Wilfried Rohm

Polynominterpolation (Varianten)

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Lösen von Gleichungssysteme, Matrizenrechnung, Mathcad-Programm

- Kurzzusammenfassung

  Ausgehend von einer einfachen Aufgabenstellung, bei der eine Polynomfunktion 2.Grades zu Interpolationszweckeen gesucht wird, wird gezeigt, wie dieses Problem mit steigender Allgemeinheit in Mathcad gelöst werden kann. Schließlich wird ein kleines Programm vorgestellt, mit dem ein Interpolationspolynom beliebigen Grades erstellt werden kann. Auch die mathcadspezifischen Funktionen werden vorgestellt. Der Artikel sollte sich zum Selbststudium (auch für Schüler!) eignen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3. / 5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  erstellt mit Mathcad 11

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Das Einstiegsbeispiel stammt aus dem HTL-Lehrbuch Timischl/Kaiser, Band 3.

Der Kraftstroffverbrauch eines PKW pro 100 km wurde für drei Geschwindigkeiten festgestellt:
6,0 Liter bei 70 km/h, 7,1 Liter bei 90 km/h und 9,9 Liter bei 120 km/h.
Berechne durch ein geeignetes Interpolationspolynom näherungsweise den Treibstoffverbrauch für eine Geschwindigkeit von 100 km/h.

Dieses Beispiel dient als Ausgangspunkt für die Lösung des Problems nach verschiedenen Methoden. Ziel ist, durch zunehmende Allgemeinheit der Methode bzw. des Lösungsverfahrens schließlich einen Weg zu finden, wie nach Eingabe einer völlig anderen Matrix die Lösung automatisch ermittelt wird.

1. Mit dem Lösungsblock vorgabe - suchen (speziell auf das Beispiel zugeschnitten)
2. Mit Matrizenrechnung (aber auch auf das spezielle Beispiel zugeschnitten)
3. Mit Matrizenrechnung - allgemeine Formulierung
4. Mit einem kleinen Mathcadprogramm, das beliebige Eingabematrizen erlaubt
5. Mit Hilfe der eingebauten Mathcad-Funktionen **regress** und **interp**

$$p := \begin{pmatrix} 70 & 8.0 \\ 90 & 7.1 \\ 120 & 9.9 \end{pmatrix} \qquad px := p^{\langle 0 \rangle} \qquad py := p^{\langle 1 \rangle} \qquad x0 := 100$$

Wir legen als Interpolationsfunktion eine Polynomfunktion 2 Grades durch die Punkte

Variante 1: vorgabe-suchen

Variante 1 **Lösung eines Gleichungssystems in normaler (ausführlicher) Schreibweise.**
Nachteil: Unflexibel bei Änderungen oder mehr Punkten etc.

Vorgabe

$$a \cdot 70^2 + b \cdot 70 + c = 8.0$$

$$a \cdot 90^2 + b \cdot 90 + c = 7.1$$

$$a \cdot 120^2 + b \cdot 120 + c = 9.9$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a, b, c) \text{ gleit}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 2.7667 \cdot 10^{-3} \\ -.48767 \\ 28.580 \end{pmatrix}$$

Ermittlung des Ergebnisses durch symbolische Rechnung - Ausgabe numerisch mit 2 Nachkommastellen.

$\text{poly}(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Das gesuchte Polynom

$\text{poly}(100) = 7.5$ Die gesuchte Lösung für 100 km/h

Variante 1: vorgabe-suchen

Variante 2: Matrizenrechnung

Variante 2 **Lösung des (linearen) Gleichungssystems mit Matrizenrechnung: Kürzere Schreibweise, aber sonst ähnlich wie Variante 1**

$$A := \begin{pmatrix} 70^2 & 70 & 1 \\ 90^2 & 90 & 1 \\ 120^2 & 120 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8.0 \\ 7.1 \\ 9.9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.767 \times 10^{-3} \\ -0.488 \\ 28.58 \end{pmatrix}$$

$\text{poly}(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Das gesuchte Polynom

$\text{poly}(100) = 7.5$ Die gesuchte Lösung für 100 km/h

Variante 2: Matrizenrechnung

Var. 3: Matrizenr.(allgemeiner)

Variante 3 Verallgemeinerung der Variante 2 - d.h. die Punkte (aber nicht deren Anzahl!) können oben geändert werden

$$A := \begin{bmatrix} (px_0)^2 & px_0 & 1 \\ (px_1)^2 & px_1 & 1 \\ (px_2)^2 & px_2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := py \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.767 \times 10^{-3} \\ -0.488 \\ 28.58 \end{pmatrix}$$

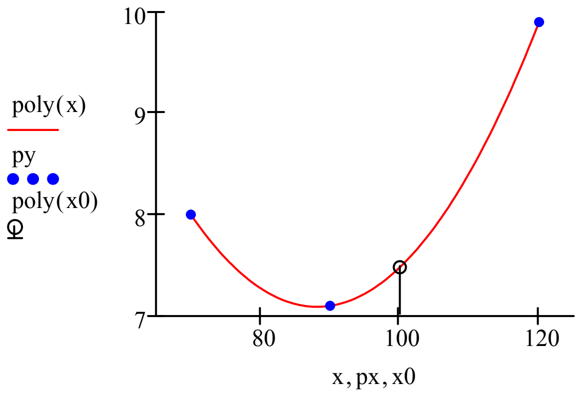
$\text{poly}(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Das gesuchte Polynom

$\text{poly}(x0) = 7.5$ Lösung für x0 km/h

Var. 3: Matrizenr.(allgemeiner)

Grafische Lösung: Allgemeine Foormulierung der Laufvariablen:

$$x := px_0, px_0 + \frac{|px_0 - px_2|}{100} .. px_2$$



Variante 4: Allgemeine Rechnung - Bestimmung der Matrizen über kleine Mathcad-Programme

Zur Demonstration werden 2 verschiedene Punktmatrizen definiert, um die Anpassungsfähigkeit zu zeigen. Über Maus-rechts können die einzelnen Ausdrücke aktiviert oder deaktiviert werden.

$$p := \begin{pmatrix} 30 & 5.4 \\ 50 & 4.9 \\ 70 & 4.7 \\ 90 & 5.5 \\ 120 & 7.1 \end{pmatrix} \qquad p := \begin{pmatrix} 70 & 8.0 \\ 90 & 7.1 \\ 120 & 9.9 \end{pmatrix}$$

Mathcad-Programm für Variante 4

$px := p^{\langle 0 \rangle}$ $\quad py := p^{\langle 1 \rangle}$ $\quad n := \text{länge}(px)$ $\quad n = 5$

$x := x$ $\quad grad := n - 1$ $\quad grad = 4$

Allgemeine Ermittlung des Grades des Interpolationspolynoms

$$A := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..grad \\ \quad \text{for } j \in 0..grad \\ \quad\quad A_{i,j} \leftarrow (px_i)^j \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

Allgemeine Berechnung der Koeffizientenmatrix und des Variablenvektors in Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte, die eingegeben wurde.
Diese bestimmt ja die Dimension des Polynoms!
Auf der rechte Seite wird der Variablenvektor mit der jeweiligen Potenz der Unbekannten x erzeugt.

$$X(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..grad \\ \quad X_i \leftarrow x^i \\ \text{return } X \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 30 & 900 & 2.7\times10^{4} & 8.1\times10^{5} \\ 1 & 50 & 2.5\times10^{3} & 1.25\times10^{5} & 6.25\times10^{6} \\ 1 & 70 & 4.9\times10^{3} & 3.43\times10^{5} & 2.401\times10^{7} \\ 1 & 90 & 8.1\times10^{3} & 7.29\times10^{5} & 6.561\times10^{7} \\ 1 & 120 & 1.44\times10^{4} & 1.728\times10^{6} & 2.074\times10^{8} \end{pmatrix} \quad py = \begin{pmatrix} 5.4 \\ 4.9 \\ 4.7 \\ 5.5 \\ 7.1 \end{pmatrix} \quad X(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

Ermittlung des Lösungsvektors mit Hilfe der Matrizenrechnung

$$l := A^{-1}\cdot py \qquad l = \begin{pmatrix} 2.175 \\ 0.285 \\ -8.366\times10^{-3} \\ 9.093\times10^{-5} \\ -3.181\times10^{-7} \end{pmatrix}$$

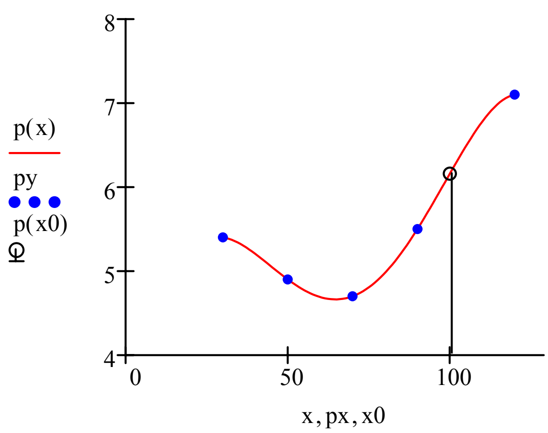
$p(x) := l\cdot X(x)$ $\quad p(x)\ \text{gleit},2 \ \rightarrow 2.2 + .29\cdot x - 8.4\cdot10^{-3}\cdot x^2 + 9.1\cdot10^{-5}\cdot x^3 - 3.2\cdot10^{-7}\cdot x^4$

Hier wird gezeigt, dass mit unserer Methode tatsächlich das "richtige" Gleichungssystem gelöst wurde $\quad p(x0) = 6.2 \quad$ Die Lösung!

$$A\cdot X(x) = py \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 30\cdot x + 900\cdot x^2 + 27000\cdot x^3 + 810000\cdot x^4 \\ 1 + 50\cdot x + 2500\cdot x^2 + 125000\cdot x^3 + 6250000\cdot x^4 \\ 1 + 70\cdot x + 4900\cdot x^2 + 343000\cdot x^3 + 24010000\cdot x^4 \\ 1 + 90\cdot x + 8100\cdot x^2 + 729000\cdot x^3 + 65610000\cdot x^4 \\ 1 + 120\cdot x + 14400\cdot x^2 + 1728000\cdot x^3 + 207360000\cdot x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ 4.9 \\ 4.7 \\ 5.5 \\ 7.1 \end{pmatrix}$$

$$x := px_0, px_0 + \frac{\left|px_0 - px_{grad}\right|}{100} \,..\, px_{grad}$$

Mathcad-Programm für Variante 4



Variante 5: Mathcad-Funktionen

Variante 5: Verwendung fertiger Funktionen

Es wird das Funktionenpaar **regress - interp** verwendet. Damit werden eigentlich Regressionsfunktionen ermittelt, jedoch kann eine Interpolationsfunktion als Regressfunktion aufgefaßt werden, wenn der Grad der Regressionsfunktion gleich der Anzahl der Punkte - 1 (also wie oben: n-1) ist.

$vs := \mathrm{regress}(px, py, grad)$ $\quad$ $y(x) := \mathrm{interp}(vs, px, py, x)$

Diese Funktion ***regress*** erzeugt den nebenstehenden Vektor

$$vs = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2.175 \\ 0.285 \\ -8.366 \times 10^{-3} \\ 9.093 \times 10^{-5} \\ -3.181 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Was ermittelt regress?

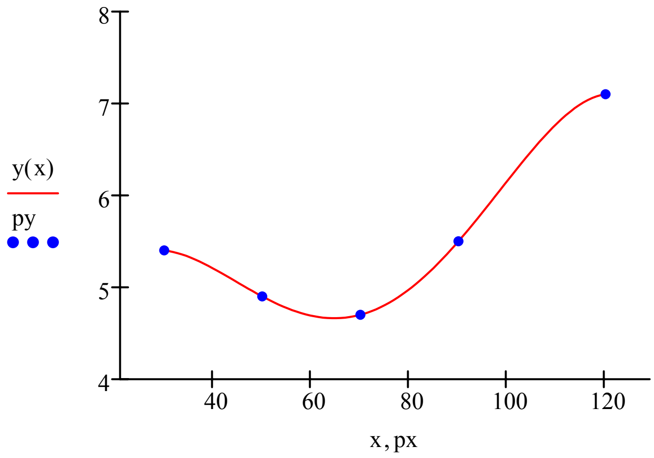
$vs_0 = 3$ vs ist Ergebnis einer regress-Funktion und nicht etwa einer Spline-Funktion

$vs_1 = 3$ Der Index innerhalb von vs, ab dem die Polynomkoeffizienten stehen

$vs_2 = n$ Ordnung der Anpassung (Grad des Polynoms)

ab vs_3 Die Koeffizienten des Polynoms

$$x := px_0, px_0 + \frac{\left|px_0 - px_{grad}\right|}{100} .. px_{grad}$$



Variante 5: Mathcad-Funktionen