Wilfried Rohm

Lineare Optimierung

Aufgabenstellung (übernommen aus: Holland/Holland: Mathematik im Betrieb)

Ein Unternehmen stellt **2 Produke X1 und X2** her.
Beide Produkte durchlaufen **vier Maschinentypen M1, M2, M3 und M4.** Die Anzahl der maximal herstellbaren Produkte wird durch die Maschinenausstattung begrenzt, da diese Kapazität nicht kurzfristig verändert werden kann. Die **wöchentliche Arbeitszeit beträgt 40 Stunden**, es wird also nur eine Schicht gefahren.

- Die Maschine M1 benötigt 20 Minuten (= $\frac{1}{3}$ Stunde) für die Herstelliung einer Einheit von X1, ebenso 20 Minuten für X2. Das Unternehmen verfügt über 5 Maschinen des Typs M1.
- Maschine M2 braucht 7,5 Minuten (= $\frac{1}{8}$ Stunde) pro Einheit X1 und 30 Minuten für die Herstellung einer Einheit X2. Drei Maschinen dieses Typs stehen zur Verfügung.
- Von der Maschine M3 gibt es zwei Exemplare, sie wird nur für das Produkt X1 beansprucht, und zwar werden in einer Stunde 7 Einheiten von X1 bearbeitet.
- Maschine M4 ist nur einmal vorhanden, pro Stück X2 wird sie 12 Minuten beansprucht.

Unter der Voraussetzung , dass unvollständig bearbeitete Produkte nicht zwischen gelagert werden können, sind die Mengenkombinationen von x1 und x2 zu suchen, die von allen vier Anlagen bearbeitet werden können. Dabei soll das tatsächlich realisierte Produktionsprogramm so festgelegt werden, dass der Gewinn des Unternehmens maximiert wird. Zu berücksichtigen dabei:

- Eine Mengeneinheit X2 bringt einen Gewinn von 4 €
- X1 erzielt pro stück einen Gewinn in Höhe von 2 €.

Die Gewinn funktion lautet daher: $G = 2 \cdot x1 + 4 \cdot x2$

$G(x1, x2) := 2 \cdot x1 + 4 \cdot x2$ Die Zielfunktion, die maximiert werden soll

$x1 := 1$ $x2 := 1$ Startwerte zur Suche nach einer numerischen Lösung notwendig!

Vorgabe

$\frac{1}{3} \cdot x1 + \frac{1}{3} \cdot x2 \le 200$ Kapazitätsbeschränkkung Maschine 1

$\frac{1}{8} \cdot x1 + \frac{1}{2} \cdot x2 \le 120$ Kapazitätsbeschränkung Maschine 2

$\frac{1}{7} x1 \le 80$ Kapazitätsbeschränkung Maschine 3

$\frac{1}{5} \cdot x2 \le 40$ Kapazitätsbeschränkung Maschine 4

$x1 \ge 0$

$x2 \ge 0$ Nichtnegativitätsbeschränkungen

$x := \text{Maximieren}(G, x1, x2)$ $x = \begin{pmatrix} 480 \\ 120 \end{pmatrix}$ Das ist der Lösungsvektor

Hinweise :

- Die Nebenbedingungen werden einfach so wie oben zwischen den LÖSUNGSBLOCK VORGABE - MAXIMIEREN bzw. VORGABE-MINIMIEREN (bei einem Minimierungsproblem) geschrieben.
- Mittels Druck der rechten Maustaste auf das Schlüsselwort "Maximieren" bzw. "Minimieren" kann zwischen verschiedenen numerischen Verfahren (ähnlich wie beim EXCEL-Solver) und sonstigen Optionen gewählt werden.

$x1 := x_0$ $\quad$ $x1 = 480$ $\quad$ Hier werden die Werte aus obigen Lösaungsvektor herausgelesen und den gewünschten Varaiblennamen zugeordnet

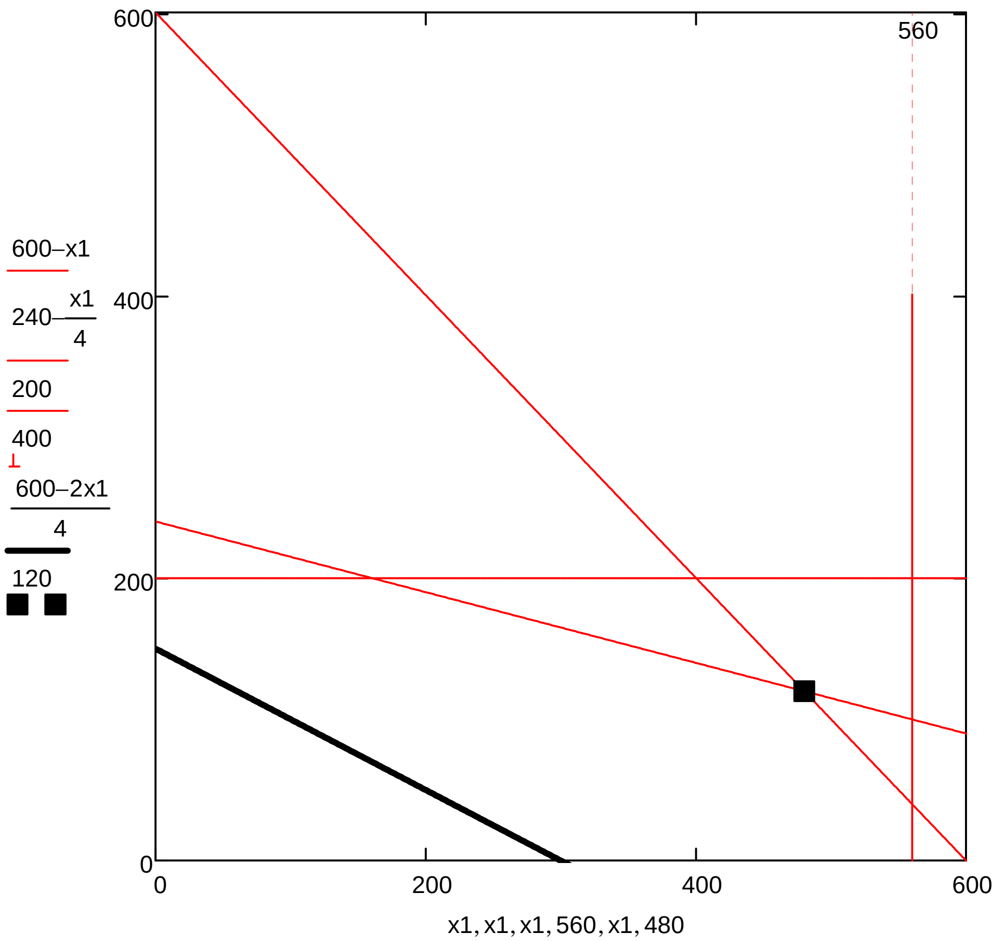
$x2 := x_1$ $\quad$ $x2 = 120$

$G(x1, x2) = 1440$ $\quad$ Das gesuchte erreichbare Gewinn-Maximum!

In diesem einfachen Beispiel ist auch eine zeichnersiche Darstellung des Optimierungsproblems möglich, wenn auch - zugegebener Maßen - nicht allzu übersichtlich. Obige Nebenbedingungen definieren dann einen entsprechenden Zulässigkeitsbereich (rote Geradenstücke als Grenzwerte)

Die Zielfunktion wurde für bestimmte Parameter schwarz eingezeichnet und muss dann möglichst weit an den Rand des Zulässigkeitsbereiches verschoben werden - man erhält den großen schwarzen Punkt als Lösung

$x1 := 0 .. 600$



Aufgabenstellung 2

Als Beispiel für eine **Minmierungsproblem** wird ein etwas komplexeres Mischungsproblem vorgeführt:

Ein metallverarbeitender Betrieb möchte eine Legierung von 45-60% Kupfer, 12-26% Nickel und 20-30% Zink herstellen.
Angenommen, dem Betrieb stehen zur Herstellung der Legierung drei Metalllegierungen A1, A2 und A3 zur Verfügung, deren Zusammensetzungen und Preise aus der unten angeführten Tabelle zu entnehmen sind.
In welchem Verhältnis sollte dann der Betrieb die Rohstoffe A1, A2 und A3 mischen, um möglichst kostengünstig die Legierung herstellen zu können?

Legierung	A_0	A_1	A_2
Kupfer	26%	64%	32%
Nickel	34%	36%	8%
Zink	40%	----	60%
Preis / kg	32	512	56

Im Folgenden bezeichnen wir die Gewichtsmengen von A_0 , A_1 und A_2, welche in 1 kg der Mischung eingehen , mit a_0 , a_1 und a_2.

$K(a) := 32.a_0 + 512\,a_1 + 56\,a_2$

Das ist nun die zu minimierende Zielfunktion!

Die Aufgabe wird nun auf 2 Arten gelöst.

Variante 1: Nebenbedingungen (so wie bei der 1.Aufgabe) einzeln formulieren:

$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es muss wieder ein Startwert für dei Lösungssuche definiert werden - das wäre einfacher auch so gegangen:

$a_2 := 0$ damit wird der größte Index des Vektors a definiert.

Vorgabe

$26 \cdot a_0 + 64 \cdot a_1 + 32\,a_2 \geq 45$

$26 \cdot a_0 + 64 \cdot a_1 + 32\,a_2 \leq 60$

$34 \cdot a_0 + 36 \cdot a_1 + 8\,a_2 \geq 12$

$34 \cdot a_0 + 36 \cdot a_1 + 8\,a_2 \leq 26$

$40\,a_0 + 60\,a_2 \geq 20$

$40\,a_0 + 60\,a_2 \leq 30$

$a_0 + a_1 + a_2 = 1$

$a_0 \geq 0$

$a_1 \geq 0$

$a_2 \geq 0$

$a := \mathrm{Minimieren}(K, a) = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.44 \\ 0.38 \end{pmatrix}$

Die Lösung ist im Vektor a enthalten. Wir können die obigen Nebenbedingungen nun auch durchprobieren um uns zu überzeugen, dass sie eingehalten wurden bzw. um auch die Lösung besser interpretieren zu können. Beispielsweise:

$26 \cdot a_0 + 64 \cdot a_1 + 32 a_2 = 45$ $\quad$ $34 \cdot a_0 + 36 \cdot a_1 + 8 a_2 = 25$

$40 a_0 + 60 a_2 = 30$

Variante 2: Formulierung des Optimierungsproblems mit Hilfe der Matrizenrechnung:

Diese Variante ist deutlich kürzer und zeigt ihre Stärke natürlich insbesondere bei Optimierungsproblemen höherer Dimension.

$$M := \begin{pmatrix} 26 & 64 & 32 \\ 34 & 36 & 8 \\ 40 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Matrix der Legierungsprozentsätze, welche sich aus der Angabe ergibt. Die Zeilen entsaprechen dem Metall (Kupfer, Nickel, Zink) , die Spalten den Legierungen A_0, A_1 und A_2

$$\text{minimum} := \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \text{maximum} := \begin{pmatrix} 60 \\ 26 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren enthalten die einschränlenden Nebenbedingungen

$$i := 0 .. 2 \qquad a_i := 0 \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wiederum: Startwerte definieren!

Vorgabe

$M \cdot a \geq \text{minimum}$

Formulierung der Nebenbediingungen mit der Matrizenrechnung

$M \cdot a \leq \text{maximum}$

$\sum_i a_i = 1$

$a \geq 0$

$$a := \text{Minimieren}(K, a) = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.44 \\ 0.38 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot a = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kontrollwerte , die zeigen, dass die Nebenbedingungen eingehalten wurden!

- Zurück zur Beispielübersicht "Wirtschaftsmathematik"