Wilfried Rohm wrohm@aon.at

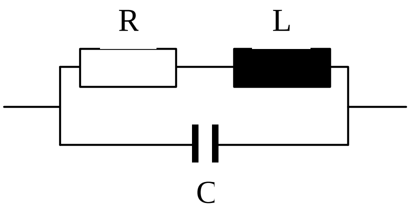
Ortskurven - symbolische Berechnungen (Nebendokument)

Symbolische Berechnungen

ZURÜCK zum Hauptdokument

$Z1(\omega, R, L) := R + j \cdot \omega \cdot L$

$Z2(\omega, C) := \dfrac{-j}{\omega \cdot C}$



$$Z(\omega, R, L, C) := \frac{Z1(\omega, R, L) \cdot Z2(\omega, C)}{Z1(\omega, R, L) + Z2(\omega, C)}$$

Definition des Gesamtwiderstandes

$$Z(\omega, R, L, C) \;\Big|\; \begin{matrix}\text{komplex}\\ \text{vereinfachen}\end{matrix} \rightarrow \frac{-\left(-R + i \cdot \omega \cdot R^2 \cdot C + i \cdot \omega^3 \cdot L^2 \cdot C - i \cdot \omega \cdot L\right)}{\left(R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C + 1\right)}$$

1) Bei welcher Frequenz ist Imaginärteil(Z) = 0 (Resonanzfall)

Hinweis: Die symbolische Berechnung gelingt mit Mathcad nur dann, wenn man etwas "unterstützend" eingreift. Die direkte Berechnung liefert (wie man sieht) kein Ergebnis!

$\text{Im}(Z(\omega, R, L, C)) = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow$ Fehlermeldung: Keine Lösung gefunden!!

Wir finden den gesuchten Wert ω nur dann, wenn wir die Gleichung **vor** dem Auflösen (wie hier gezeigt) entsprechend vereinfachen!

$$\text{Im}(Z(\omega, R, L, C)) \;\Big|\; \begin{matrix}\text{komplex}\\ \text{vereinfachen}\\ \text{auflösen}, \omega\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C} \cdot \dfrac{\left[C \cdot \left(-R^2 \cdot C + L\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \\ \dfrac{-1}{C} \cdot \dfrac{\left[C \cdot \left(-R^2 \cdot C + L\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{res}(R, L, C) := \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Als gesuchte Lösung kommt nur der 2.Wert im Lösungsvektor die Frage, weil nur dieser ein reeller Wert größer 0 ist.
Um den Zusammenhang zur Thomson´schen Schwingungsformel zu zeigen, wird das Ergebnis noch entsprechend "händisch" vereinfacht.
Ergebnis: Je größer der ohm´sche Widerstand, umso kleiner wird die Resonanzfrequenz.

2) Berechnung von Betrag und Phasenwinkel des komplexen Scheinwiderstandes

$$|Z(\omega,R,L,C)| \text{ vereinfachen } \rightarrow \left[\frac{\left(\omega^2\cdot L^2+R^2\right)}{\left(R^2\cdot\omega^2\cdot C^2+\omega^4\cdot L^2\cdot C^2-2\cdot\omega^2\cdot L\cdot C+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{tangens\_Z}(\omega,R,L,C) := \frac{\mathrm{Im}(Z(\omega,R,L,C))}{\mathrm{Re}(Z(\omega,R,L,C))}$$

$$\text{tangens\_Z}(\omega,R,L,C) \left|\begin{array}{l}\text{komplex}\\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow -\left(R^2\cdot C+\omega^2\cdot L^2\cdot C-L\right)\cdot\frac{\omega}{R}$$

3) Berechnung von Z_max (mit Hilfe der Differentialrechnung)

$$\frac{d}{d\omega}|Z(\omega,R,L,C)| = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow \left[\begin{array}{c}
\frac{1}{C}\cdot\frac{\left[-C\cdot\left[R^2\cdot C-\left(L^2+2\cdot R^2\cdot C\cdot L\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}{L}\\
\frac{-1}{C}\cdot\frac{\left[-C\cdot\left[R^2\cdot C-\left(L^2+2\cdot R^2\cdot C\cdot L\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}{L}\\
\frac{1}{C}\cdot\frac{\left[-C\cdot\left[R^2\cdot C+\left(L^2+2\cdot R^2\cdot C\cdot L\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}{L}\\
\frac{-1}{C}\cdot\frac{\left[-C\cdot\left[R^2\cdot C+\left(L^2+2\cdot R^2\cdot C\cdot L\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}{L}\\
0
\end{array}\right]$$

Von den 5 Werten im Lösungsvektor kommt nur der erste Wert als "unsere" Lösung in Frage, denn:
* der 2.Wert ist negativ
* der 3. und 4.Wert muß imaginär sein, weil der Ausdruck unter der Wurzel sicher neagtiv ist
* der 5.Wert (0) ist nicht das gesuchte Maximum, sondern ein lokales Minimum.

$$Z_{max}(R,L,C) := \frac{1}{C}\cdot\frac{\left[-C\cdot\left[R^2\cdot C-\left(L^2+2\cdot R^2\cdot C\cdot L\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}{L}$$

4) Berechnung von f _max

ϕ_max findet man dort, wo auch tan(ϕ) maximal wird! (Differentialrechnung)

$$\frac{d}{d\omega}\text{tangens\_Z}(\omega, R, L, C) = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow$$

Fehlermeldung: Kein symbolisches Ergebnis gefunden!

Auch hier gelingt (seltsamer Weise) die symbolische Berechnung nicht direkt über die Funktion. Man kann sich aber das vereinfachte Funktionsergebnis von tangens_Z(...) herunterkopieren. Die Gleichung ist so einfach, dass es nicht ganz verständlich ist, dass es über die definierte Funktion nicht funktioniert.

$$\frac{d}{d\omega}\left(R^2 \cdot C + \omega^2 \cdot L^2 \cdot C - L\right) \cdot \frac{\omega}{R} = 0 \text{ auflösen}, \omega \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3 \cdot C} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\left[C \cdot \left(-R^2 \cdot C + L\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \\ \frac{-1}{3 \cdot C} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\left[C \cdot \left(-R^2 \cdot C + L\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{\phi\_max}(R, L, C) := \sqrt{\frac{1}{3 \cdot L \cdot C} - \frac{R^2}{3 \cdot L^2}}$$

Als gesuchte Lösung kommt nur der 1.Wert des Lösungsvektors in Frage, da der 2. Wert sicher negativ ist. Ausserdem wurde das Ergebnis "händisch" verschönert, indem alles unter die Wurzel gebracht wurde.

5) Einsetzen der speziellen Werte

$L := 0.1 \cdot H$ $\qquad C := 32 \cdot 10^{-6} \cdot F$ $\qquad R := 20 \cdot \Omega$

$f_{max} := \frac{Z_{max}(R, L, C)}{2 \cdot \pi}$ $\qquad f_{max} = 88.646\,Hz$ $\qquad$ Frequenz mit maximalen Scheinwiderstand Z

$f_{res} := \frac{\omega_{res}(R, L, C)}{2 \cdot \pi}$ $\qquad f_{res} = 83.081\,Hz$ $\qquad$ Frequenz, bei welcher der Imaginärteil des Scheinwiderstandes Z gleich 0 ist ("Resonanz")

$f_{\phi\_max} := \frac{\omega_{\phi\_max}(R, L, C)}{2 \cdot \pi}$ $\qquad f_{\phi\_max} = 47.967\,Hz$ $\qquad$ Frequenz, bei welcher der Phasenwinkel maximal i

Die Ergebnisse stimmen mit jenen überein, die durch rein nummerische Berechnungen erzielt wurden.

ZURÜCK zum Hauptdokument

.st.