Wilfried Rohm wrohm@aon.at

LRC-Schwingkreis / Laplacetransformation

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Laplacetransfromation, Differentialgleichungen 2.Ordnung,Schwingungsgleichung, Bodediagramm, komplexe Übertragungsfunktion, Resonanz, Resonanzüberhöhung

- Kurzzusammenfassung

  Das Verhalten eines LRC-Schwingkreises nach Anlegen eines Einheitssprunges soll ausführlich untersucht und analysiert werden.

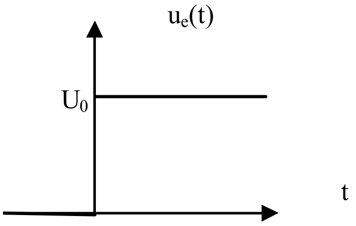
- Lehrplanbezug

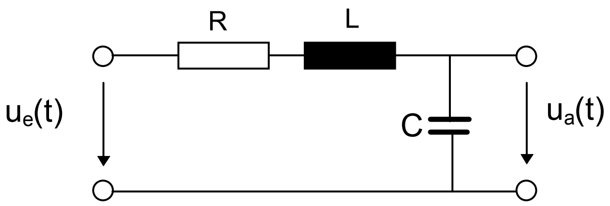
  Angew. Mathematik, 5.Jahrgang, Abteilungen mit elektrotechnischem Schwerpunkt

- Literaturangaben:

  HAAGER: Regelungstechnik, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Aufgabenstellung





Erklären Sie das Verhalten eines Schwingkreises beim Anlegen einer Gleichspannung (Einschaltvorgang, Sprungantwort). Folgende Eckpunkte werden dabei vorgegeben:

a) Aufstellen der Differentialgleichung zur Berechnung von $u_c(t)$. Erläutern Sie den prinzipiellen herkömmlichen Lösungsweg zur Lösung der Differentialgleichung.

b) Aufstellen der Übertragungsfunktion und Lösung des Problems über die Laplace-Transformation. Man schildere den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen der Vorgangsweise im Zeitbereich und der Vorgangsweise über die Laplace-Transformation. Welche Vorteile / Nachteile bietet der "Umweg" über die Laplace-Transformation?

c) Zahlenmäßige Lösung des Problems für folgende Werte:
$R := 20\Omega$ $C := 1\mu F$ $L := 1mH$ $U_0 := 1V$
Man untersuche den Einfluß von R auf die Lösung und berechne dazu den aperiodischen Grenzfall. Erklären Sie und demonstrieren Sie den Zusammenhang der Lösung mit den Polstellen der Übertragungsfunktion.

d) Ermitteln Sie die Lösung für den Fall, dass statt der Gleichspannung ein Spannungsimpuls bestimmter Zeitdauer an den Schwingkreis gelegt wird und schildern Sie den Zusammenhang zur Lösung aus c).

e) Das Bodediagramm der komplexen Übertragungsfunktion soll (ebenfalls für unterschiedliches R) gezeichnet und entsprechend interpretiert werden. Ferner sollte das Bodediagramm im Bereich 0-100 Ω noch hinsichtlich Resonanz und Resonanzüberhöhung untersucht und interpretiert werden.

$R := R \qquad C := C \qquad L := L \qquad U_0 := U_0$ Für das symbolische Rechnen ....

Teil a) Aufstellen der Differentialgleichung

$u_R + u_L + u_C = u_e$ Maschengleichung

$i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = u_e$ Ohmsches Gesetz , Induktionsgesetz (Grundlagen der ET)

mit $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$ erhält man schließlich

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 \cdot u_c}{dt^2} + \left(R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt}\right) + u_c = u_e$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Prinzipieller Lösungsgang im Zeitbereich

Die Lösung setzt sich 2 Lösungsteilen zusammen (partikuläre und stationäre Lösung)

Die stationäre Lösung erhält man aus der homogenen Gleichung ($u_e = 0$) - sie beschreibt den Übergangszustand unmittelbar nach dem Einschaltvorgang.

Die partikuläre Lösung erhält man aus einer Lösung der inhomogenen Gleichung: Variation der Konstanten oder spezieller Ansatz in Abhängigkeit von der Störfunktion. Sie beschreibt den eingeschwungenenen Zustand (also die Situation für t gegen Unendlich!)

Zum Lösen der homogenen Gleichung wählt man den Lösungsansatz $u_c = e^{\lambda \cdot t}$

Daraus ergeben sich die charakteristische Gleichung und deren Lösungen:

$$L \cdot C \cdot \lambda^2 + R \cdot C \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$L \cdot C \cdot \lambda^2 + R \cdot C \cdot \lambda + 1 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot L \cdot C} \cdot \left[-R \cdot C + \left(R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2 \cdot L \cdot C} \cdot \left[-R \cdot C - \left(R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieser charakteristischen Gleichung führt zu den verschiedenen Lösungsfällen, die weiter unten ausführlich diskutiert werden!

Teil b und c) Lösung über die Laplacetransformation

Das Problem wird gleich im Bildbereich mit Hilfe der Übertragungsfunktion G(s) formuliert ("symbolische Methode")

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} \qquad G(s) := \frac{\frac{1}{C \cdot s}}{R + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}}$$

$$G(s) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{1}{R \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1}$$

Die Lösung im Bildbereich ist:

$u_a(s) = G(s) \cdot u_e(s)$ mit $u_e(s) := U_0 \cdot \Phi(t)$ laplace, t $\rightarrow \frac{U_0}{s}$

bzw. ausführlich angeschrieben: $u_a(s) := \frac{U_0}{s} \cdot \frac{1}{\left(R \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1\right)}$

Für spätere Überlegungen definieren wir uns den Nenner der Übertragungsfunktion als eigene Funktion

$$\text{Nenner}(R, L, C) := R \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1$$

Rücktransformation in den Zeitbereich (Inverse Laplace-Transformation von Ua(s)):

$$u_a(t, R) := \text{invlaplace}\left(u_a(s), s, t\right) \rightarrow U_0 \cdot \left[1 - C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L\right.\right.$$

Hinweis : Wegen der in der Angabe geforderten Untersuchung des Einflusses von R auf die Lösungs wird die Lösung im Zeitbereich schon hier in Abhängigkeit von R dargestellt!

Zusammenhang zur Lösung im Zeitbereich:

Um den obigen Ausdruck in Mathcad voll einsehen zu können, kann man den Zoomfaktor z.B. auf 75% einstellen. Man erkennt:

Alle Summanden, welche den Faktor $\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)$ enthalten, repräsentieren zusammen die homogene Lösung, weil diese für t gegen Unendlich verschwinden. Es sind dies die (je nach aktuellen Werten) rellen oder komplexen sin- / cos - Terme.

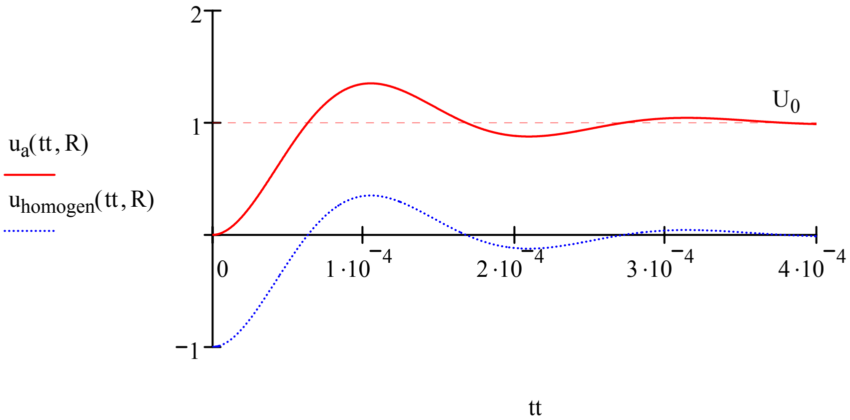
$$u_{homogen}(t, R) := U_0 \cdot \left[-1 \cdot C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L} \cdot L \cdot \left(\frac{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot\right.\right.$$

Der Summand, der übrigbleibt, ist lediglich U_0. Daher ist dies die stationäre (partikuläre) Lösung, welche den eingeschwungenen Zustand für t gegen Unendlich beschreibt.

Zeichnung der Lösungsfunktionen für die gegebenen Werte: $R = 20\,\Omega$

$\tau := R \cdot C$ Def. zur automatischen Anpassung des Diagrammes $\tau = 2 \times 10^{-5}\,s$

$tt := 0 \cdot s, \frac{\tau}{100} .. 20 \cdot \tau$



Einfluß von R auf die Lösung

Um die verschiedenen Lösungsfälle zu unterscheiden , berechnen wir die POLSTELLEN der Übertragungsfunktion. Diese entsprechen den Nullstellen der charakteristischen Glg. der Differentialgleichung im Zeitbereich. (siehe weiter oben!)
Also: Nenner von G(s) gleich 0 setzen:

$$\mathrm{Pole}(R,L,C) := \mathrm{Nenner}(R,L,C) = 0 \text{ auflösen}, s \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot L\cdot C}\cdot\left[-R\cdot C+\left(R^2\cdot C^2-4\cdot L\cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot L\cdot C}\cdot\left[-R\cdot C-\left(R^2\cdot C^2-4\cdot L\cdot C\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

Der APERIODISCHE GRENZFALL tritt dann auf, wenn nur EINE Polstelle (reelle Doppellösung) auftritt. Dazu wird der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminante) gleich 0 gesetzt. Wir erhalten:

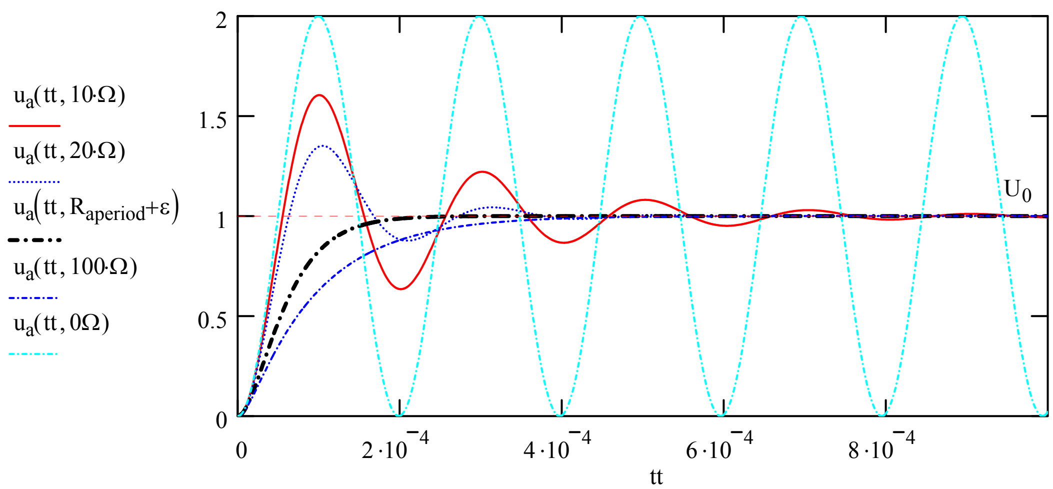
$$R_{aperiod} := R^2\cdot C^2-4\cdot L\cdot C = 0 \text{ auflösen}, R \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{C}\cdot(L\cdot C)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-2}{C}\cdot(L\cdot C)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$R_{aperiod} := 2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R_{aperiod} = 63.246\,\Omega$$

Zeichnung der Funktionen $u_a(t,R)$

$$tt := 0\cdot s, \frac{\tau}{100} .. 50\cdot\tau \qquad \varepsilon := 10^{-5}$$



Wird R kleiner als im aperiodischen Grenzfall, dann schwingt das System. Wird R = 0 so ist das System ungedämpft und es schwingt mit best. Frequenz. Bei R größer als R_aperiodisch ist das System stärker gedämpft und die Ausgangsspannung kriecht förmlich auf das Niveau der Eingangsspannung. Dies lässt sich dadurch erklären, dass durch den höheren Widerstand ein kleinerer Strom fließt. Dadurch wird der Kondensator langsamer aufgeladen.

Hinweis: Beim aperiodischen Fall wird ein kleiner ε-Wert zum Wert des $R_{aperiod}$ dazugezählt: Dadurch werden numerische Probleme vermieden, die Mathcad offenbar bei der Berechnung hat.

Zusammenhang zwischen den Lösungsfällen und den Polstellen der Übertragungsfunktion:

$R := 100 \cdot \Omega - FRAME \cdot 1 \cdot \Omega$ $P := Pole(R, L, C)$ mit FRAME von 0 bis 100 animieren!

Die folgenden 2 Diagramme sollen gemeinsam animiert werden, wobei die FRAME-Variable von 0 bis 100 (ungedämpfte Situation) gehen soll. Man erkennt sehr schön den Zusammenhang zwischen den Lösungsfällen und der Sprungantwort:

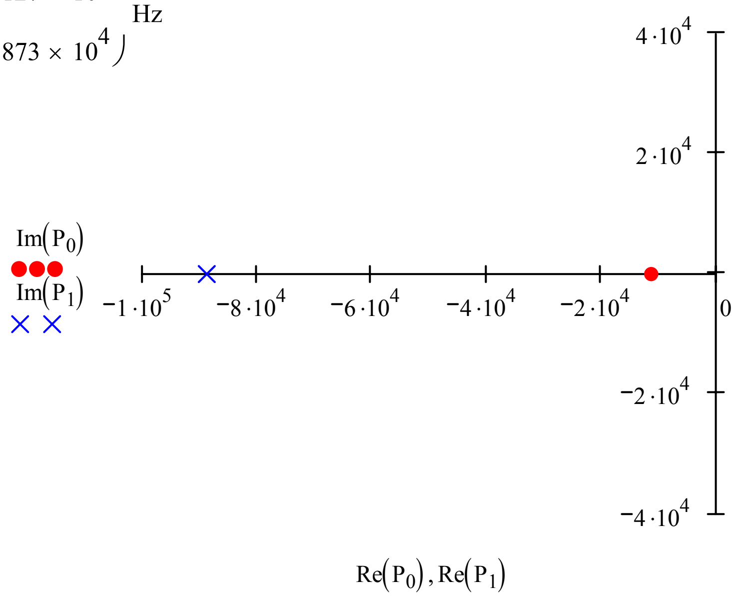
R > Raperiod : 2 reelle Polstellen in der Übertragungsfunktion - daher aperiodische Systemantwort!

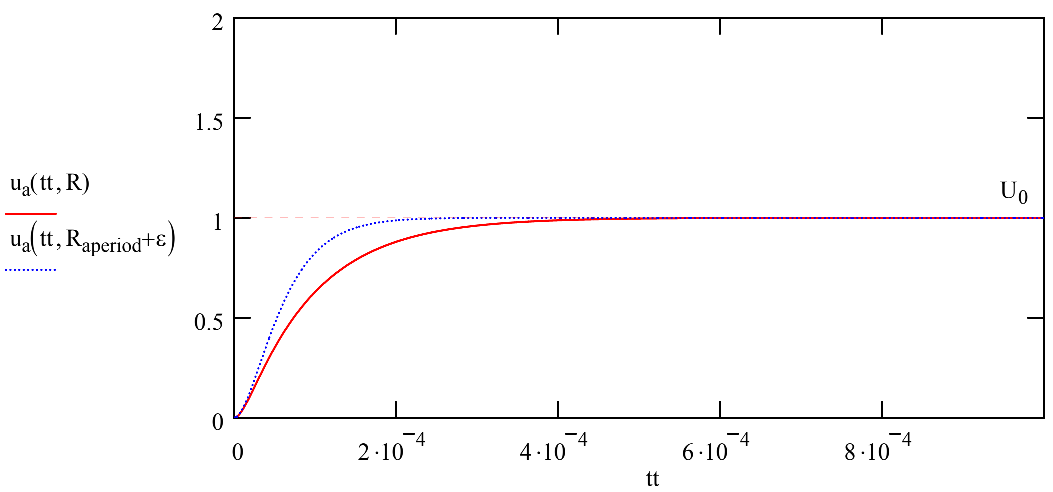
R = Raperiod : 1 reelle Polstelle in der Übertragungsfunktoin - daher aperiodischer Grenzfall!

R < Raperiod : 2 konjugiert komplexe Polstellen in der Übertragungsfunktoin - daher gedämpfte Schwingung als Systemantwort. Die Schwingung wird ungedämpft, wenn R=0 ist und die Polstellen rein imaginär sind!

$R = 100\,\Omega$

$$P = \begin{pmatrix} -1.127 \times 10^4 \\ -8.873 \times 10^4 \end{pmatrix} Hz$$





Teil d) Anlegen eines Spannungsimpulses

$R := 20\Omega$ $\qquad L := L \quad R := R \quad U_0 := U_0$

$a := 0.0005 \cdot s$ $\qquad a := a$

$u2_e(t) := U_0 \cdot (\Phi(t) - \Phi(t-a))$ $\quad U2_e(s) := u2_e(t) \;\Big|\begin{array}{l}\text{annehmen}, a > 0\\ \text{laplace}, t\end{array} \rightarrow U_0 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{\exp(-a \cdot s)}{s}\right)$

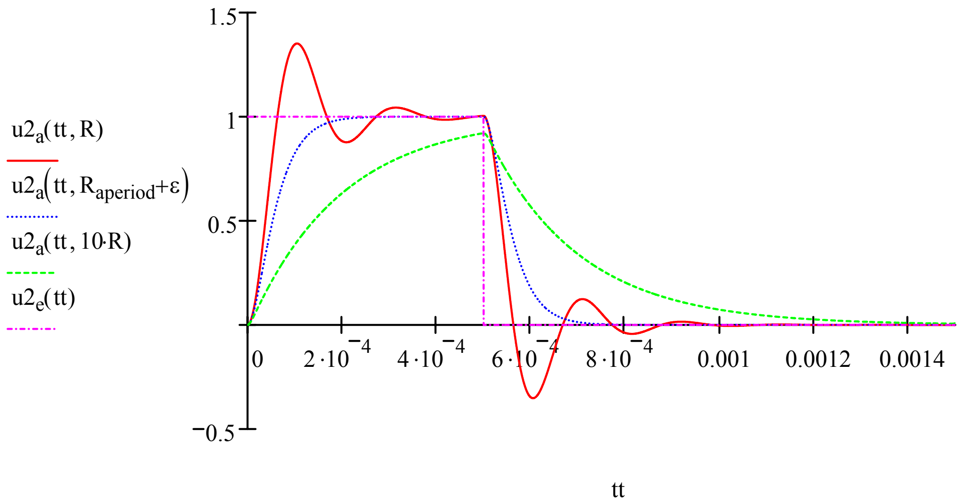
$$U2_e(s) := U_0 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{\exp(-s \cdot a)}{s}\right)$$

Hier scheint ein Mathcad-Fehler in der Version 11 vorzuliegen - ohne diese neuerliche Definition kommt ein falsches Ergebnis heraus!

$U2_a(s,R) := U2_e(s) \cdot G(s)$ $\qquad U2_a(s,R)$ vereinfachen $\rightarrow -U_0 \cdot \frac{-1 + \exp(-s \cdot a)}{s \cdot (R \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$

$$u2_a(t,R) := \text{invlaplace}(U2_a(s,R), s, t) \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow -U_0 \cdot \left[-1 + C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right.\right.$$

$$tt := 0 \cdot s, \frac{\tau}{100} .. 100 \cdot \tau$$



Der Anfangsteil (Sprung auf U0, Einschaltvorgang) ist gleich wie bei Teil c).
Im zweiten Teil der Kurve (Spannungssprung auf 0) wird der Kondensator entladen. Es muss angenommen werden, dass bei Wegschalten der Eingangsspannung die Spannungsquelle kurzgeschlossen wird. Ansonsten könnte sich der Kondensator nicht enladen, da der Stromkreis offen wäre.
Bei kleinem R kann ein höherer Strom fließen -> die Spannung sackt schneller ab. Bei größerem R sinkt die Spannung langsamer e-Potenzförmig ab.

Teil e) Bodediagramm , Resonanz und Resonanzüberhöhung in Abhängigkeit von R

Bodediagramm:

$$G(\omega) := \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \text{ faktor } \rightarrow \frac{-1}{-i \cdot R \cdot \omega \cdot C + C \cdot L \cdot \omega^2 - 1}$$

$$G(\omega, R) := \frac{1}{i \cdot R \cdot \omega \cdot C - C \cdot L \cdot \omega^2 + 1}$$

$$\text{phi}(\omega, R) := \arg(G(\omega, R))$$

$$\omega_n := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$ natürliche Kreisfrequenz

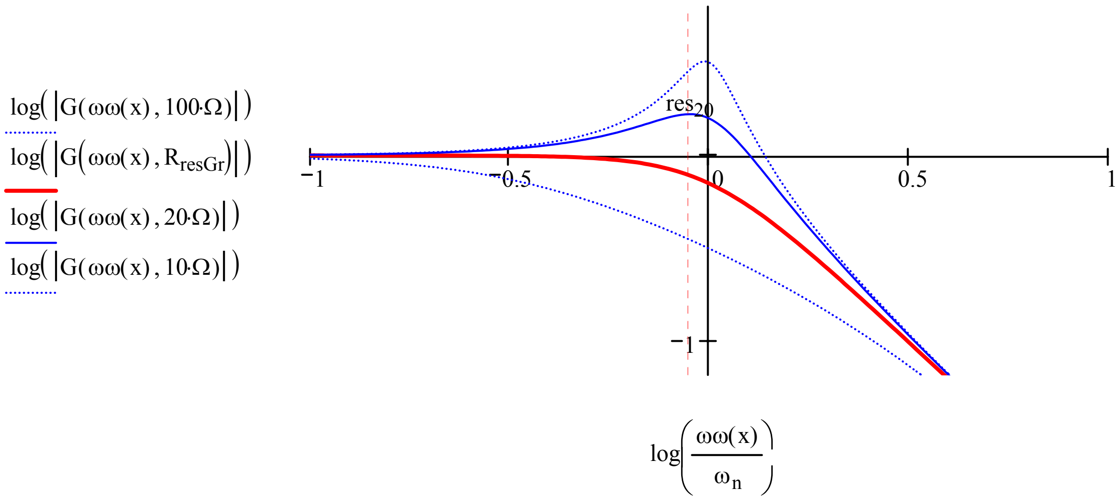
$$\omega_n = 3.162 \times 10^4 \text{Hz}$$

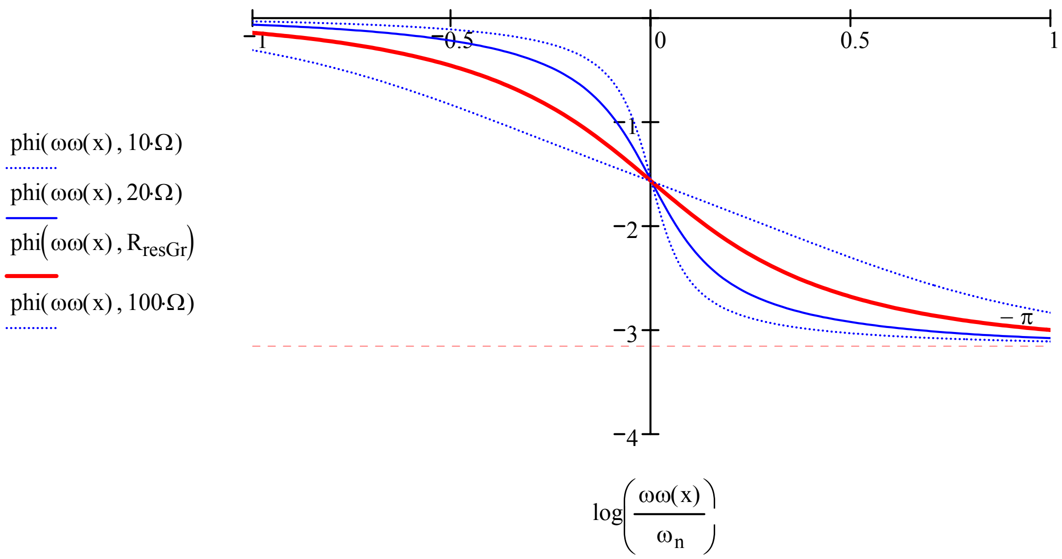
Das Bodedaigramm soll in einer "normierten" Darstellung (ω in Bezug auf die natürliche Kreisfrequenz) erfolgen, damit wird die Resonanzüberhöhung in das Zentrum des Diagrammes gerückt.

$$res_{20} := \log\left(\frac{\omega_{r20}}{\omega_n}\right)$$

Im Diagramm wird auch die weiter unten (global) berechnete Resonanzfrquenz für R=20 Ω aus Vergleichsgründen eingezeichnet.

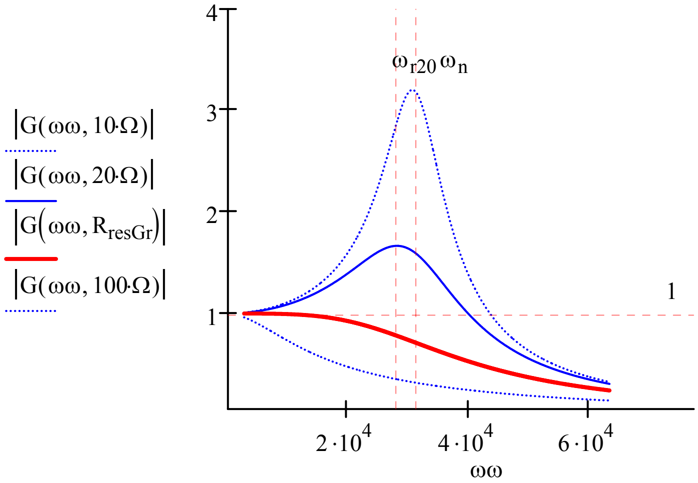
$$x := 3, 3.01 .. 6 \quad \omega\omega(x) := 10^x \cdot s^{-1}$$





Die Darstellung des Amplitudenganges im "normalen" Koordiantensystem (nicht logarithmisch) zeigt auf andere Weise den Bereich der Resonanzüberhöhung. Auf dieses Diagramm wird in den folgenden Berechnungen Bezug genommen:

$$\omega\omega := \frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_n}{10} \cdot 1.01 .. 2 \cdot \omega_n$$



symbolische Berechnung der Resonanzfrequenz:
Bei welchem ω wird G(ω) maximal ?

$$\frac{d}{d\omega}\left|G(\omega,R)\right| \text{ auflösen}, \omega \;\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2 \cdot C} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\left[C \cdot \left(2 \cdot L - R^2 \cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \\ \dfrac{-1}{2 \cdot C} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\left[C \cdot \left(2 \cdot L - R^2 \cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{L} \end{bmatrix}$$

Von diesen drei (mathematischen) Lösungen kommt nur die positive Lösung in Betracht:

also: $\omega_{res}(R,L,C) := \dfrac{1}{2 \cdot C} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{C \cdot \left(2 \cdot L - R^2 \cdot C\right)}}{L}$

Dies wird "händisch" weitergerechnet, um den Zusammenhang zu ω_n darzustellen

$$\frac{1}{2 \cdot C} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{C \cdot \left(2 \cdot L - R^2 \cdot C\right)}}{L} = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot C - R^2 \cdot C^2}{2 \cdot L^2 \cdot C^2}} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2 C}{2 \cdot L^2 \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot C}{2 \cdot L}}$$

$$\boxed{\omega_{res}(R,L,C) := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot C}{2 \cdot L}}} \qquad \omega_n := \omega_{res}(0 \cdot \Omega, L, C) \qquad \omega_n \rightarrow \frac{1}{(L \cdot C)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\omega_{res}(R,L,C) = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Resonanzfrequenz für R>0 immer KLEINER als die natürliche Kreisfrequenz $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ ist, welche gleichzeitig die Resonanzfrequenz für R=0 darstellt.

Manchmal (vgl. HAAGER) wird die Resonanzfrequenz gerne in Abhängigkeit vom **Dämpfungsgrad D** dargestellt:

$$D := \frac{R}{R_{aperiod}} \qquad D \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

also : $D = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$

Damit erhält man im Vergleich zu oben: $\omega_{res}(R, L, C) = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}$

Ein Ergebnis (das oben eingezeichnet ist) für spezielle Werte:

$$\omega_{res}(20 \cdot \Omega, 1 \cdot mH, 1 \cdot \mu F) = 2.828 \times 10^4\,Hz \qquad \omega_{r20} \equiv 2.828 \times 10^4\,Hz$$

Berechnung der Resonanzüberhöhung:

Wir beziehen uns auf das oben ermittelte Ergebnis

$$\omega_{res}(R, L, C) := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 \cdot C}{2 \cdot L}}$$

$$\omega_{res}(R, L, C) = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2}$$

Resonanzüberhöhung triit auf, wenn die Resonanzfrequenz einen positiven Wert hat. Dies ist der Fall, wenn die obige Diskriminante größer 0 ist. **Bei einem komplexen Ergebnis der Wurzel tritt keine Resonanz auf!**

Berechnung des Grenzfalles
(2 Varianten)

$$1 - \frac{R^2 \cdot C}{2 \cdot L} = 0 \text{ auflösen}, R \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (L \cdot C)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{C} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (L \cdot C)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ auflösen}, R \rightarrow 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$$

also ist $R_{resGr} := \sqrt{2 \cdot \frac{L}{C}}$ $\qquad R_{resGr} = 44.721\,\Omega \qquad R_{resGr} \equiv 44.721\Omega$

$\ddot{u}_{rz}(R) := \left|G(\omega_{res}(R, L, C), R)\right|$ Berechnung der Resonanzüberhöhung in Abhängigkeit von R

$\ddot{u}_{rz}(0\Omega) = 9.007 \times 10^{15}$ Keine Dämpfung - Polstelle (Mathcad zeigt hohen Wert an!)

$\ddot{u}_{rz}(10\Omega) = 3.203$

$\ddot{u}_{rz}(20\Omega) = 1.667$

$\ddot{u}_{rz}(44.7\Omega) = 1$ Das ist der Grenzfall!

Link zur Beispielsübersicht

$$\left. \left(\frac{\ldots - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - 4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] + C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot R^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \ldots}{\ldots}\right.\right.$$

$$\left. t\right] + C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L} \cdot R^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - 4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L} \cdot L \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-R^2 \cdot C + 4 \cdot L}{L^2 \cdot C}\right)\right.$$

$$\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] + 4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right.}{4 \cdot L - R^2 \cdot C}$$

$$\left.\frac{L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\Big]\Big]$$

$$\left.\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\Big]\Big]$$

$$\cdots \cdot R^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] + \Phi(t-a) - 2 \cdot R \cdot C \cdot \Phi(t-a) \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot (t-a)\right] \cdot L \cdot \frac{\left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$- \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^{2} \cdot C}{L^{2} \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (t - a)\right] - L \cdot C \cdot \left[-\Phi(t - a) \cdot \frac{\exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot (t - a)\right]}{4 \cdot L - R^{2} \cdot C} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^{2} \cdot C}{L^{2} \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{4\cdot L-R^{2}\cdot C}{L^{2}\cdot C}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(t-a)\right]+4\cdot\Phi(t-a)\cdot\frac{\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot(t-a)\right]}{\left(4\cdot L-R^{2}\cdot C\right)\cdot C}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\cdot L-R^{2}\cdot C}{L^{2}\cdot C}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(t-a)\right]-\Phi(t-a)\cdot$$

$$\cdot \frac{\exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot (t - a)\right]}{L \cdot \left(4 \cdot L - R^2 \cdot C\right)} \cdot R^2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (t - a)\right]\Bigg]\Bigg]$$