Jedoch erscheint es mir aus didaktischem Grund sehr sinnvoll zu sein, diese Unterschiede auch aufzuzeigen!

Punkt c) Diskussion der Logistischen Funktion

Die in der Angabe gezeichnete Funktion ist eine logistische Funktion der Forr

$$B(t) := \frac{1000}{1 + 150 \cdot e^{-8.35 \cdot 10^{-2} \cdot t}}$$

Dies kann durch Lösen der gegebenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} B = 8.35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1000 - B)$$ mit B>0

durch Trennen der Variablen und eine (etwas komplizierte Substitution) rechnerisch hergeleitet werden, siehe z.B: **statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node183.html**

Es soll ermittelt werden, wieviele Minuten nach Beginn der Beobachtung das WACHSTUM der Bakterien am größten ist.

Also muß die WACHSTUMSFunktion (und damit die 1.Ableitung $\frac{d}{dt}B(t)$) an dieser Stelle maximal werden.

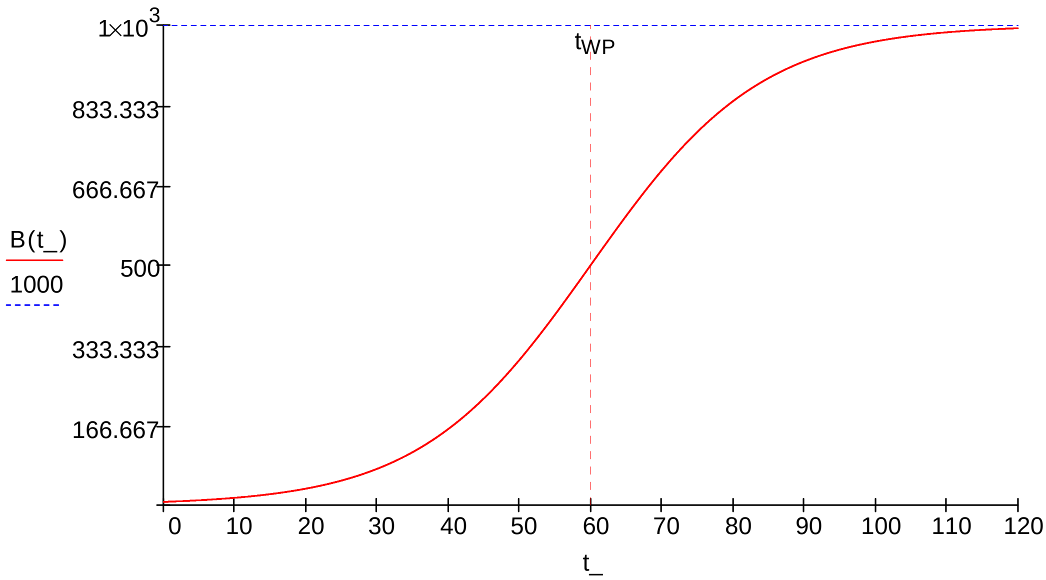
Dieser Zeitpunkt kann daher damit ermittelt werden, dass man die 2.Ableitung ("die Ableitung der Ableitung") gleich 0 setzt und damit den WENDEPUNKT der Funktion B(t) ermittelt:

$$t_{WP} := \frac{d^2}{dt^2}B(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{2000 \cdot \ln(150)}{167} = 60.008$$

Also: Nach etwa 60 Minuten ist der Anstieg de Bakterienanzahl am größten!

Zeichnerische Darstellung:

$t\_ := 0, 0.01 .. 120$



Laut Angabe aoll auch noch argumentiert werden, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.
Dazu muß die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}B = 8.35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1000 - B) \qquad \text{mit } B>0$$

einen positiven Wert liefern [entspricht einer positiven Steigung - also einer Zunahme - der Funktion B(t).]
Dies ist der Fall für B<1000 - die anderen Faktoren sind ohnehin positiv.

Aufgabe 7: Bakterienkultur (Cl2; Cl3; Cl5)

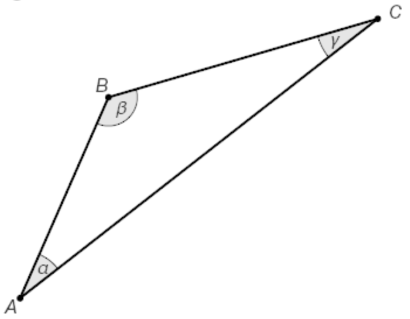
Aufgabe 8: Rohrleitungen (Cl1; Cl3)

Aufgabe 8 - Rohrleitungen (für Cluster 1 und 3)

Zu beachten: Bezüglich Teil a) gibt für die beiden Clustern eine unterschiedliche Aufgabenstellung; Teil b und c sind identisch

Teil a) bei CLUSTER 1:

a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, geradlinig zwischen den Punkten A, B und C verlegt werden.

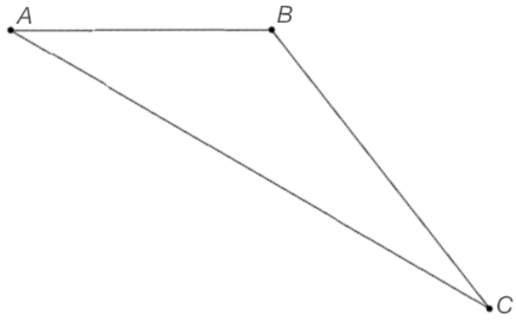


Die folgenden Daten des Dreiecks ABC sind bekannt:
$\overline{AB} = 50$ m, $\overline{AC} = 80$ m, $\gamma = 20°$. Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel.

– Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke dieses Dreiecks (beide Winkel und Länge der fehlenden Seite). *[2 Punkte]*

Teil a) bei CLUSTER 3:

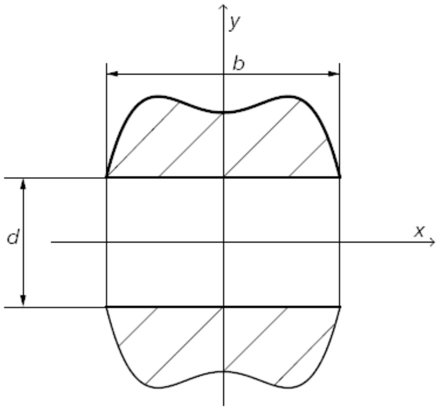
a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, zwischen den Punkten A, B und C im Raum verlegt werden.



Zur Berechnung eines Winkels wird die folgende Formel verwendet: $\cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$

– Zeichnen Sie in der obigen Skizze den mit dieser Formel berechneten Winkel ϕ mit dem Eckpunkt B als Scheitel ein. *[1 Punkt]*
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. *[1 Punkt]*

b) Ein Verbindungsstück für 2 Rohre soll untersucht werden.
Das Verbindungsstück ist rotationssymmetrisch bezüglich der x-Achse. Die obere Begrenzungskurve der Schnittfläche, die in der nachstehenden Grafik schraffiert dargestellt ist, wird durch die Funktionsgleichung $y = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ beschrieben, wobei x und y Längen in Dezimetern beschreiben. Der innere Durchmesser des Verbindungsstückes ist $d = 2$ dm.



– Berechnen Sie die Breite b des Verbindungsstückes. *[1 Punkt]*
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes mithilfe der Integralrechnung. *[1 Punkt]*

Das Verbindungsstück ist aus einem Material mit der Dichte $\rho = 900\ \text{kg/m}^3$ gefertigt.

– Berechnen Sie die Masse des Verbindungsstückes. *[1 Punkt]*

c) In einem Rohr nimmt der Druck durch die Reibung ab. Er wird also mit zunehmender Entfernung vom Rohranfang geringer.
Entsprechend dem Gesetz von Hagen-Poiseuille kann der Druck in einem Rohr in Abhängigkeit von der Rohrlänge x durch eine lineare Funktion p beschrieben werden.

– Zeigen Sie, dass der Druckverlust Δp proportional zur Rohrlänge ist; d.h., für alle x ist $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = c \cdot x$ mit c konstant. *[1 Punkt]*

Der Druck in einem Rohr wird an 2 Stellen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Rohrlänge in m	Druck in bar
5	3,998
33	3,901

– Bestimmen Sie mithilfe der linearen Interpolation den Druck bei einer Rohrlänge von 14 m. *[2 Punkte]*
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Steigung der linearen Funktion p in diesem Sachzusammenhang hat. *[1 Punkt]*

Teil a) Berechnung der fehlenden Bestimmungsstücke des Dreiecks: (CLUSTER 1)

Gegeben sind: $AB := 50m$

$AC := 80m$

$\gamma := 20Grad$

Anwendung des Sinussatzes $\frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{AC}{\sin(\beta)}$

führt zu: $\beta 1 := \operatorname{asin}\left(\frac{AC \cdot \sin(\gamma)}{AB}\right) = 33.2 \cdot Grad$

Der Rechner liefert mit der Arcussinusfunktion aber nur einen spitzen Winkel. Laut Angabe ist aber bei β der stumpfe Winkel zu nehmen, daher:

$\beta := 180\text{Grad} - \beta 1 = 146.8 \cdot \text{Grad}$

$\alpha := 180\text{Grad} - (\beta + \gamma) = 13.2 \cdot \text{Grad}$

Erneute Anwendung des Sinussatzes auf $\dfrac{AB}{\sin(\gamma)} = \dfrac{BC}{\sin(\alpha)}$

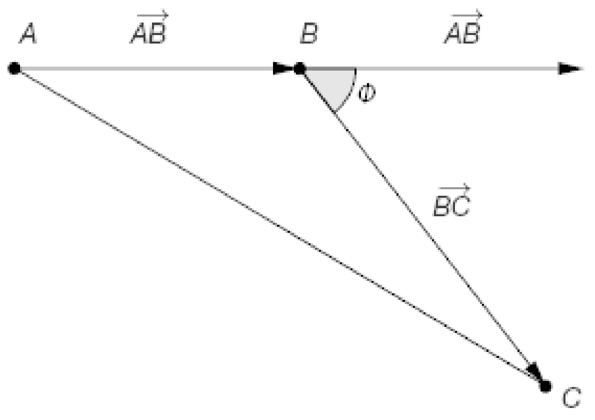
führt zu: $BC := \dfrac{AB \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 33.3\,\text{m}$

Teil a) Winkelberechnung (CLUSTER 3)

Einer Formelsammlung entnimmt man die folgende Formel für den Winkel φ **zwischen zwei Vektoren a und b:**

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Daher ist φ hier der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.
Allerdings müssen die beiden Vektoren in den gleichen Anfangspunkt geschoben werden (siehe Skizze), wodurch sic eingezeichnete Winkel φ ergibt.



Flächenformel :

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ liefert die Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Die Fläche des Dreicks ergibt sich daher zu: $A = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Teil b) Berechnung von Volumen und Masse des Verbindungsstückes gemäß der gegebenen Skizze

$y(x) := 2 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}$ Funktionsgleichung der oberen Begrenzung

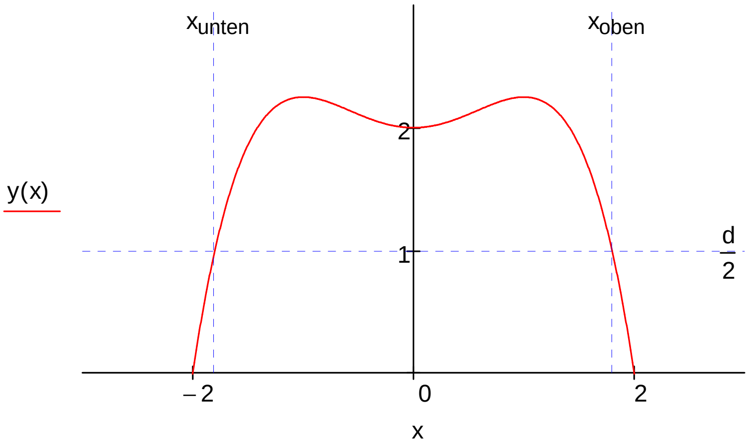
$d := 2$ Innerer Durchmesser des Verbindungsstückes

Zur Berechnung der Breite des Verbindungsstückes muß der Schnittpunkt der Funktion mit der Parallele zur x-Achse bei y= d/2 gesucht werden

$$xs := y(x) = \frac{d}{2} \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+1} \\ \sqrt{1-\sqrt{5}} \\ -\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ -\sqrt{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.799 \\ 1.112i \\ -1.799 \\ -1.112i \end{pmatrix}$$

Da es sich um eine Gleichung 4.Grades handelt, werden auch 4 Lösungen der Gleichung bei symbolischer Rechnung gefunden, es gibt aber nur 2 reelle Lösungen, wie man auch aus der Grafik erkennt

$x_{oben} := xs_0 = 1.799$ $x_{unten} := xs_2 = -1.799$



Für die Breite gilt daher: $b := x_{oben} - x_{unten} = 3.598$

Zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes wird vom Volumen des gesamten Rotationskörper das Volumen des "inneren Zylinders" abgezogen:

$$V_{Verbindungstück} := \pi \cdot \int_{x_{unten}}^{x_{oben}} y(x)^2\, dx - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot b = 35.466$$ in dm^3

Bei der Berechnng der Masse gemäß $m = V \cdot \rho$ muß auf die Einheiten geachtet werden (Umrechnung von kg/m^3 in kg/dm^3).
Daher werden jetzt (nachträglich) Einheiten verwendet:

$dm := 10^{-1} m$ $V_{Verbindungstück} := 35.466 dm^3$

$$\rho := 900 \frac{kg}{m^3} = 0.9 \cdot \frac{kg}{dm^3}$$

$m_{Verbindungsstück} := V_{Verbindungstück} \cdot \rho = 31.919 kg$ Das ist die gesuchte Masse

Teil c) Rohrdruck

$c := c$ $d := d$ $k := k$ Diese Definitionen dienen lediglich dazu, die Variablen c und d (deren Werte weiter oben in anderem Zusammenhang bereits festgelegt wurden, für neue symbolische Berechnungen verfügbar zu machen.

$p(x) := c \cdot x + d$ Festlegung der linearen Funktion p gemäß dem Gesetz von Hagen-Poiseuille

$\Delta p(x) := p(x) - p(0) \rightarrow c \cdot x$ Das sollte gezeigt werden!

Zur Linearen Interpolation der Funktion bei einer rohrlänge von 14m wird zunächst eine lineare Funktion durch die gegebenen Punkte gelegt

$p(x,k,d) := k \cdot x + d$

Vorgabe

Das Gleichungssystem zum Aufsuchen der Größen k und d

$p(5,k,d) = 3.998$

$p(33,k,d) = 3.901$

$$\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} := \text{Suchen}(k,d)\ \text{Gleitkommazahl},3 \rightarrow \begin{pmatrix} -0.00346 \\ 4.02 \end{pmatrix}$$

$p(14,k,d) = 3.972$ bar

Die Steigung k hat die Einheit $\frac{\text{bar}}{\text{m}}$ und gibt daher an, um welchen Wert der Luftdruck in bar pro zusätzlichem Meter Rohrlänge abnimmt

Aufgabe 8: Rohrleitungen (Cl1; Cl3)

Aufgabe 8: Thermistor (Cl2)

Aufgabe 8 - Thermistor (für Cluster 2)

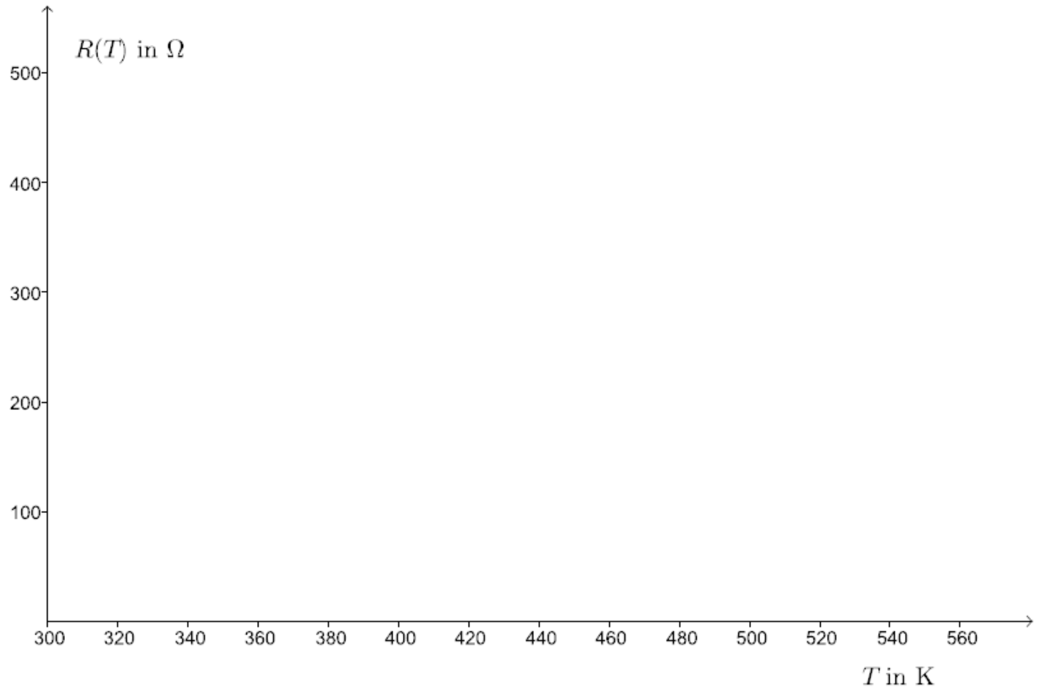
Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Die Funktion R beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

T ... Temperatur in Kelvin (K)
$R(T)$ ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)
a ... Konstante in Ω ($a > 0$)
b ... Konstante in K ($b > 0$)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion R monoton fallend ist. *[1 Punkt]*

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion R im Bereich $300 \text{ K} \leq T \leq 550 \text{ K}$ für $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500$ K im nachstehenden Koordinatensystem. *[1 Punkt]*



b) Verwenden Sie $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500$ K.

– Linearisieren Sie die Funktion R an der Stelle $T_0 = 373{,}15$ K, d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von R im Punkt $(T_0 | R(T_0))$. *[2 Punkte]*
– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle $T = 390$ K den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion R berechnet. *[1 Punkt]*

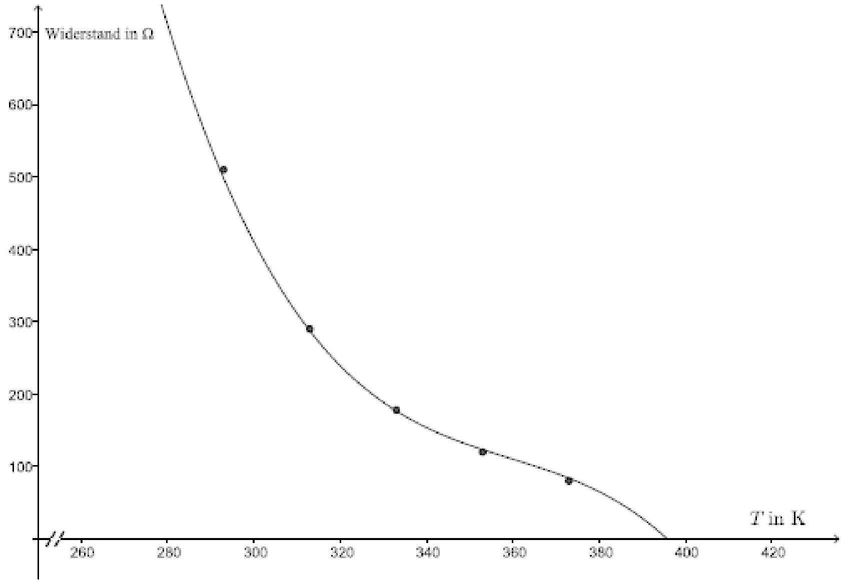
c) Für einen bestimmten Heißleiter wurden folgende Werte gemessen:

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion. *[1 Punkt]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion P bereits eingezeichnet.



– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat. *[1 Punkt]*

$a := a \qquad b := b$

Diese Definition dient lediglich dazu, die bereits weiter oben definierten Werte für a und b für symbolische Berechnungen zu "überschreiben" und damit verfügbar zu machen.

$R(T,a,b) := a \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Definition der Funktion R für den elektrischen Widerstand des Thermistors gemäß Angabe

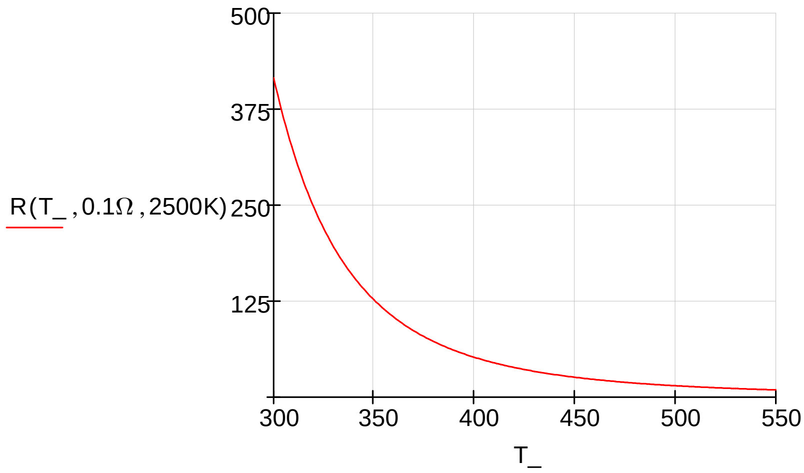
Teil a) Funktionsverlauf der Funktion R(T)

$$\frac{d}{dT}R(T,a,b) \rightarrow -\frac{a \cdot b \cdot e^{\frac{b}{T}}}{T^2}$$

Die Ableitung der Funktion ist für a>0 und b>0 IMMER NEGATIV. Daher muß die Funktion R monoton fallend sein.

(Erkennt man natürlich auch daran, dass der Faktor $e^{\frac{b}{T}}$ für größer werdendes T immer kleiner wird.)

Zeichnen der Funktion für a=0,1 Ω und b= 2500 K im angegebenen Bereich: $T\_ := 300K, 301K .. 550K$



Teil b) Linearisierung der Funktion R(T)

$a := 0.1\Omega$ $b := 2500K$ $R(T) := a \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Linearisierung bei $T_0 := 373.15K$

Ermittlung der Steigung in T_0 :

$$k := \frac{d}{dT}R(T) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, T = T_0 \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow -\frac{1.46 \cdot \Omega}{K} = -1.46 \cdot \frac{\Omega}{K}$$

Ermittlung des Achsenabschnitts d

$$d := R(T_0) - k \cdot T_0 = 626.017\Omega$$

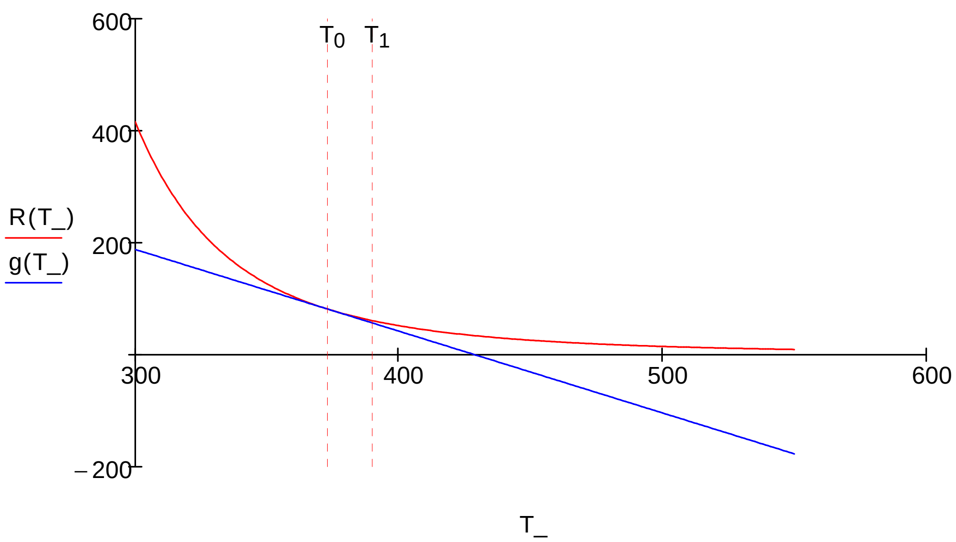
Damit lautet die Geradengleichung: $g(T) := k \cdot T + d$ mit den obigen Werten von k und d.

Relativer Fehler an der Stelle T1

$T_1 := 390K$

Durch Variieren von T_1 erkennt man, wie die Größe des relativen Fehlers von der Nähe zu T_0 abhängt (siehe auch Diagramm)

$$\frac{|R(T_1) - g(T_1)|}{R(T_1)} = 6.888 \cdot \%$$



Teil c) Ausgleichsfunktion

$$v_T := \begin{pmatrix} 293 \\ 313 \\ 333 \\ 353 \\ 373 \end{pmatrix} \quad \text{in K} \qquad v_R := \begin{pmatrix} 510 \\ 290 \\ 178 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega$$

Durch diese Daten soll eine Polynomfunktion 3.Grades als Ausgleichsfunktion gelegt werden.
Dies wird hier auf 2 Arten vorgeführt:

Variante 1: Verwendung der Funktion minfehl (Erklärungen siehe auch Aufgabe 7)

$y(x,a,b,c,d) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ Ansatz der Polynomfunktion

$sumq(a,b,c,d) := \sum_{i=0}^{4} \left(v_{R_i} - y\left(v_{T_i},a,b,c,d\right)\right)^2$ Zielfunktion (Summe der Fehlerquadrate)

$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1$

Vorgabe

$sumq(a,b,c,d) = 0$ Minmierung der Zielfunktion ("kleinste Fehlerquadrate")

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \text{Minfehl}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} -2.075\times 10^{-3} \\ 1.089 \\ -35.345 \\ -3.13\times 10^{4} \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Ausgleichsfunktion

Variante 2: Verwendung der eingebauten Funktion "regress" für die Polynomische Regression n-ten Grades

In den unten berechneten Vektor vs werden ab der Stelle vs_3 die koeffizienten des Polynoms hineingeschrieben

$$vs := \text{regress}\left(v_T, v_R, 3\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4.428\times 10^{4} \\ -364.987 \\ 1.01 \\ -9.375\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$a := vs_6 = -9.375\times 10^{-4}$

$b := vs_5 = 1.01$

$c := vs_4 = -364.987$

$d := vs_3 = 4.428\times 10^{4}$

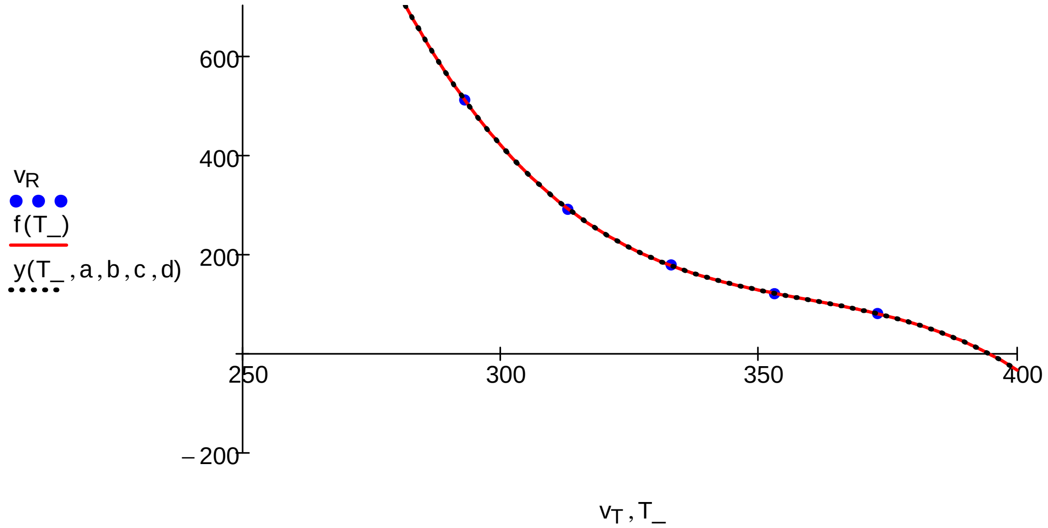
Die eingebaute Funktion "interp" definiert die Funktion (auch ohne explizite Verwendung der Koeffizienten a,b,c,

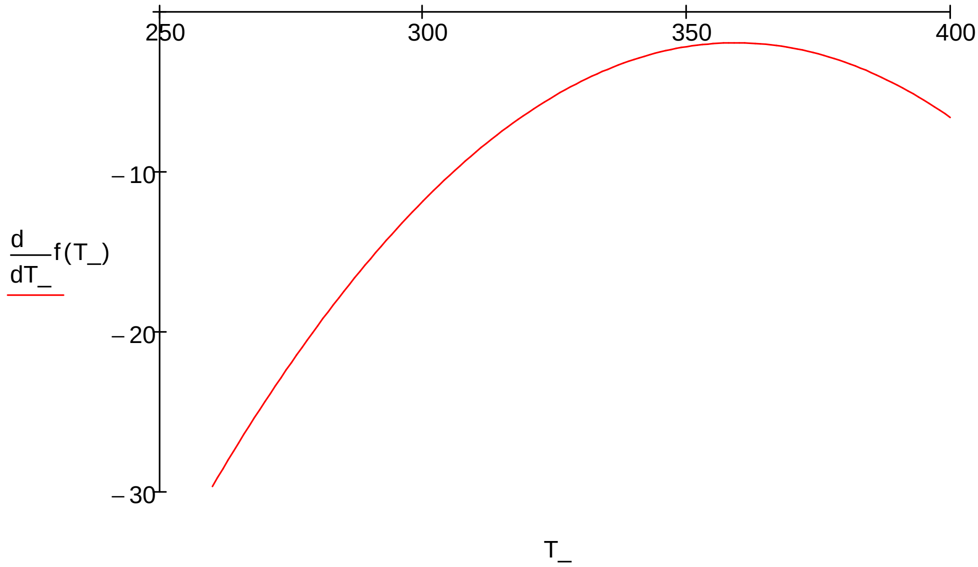
$f(x) := \text{interp}\left(vs, v_T, v_R, x\right)$ bzw. $f(x) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

Hinweis : Das Verwenden der Einheiten ist hier etwas mühsam, deswegen wurden sie hier im Rechenteil weggelas

In der folgenden Grafik werden die Ergebnisse verglichen - wie man sieht sind sie decklungsgleich.

T_ := 260 , 261 .. 400   T_ in K





Wie man sieht, hat die 1.Ableitung der gezeichneten Polynomfunktion KEINE reellen Nullstellen.Reelle Nullstellen w
nur bei Extremwerten (lokales Minimum bzw. lokales Maximum) der Ausgangsfunktion f auftreten.

Aufgabe 8: Thermistor (Cl2)