Wilfried Rohm, HTL Saalfelden

PT_2 - Element

Zur Beispielsübersicht

Ein Proportional-Element mit Verzögerung 2.Ordnung (PT2-Element) wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{1}{\omega_N^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_a(t) + \frac{2 \cdot D}{\omega_N} \cdot \frac{d}{dt} x_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_e(t)$$

Dabei bedeuten:

$x_e(t)$	Eingangssignal
$x_a(t)$	Ausgangssignal
D	Dämpfungsgrad
ω_N	Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung
k	Stationärverstärkung

a) Lösen Sie die Differenzialgleichung für $x_e(t) = \sigma(t)$ und **k=1** im Zeitbereich (ohne Hilfe der Laplace-Transformation!) und stellen Sie die allgemeine Gesamtlösung dar. (Berücksichtigen Sie: **x(0)=x'(0)=0**)
Welchen Einfluss hat der Werte von D auf das Ergebnis? Erläutern Sie dies allgemein und unter Verwendung von graphischen Darstellungen oder Skizzen mit **k = 1** sowie $\boldsymbol{\omega_N=100\pi}$. Stellen Sie das Ergebnis für den Fall **D=0.6** dar.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion mit Hilfe der Laplace-Transformation. Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion und *interpretieren/erklären Sie das Ergebnis*. Zeigen Sie anschließend, wie Sie über die inverse Laplace-Transformation das gleiche Ergebnis wie in a) erhalten (graphischer Vergleich).
Erklären Sie das Prinzip der Laplace-Transformation und welche Vorteile Sie für den Elektrotechniker in seiner täglichen Arbeit bringt.

c) Wie viel schwingt das Ausgangssignal im gegebenen Fall (**D = 0.6** und **k = 1** sowie $\boldsymbol{\omega_N=100\pi}$) über ?

d) Zeichen Sie Bode-Diagramm und Ortskurve, berechnen Sie die Resonanzüberhöhung ($|\underline{G}(\omega)|$ ist maximal!). *Welche Bedingung ergibt sich dabei für den Wert von D, damit überhaupt eine Resonanzüberhöhung auftritt?*

e) *Wie schaut eine elektrotechnische Umsetzung eines PT_2 – Elementes aus? (Begründen Sie!)*

$$\frac{1}{\omega_N^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}x_a(t)+\frac{2\cdot D}{\omega_N}\cdot\frac{d}{dt}x_a(t)+x_a(t)=k\cdot x_e(t)$$

$D := 0.4$ $\quad k := 1$ $\quad \omega_N := 100\cdot\pi$

$D := D$ $\quad k := k$ $\quad \omega_N := \omega_N$

a) Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich

Lösung der homogenen Gleichung

Ansatz $\quad x_a(t) = e^{\lambda\cdot t}$

charakteristsche Gleichung

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} := \frac{1}{\omega_N^2}\cdot\lambda^2+\frac{2\cdot D}{\omega_N}\cdot\lambda+1=0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix}\left[-D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\omega_N\\ \left[-D-\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\omega_N\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \rightarrow \left[-D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\omega_N \qquad \lambda_2 \rightarrow \left[-D-\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\omega_N$$

1) Fall D> 1 aperiodischer Ausgleichsvorgang (nicht schwingungsfähig)

2) Fall D=1 aperiodischer Grenzfall

3) Fall D<1 oszillatorischer Ausgleichsvorgang (schwingungsfähiges System)

$$x_{a1\_h}(t) := k_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}+k_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}$$

$$x_{a2\_h}(t) := \left(k_1+k_2\cdot t\right)\cdot e^{\lambda_1\cdot t}$$

$$x_{a3\_h}\left(t,k_1,k_2\right) := e^{-D\cdot\omega_N\cdot t}\cdot\left[k_1\cdot\cos\left[\sqrt{\left(1-D^2\right)}\cdot\omega_N\cdot t\right]+k_2\cdot\sin\left[\sqrt{\left(1-D^2\right)}\cdot\omega_N\cdot t\right]\right]$$

$$xaa\_h\left(t,k_1,k_2\right) := k_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}+k_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}$$

Diese Lösung kann (im Komplexen) als einzige Lösung angesehen werden.

Die Verwendung von Mathcad erlaubt also eigentlich den Verzicht auf die Fallunterscheidung, wie sie im Reellen üblich ist!

Lösung der inhomogenen Gleichung

Ansatz $x_a(t) = a = \text{const}$ $\qquad x_e(t) := 1$

$$xp := \left(\frac{d^2}{dt^2}a\right) + 2\cdot D\cdot\omega_N\cdot\frac{d}{dt}a + a\cdot\omega_N^{\,2} = \omega_N^{\,2}\cdot k\cdot x_e(t)\ \text{auflösen}, a\ \rightarrow k$$

$xp \rightarrow k$ $\qquad xaa(t,k_1,k_2) := xaa\_h(t,k_1,k_2) + xp$

$$xaa_{strich}(t,k_1,k_2) := \frac{d}{dt}xaa(t,k_1,k_2)$$

Berechnen der Konstanten mit Gleichungssystem

Vorgabe

$$xaa(0,k_1,k_2) = 0$$
$$xaa_{strich}(0,k_1,k_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} := \text{Suchen}(k_1,k_2) \rightarrow \begin{bmatrix}\dfrac{-1}{2}\cdot k\cdot\dfrac{D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\\[2ex] \dfrac{-1}{2}\cdot k\cdot\dfrac{-D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\end{bmatrix}$$

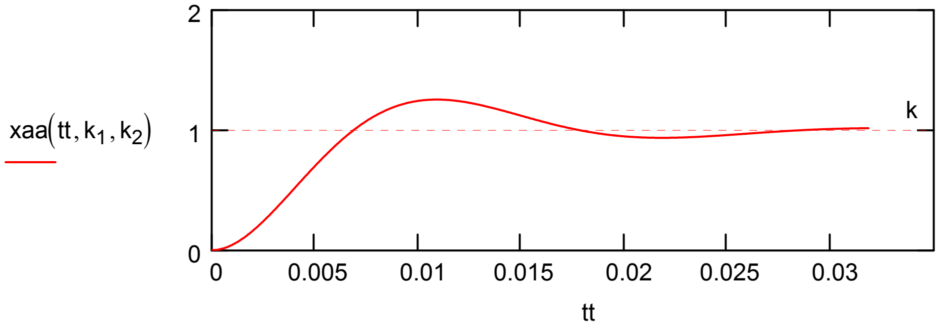
$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.5+0.218i\\-0.5-0.218i\end{pmatrix}$$

Wir erhalten also hier komplexe Konstanten!

$$xaa(t,k_1,k_2) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot k\cdot\frac{D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left[\left[-D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\omega_N\cdot t\right] - \frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{-D+\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(D^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left[\left[-D\right.\right.$$

$$T := \frac{1}{\omega_N}$$

$$tt := 0, \frac{T}{100} .. 10 \cdot T$$



Wir sehen also, dass der Schwingungsfall vorliegt!

b) Durchführung der Laplace-Transformation - Berechnung der Übertragungsfunktion

$$X_a = Xa(s)$$

$$\frac{1}{\omega_N^2} \cdot s^2 \cdot Xa + \frac{2 \cdot D}{\omega_N} \cdot s \cdot Xa + Xa = k \cdot \frac{1}{s} \text{ auflösen}, Xa \rightarrow \frac{k}{s \cdot \left(s^2 + 2 \cdot D \cdot s \cdot \omega_N + \omega_N^2\right)} \cdot \omega_N^2$$

Berechnung der Polstellen der Übertragungsfunktion G(s)

$$s^2 + 2 \cdot D \cdot s \cdot \omega_N + \omega_N^2 = 0 \text{ auflösen}, s \rightarrow \begin{bmatrix} \left[-D + \left(D^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \omega_N \\ \left[-D - \left(D^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \omega_N \end{bmatrix}$$

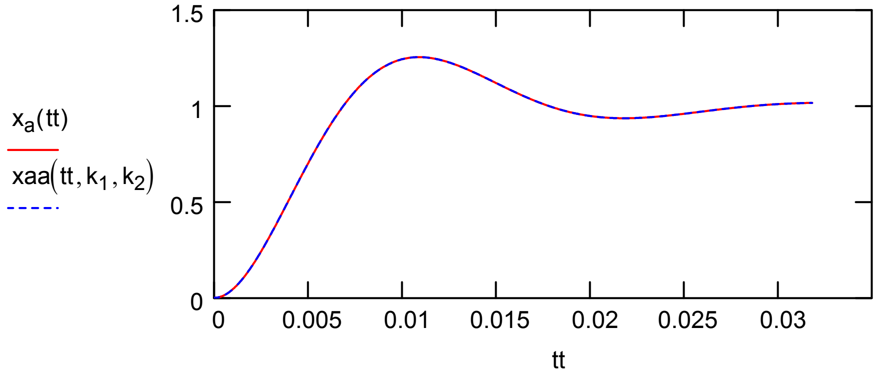
Das sind die selben Werte wie die Lösungen der charakteristischen Gleichung!

$$Xa(s) := \frac{k}{s \cdot \left(s^2 + 2 \cdot D \cdot s \cdot \omega_N + \omega_N^2\right)} \cdot \omega_N^2$$

$$x_a(t) := \text{invlaplace}(Xa(s), s, t) \left| \begin{array}{l} \text{sammeln}, \cos\left[\left[-\omega_N^2 \cdot (D-1) \cdot (D+1)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \\ \text{sammeln}, \sin\left[\left[-\omega_N^2 \cdot (D-1) \cdot (D+1)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{\omega_N} \cdot k \cdot \frac{\exp\left(-D \cdot \omega_N \cdot t\right)}{(D-1) \cdot (D+1)} \cdot$$

$$x_a(t) = \frac{1}{\omega_N} \cdot k \cdot \frac{\exp(-D \cdot \omega_N \cdot t)}{(D-1)\cdot(D+1)} \cdot \left(\omega_N^2 - D^2 \cdot \omega_N^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D \cdot \sin\left[\left[-\omega_N^2 \cdot (D-1)\cdot(D+1)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] + \omega_N^2 \cdot k \cdot \Big[-$$

Die Lösung über die Laplace-Transformation erfolgt in einer anderen Darstellung (in Amplituden-Phasenform)
Der graphische Vregleich zeigt aber, dass die gleiche Funktion berechnet wurde:



c) Überschwingung

$\frac{d}{dt} x_a(t) = 0 \;\Big|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, t \\ \text{vereinfachen}\end{matrix} \rightarrow 0 = 0$

Symbolische Berechnung ergibt (offenbar wegen der Mehrdeutigkeit der Arkusfunktionen) nicht die gewünschte Lösung!!
Hier ist auf eine Wahl nahe der Lösung zu achten!!

$t := 0.01$

Vorgabe

$$\frac{d}{dt} x_a(t) = 0$$

$t_{max} := \text{Suchen}(t)$ $\qquad t_{max} = 0.011$

Überschwingen $\qquad x_a(t_{max}) - 1 = 0.254$

$t_{max} := \text{wurzel}\left(\frac{d}{dt} x_a(t), t, 0.001, 0.015\right)$ $\qquad t_{max} = 0.011$ $\qquad$ andere Variante der Berechnung

d) Berechnung der Resonanzüberhöhung

Bestimmung der Übertragungsfunktion:

$$G(s) := \frac{k}{\left(s^2 + 2\cdot D\cdot s\cdot \omega_N + \omega_N^2\right)}\cdot \omega_N^2 \qquad |G(s)| \rightarrow \left|\frac{k}{s^2 + 2\cdot D\cdot s\cdot \omega_N + \omega_N^2}\cdot \omega_N^2\right|$$

$$G(\omega) := G(s)\ \left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, s = j\cdot\omega \\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow \frac{k}{-\omega^2 + 2\cdot i\cdot D\cdot \omega\cdot \omega_N + \omega_N^2}\cdot \omega_N^2$$

$$G_{betrag}(\omega) := |G(\omega)|$$

$$\frac{d}{d\omega}G_{betrag}(\omega) = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \left(-2\cdot D^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \omega_N \\ -\left(-2\cdot D^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \omega_N \end{bmatrix}$$

Extremstellen der Betragsfunktion

(2 Varianten)

$$1 - 2\cdot D^2 = 0 \text{ auflösen}, D \rightarrow \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\omega}|G(\omega)| = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \left(-2\cdot D^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \omega_N \\ -\left(-2\cdot D^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \omega_N \end{bmatrix}$$

$$\omega_{rz} := \left(1 - 2\cdot D^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \omega_N \qquad \omega_{rz} = 259.062$$

Nur diese Lösung kann richtig sein!

Resonanzüberhöhung

$ü_{res} := \left|G(\omega_{rz})\right|$

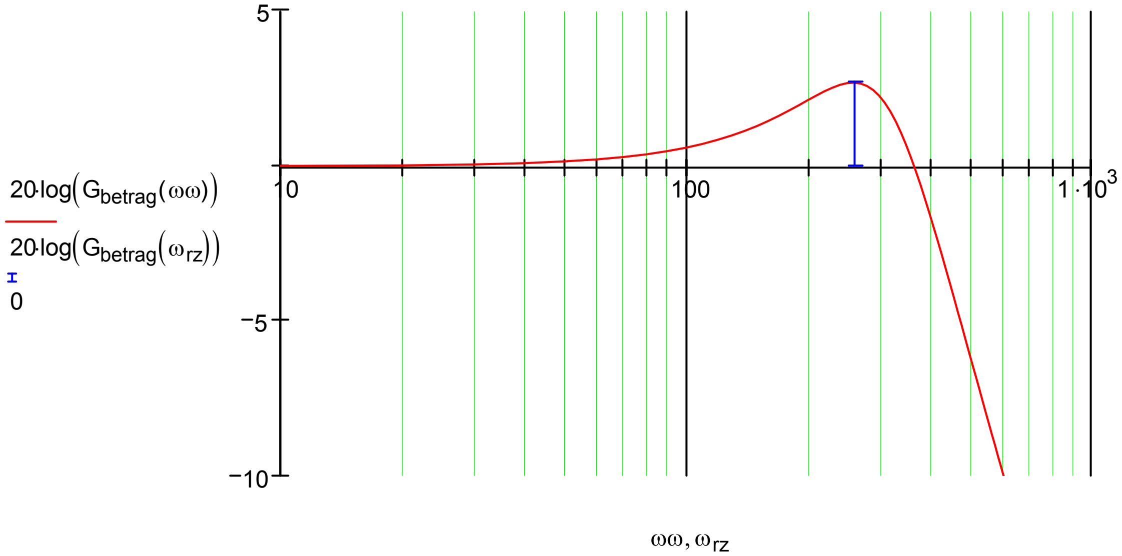
$$ü_{res} \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, D < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{signum}(D)}{D} \cdot \left[\frac{k^2}{D^2 - D \cdot \left(\left|-2 \cdot D^2 + 1\right|\right)^{\frac{1}{2}} + D \cdot \text{signum}\left(-2 \cdot D^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-2 \cdot \right.} \right.$$

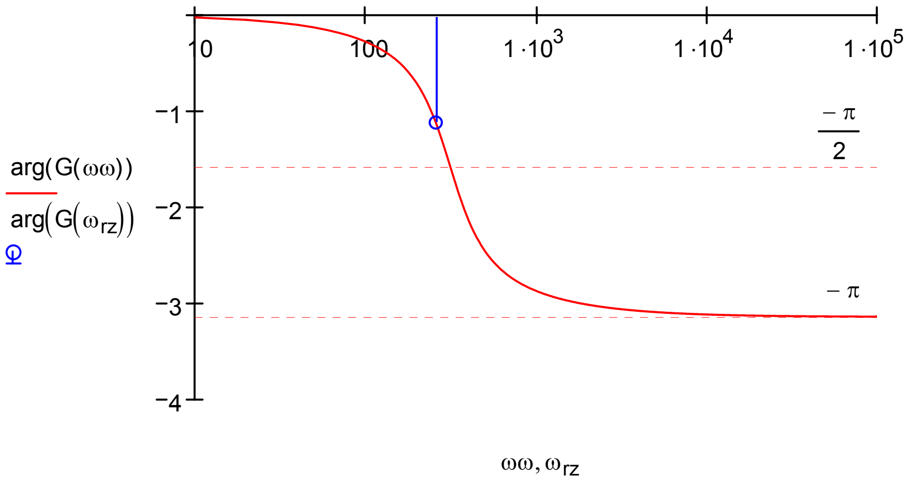
Symbolisch ein "wildes Eregbnis"

$ü_{res} = 1.364$ $\qquad 20 \cdot \log(1.364) = 2.696$

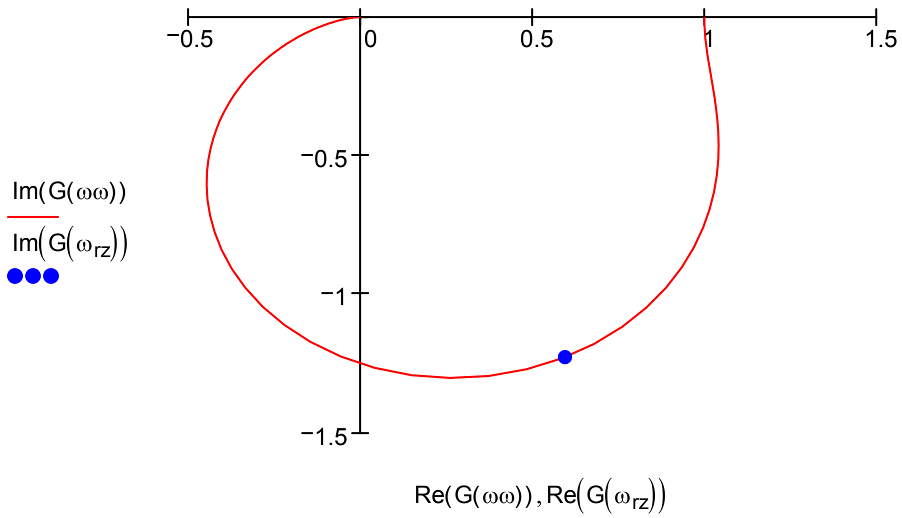
Einzeichnen im Bodediagramm:

$\omega\omega := 0, 10 .. 10^5$





Vergleich mit der Ortskurve (eingezeichnet ist der Punkt der Resonanzüberhöhung - also jenes Wertes, der am weitesten vom Koordiantenursprung entfernt ist - das bedeutet, dass der Betrag maximal ist !!!



[**Zur Beispielsübersicht**]