Wilfried Rohm

Kostenfunktion - Der Cournotsche Punkt

Der Cournotsche Punkt C beschreibt die gewinnmaximale Preis-Mengen-Kombination mit den Koordinaten $C(p_c; x_c)$.
Er sagt aus, bei welcher Menge x_c (einer Produktion) der maximale Gewinn erzielt wird und welcher Preis p_c für das Produkt verlangt werden muss, damit sich diese Menge auch absetzen lässt.
Dieser Cournotsche Punkt soll für eine bestimmte (gegebene) Kostenfunktion und eine linear angenommene Preisabsatzfunktion bestimmt werden (Die Aufgabenstellung wurde dem Buch "Mathematik im Betrieb" von Holland/Holland entnommen)

Gegeben ist eine Kostenfunktion

$$K(x) := \frac{x^3}{9} - 8 \cdot x^2 + 600x + 4000$$

Die Preisabsatzfunktion soll aus folgenden Angaben bestimmt werden:

Im letzten Jahr wurden 50 Produkte zu einem Preis von 1200 € verkauft.
Bei einer Preiserhöhung um 50 € wird nach einer Marktforschungsuntersuchung ein Rückgang des Absatzes um 45 Stück erwartet.

Hier wird die als linear angenommene Preisabsatzfunktion über die symbolische Lösung eines Gleichungssytems bestimmt:

Vorgabe

$$1200 = k \cdot 50 + d$$

$$1250 = k \cdot 45 + d$$

$$\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} := \text{Suchen}(k, d) \rightarrow \begin{pmatrix} -10 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Preisabsatzfunktion $p(x) := 1700 - 10x$

Daraus ergibt sich:

Umsatzfunktion $U(x) := p(x) \cdot x$

Gewinnfunktion $G(x) := U(x) - K(x)$

$$G(x) \rightarrow 8 \cdot x^2 - 600 \cdot x - \frac{x^3}{9} - x \cdot (10 \cdot x - 1700) - 4000$$

$$G(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow 1100 \cdot x - 2 \cdot x^2 - \frac{x^3}{9} - 4000$$

Die Ermittlung des Gewinnmaximums (in Abhängigkeit von der erzeugten Stückzahl x) erfolgt über die Nullstelle der 1.Ableitung:

$$\frac{d}{dx}G(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{834}-6 \\ -2\cdot\sqrt{834}-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.758 \\ -63.758 \end{pmatrix}$$

$x_c := 52$

Die Lösung kann aber auch direkt zugeordnet werden (und ist damit unabhängig von speziell gewählten Werten). Das kann besipielsweise so erfolgen:

$$X\_C := \frac{d}{dx}G(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{834}-6 \\ -2\cdot\sqrt{834}-6 \end{pmatrix} \qquad X\_C = \begin{pmatrix} 51.758 \\ -63.758 \end{pmatrix}$$

X_C ist ein Vektor, der die beiden mathematischen Lösungen enthält - für unsere Problemstellung ist aber nur der obere Wert mit Index 0 brauchbar. Wir überzeugen uns aber mit der 2.Ableitung , dass tatsächlich ein Maximum vorliegt

$x_c := \text{rund}(X\_C_0)$ $\qquad x_c = 52$

Verwenden der Rundungsfunktion rund(x) [engl: round(x)]

$G_2(x) := \frac{d^2}{dx^2}G(x)$ $\qquad G_2(x_c) = -38.667$

Die zweite Ableitung zeigt, dass wirklich Maximimum vorliegt

$p(x_c) = 1180$

$G(52) = 32168.89$

$G(51) = 32159$

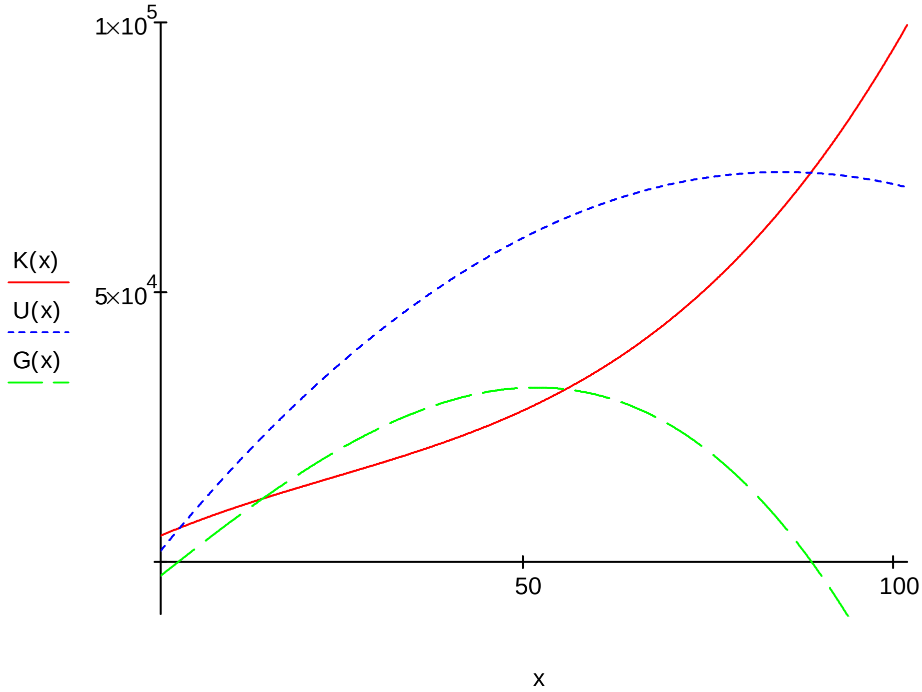
Hier wird nachgerechnet, ob die Rundung auch in die "richtige" Richtung durchgeführt wurde (was der Fall ist)

Die Funktionen U(x), K(x) und G(x) werden nun tabellarisch und anschließend grafisch dargestellt. Zu beachten ist, dass als "Laufvariable" statt x eine andere Variable eingeführt wird, damit es keinen (sonst möglichen) Konflikt mit späteren Berechnungen mit "x" geben soll.
Begründung: Durch die Definition einer Bereichsvariablen wird ja ein Vektor definiert! Hier habe ich als Variable "X" statt "x" gewählt (auch "xx" ist dafür eine gängige Variante)

$X := 0..200$

X =	U(X) =	K(X) =	G(X) =
0	0	$4\cdot10^3$	$-4\cdot10^3$
1	$1.69\cdot10^3$	$4.592\cdot10^3$	$-2.902\cdot10^3$
2	$3.36\cdot10^3$	$5.169\cdot10^3$	$-1.809\cdot10^3$
3	$5.01\cdot10^3$	$5.731\cdot10^3$	-721
4	$6.64\cdot10^3$	$6.279\cdot10^3$	360.889
5	$8.25\cdot10^3$	$6.814\cdot10^3$	$1.436\cdot10^3$
6	$9.84\cdot10^3$	$7.336\cdot10^3$	$2.504\cdot10^3$
7	$1.141\cdot10^4$	$7.846\cdot10^3$	$3.564\cdot10^3$
8	$1.296\cdot10^4$	$8.345\cdot10^3$	$4.615\cdot10^3$
9	$1.449\cdot10^4$	$8.833\cdot10^3$	$5.657\cdot10^3$
10	$1.6\cdot10^4$	$9.311\cdot10^3$	$6.689\cdot10^3$
...	...	...	...

Grafische Darstellungen



Das Herauslesen einens speziellen Wertes aus dem Diagramm kann beispielsweise mit dem Menüpunkt "Koordinaten ablesen" aus dem Kontextmenü der Grafik erfolgen:

$x_b := 89$ $y_b := 72090$ Beispiel für einen "bestimmten" Punkt.

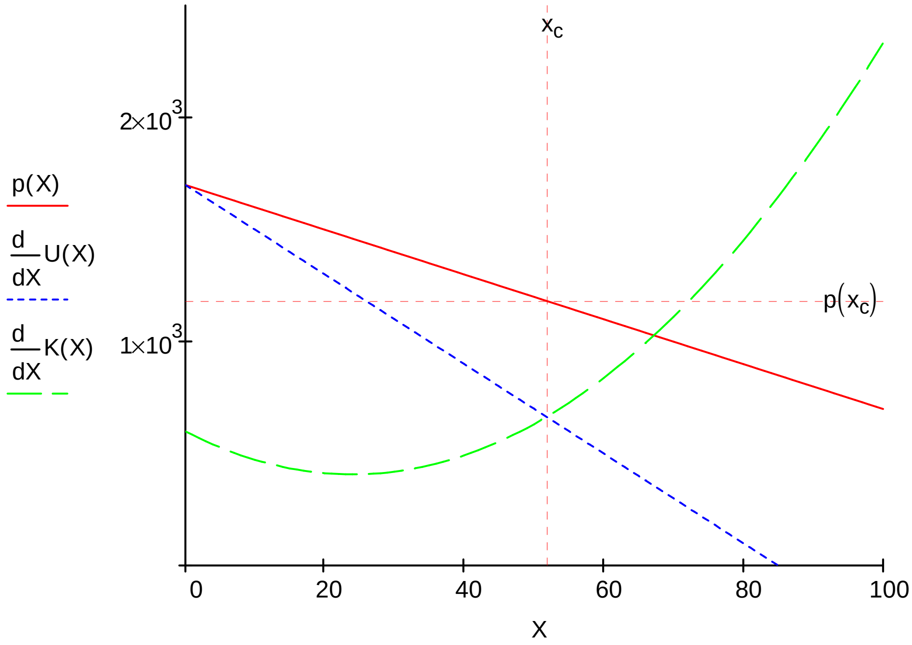
Bestimmung des Cournotschen Punktes

$x_c = 52$ $p(x_c) = 1180$

Die Bestimmung des Cournot'schen Punktes kann aber auch grafisch erfolgen. Das soll hier für den Fall eines Angebotsmonopolisten, der den Preis für das Produkt steuern kann und für den eine definierte Preisabsatzfunktion relevant ist, demonstriert werden.
Dazu sind folgende Überlegungen zu beachten:

- Die Preisabsatzfunktion hat einen linearen Verlauf. Daher muss die Umsatzfunktion (=p(x)*x) parabelförmig sein und die Grenzumsatzfunktion U'(x) die doppelte negative Steigung im Vergleich zur Preisabsatzfunktion haben.
- **Die gewinnmaximale Menge x_c ergibt sich aus dem Schnittpunkt von U'(x) mit K'(x)**.
  Begründung:
  Die Funktion G(x) = U(x)-K(x) ergibt abgeleitet: G'(x) = U'(x)-K'(x)
  Da zur Gewinnmaximierung gelten muss: G'(x)=0 muss auch gleichzeitig gelten: U'(x)=K'(x)
- **Wenn man den zu x_c gehörenden Punkt auf deer Preisabsatzfunktion einträgt, erhält man den Cournotschen Punkt C.**

$X := 0 .. 100$



Damit ist nun die ursprüngliche Aufgabe gelöst.

In weiterer Folge wollen wir aber hier noch der Frage nachgehen, wie die Abhängigkeit der obigen Funktionen und damit des Cournotschen Punktes von verschiedenen Parametern demonstriert werden kann.
Als Beispiel wird hier die **Abhängigkeit von der Steigung k der Preisabsatzfunktion p(x)** betrachtet.
Ziel ist es, die Grundlagen für eine entsprechende Animation zu liefern

Dazu müssen allerdings von Anfang an die verschiedenen Funktionen in (zusätzlicher) Abhängigkeit von k definiert werden.
Daher werden die wesentlichen Zeilen von oben kopiert und entsprechend verändert:

$k := k$

Diese "seltsame" Definition führt dazu, dass k für folgende symbolische Berechnungen "überschrieben" wird. Der zuvor festgelegte Wert von k behält allerdings für numerische Auswertungen und damit auch für die grafischen Darstellungen seine Gültigkeit.

Kostenfunktion

$$K(x) := \frac{x^3}{9} - 8 \cdot x^2 + 600x + 4000$$

Die Kostenfunktion bleibt als einzige der obigen Funktionen unabhängig von k

Nun lautet die Preisabsatzfunktion:

$$p(x,k) := 1700 + k \cdot x$$

Daraus ergibt sich:

Umsatzfunktion

$$U(x,k) := p(x,k) \cdot x$$

Gewinnfunktion

$$G(x,k) := U(x,k) - K(x)$$

$$G(x,k) \rightarrow x \cdot (k \cdot x + 1700) - 600 \cdot x + 8 \cdot x^2 - \frac{x^3}{9} - 4000$$

$$G(x,k) \text{ vereinfachen } \rightarrow 1100 \cdot x + k \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 - \frac{x^3}{9} - 4000$$

Hier erkennt man auch im Ergebnis die Abhängigkeit der Gewinnfunktion vom Parameter k

Ermittlung des Gewinnmaximums wieder über die 1.Ableitung

$$\frac{d}{dx}G(x,k) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot k - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot k^2 + 48 \cdot k + 1292} + 24 \\ 3 \cdot k + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot k^2 + 48 \cdot k + 1292} + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63.758 \\ 51.758 \end{pmatrix}$$

$x_c := 52$

Aus mir nicht klar ersichtlichen Gründen sind allerdings gegenüber oben die Vektorindizes vertauscht (nur in der Version Mathcad 14 !?!)

Die Lösung kann auch wieder direkt zugeordnet werden, etwa so:

$$X\_C(k) := \frac{d}{dx}G(x,k) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot k - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot k^2 + 48 \cdot k + 1292} + 24 \\ 3 \cdot k + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot k^2 + 48 \cdot k + 1292} + 24 \end{pmatrix}$$

$x_c(k) := \text{rund}\left(X\_C(k)_1\right)$ $\quad x_c(k) = 52$

Verwenden der Rundungsfunktion

$G_2(x) := \frac{d^2}{dx^2}G(x,k)$ $\quad G_2\left(x_c(k)\right) = -38.667$

Die zweite Ableitung zeigt, dass wirklich Maximimum vorliegt

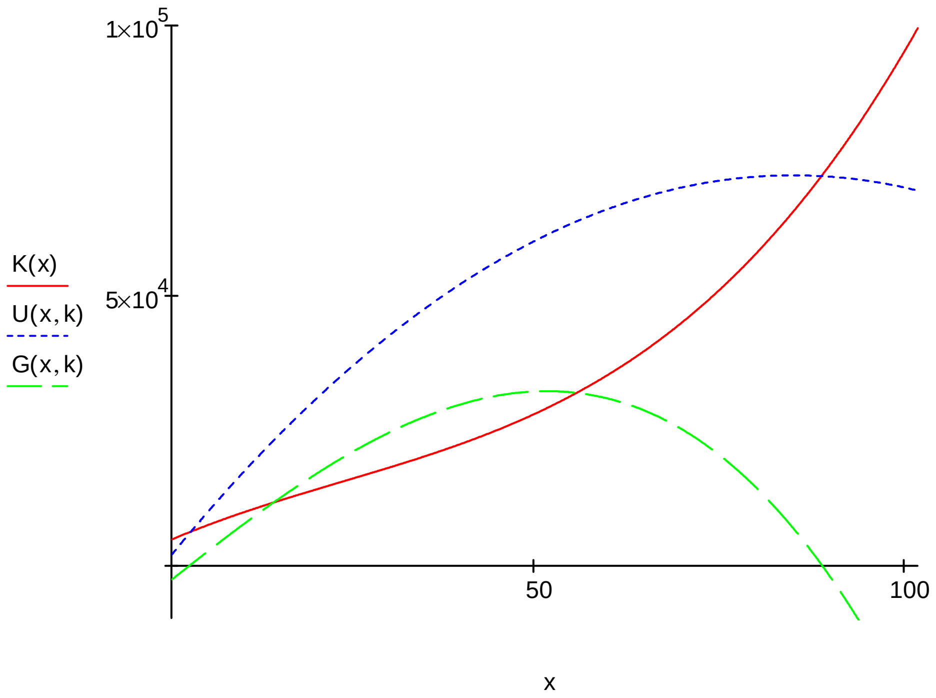
$p\left(x_c(k), k\right) = 1180$

Grafische Darstellungen

$X := 0 .. 100$

$k := -10$

Durch Veränderung des nebenstehend definierten Parameters k erhält man die Darstellung der Funktionen U(x,k) und G(x,k) - das Ergebnis kann entsprechend interpretiert werden.

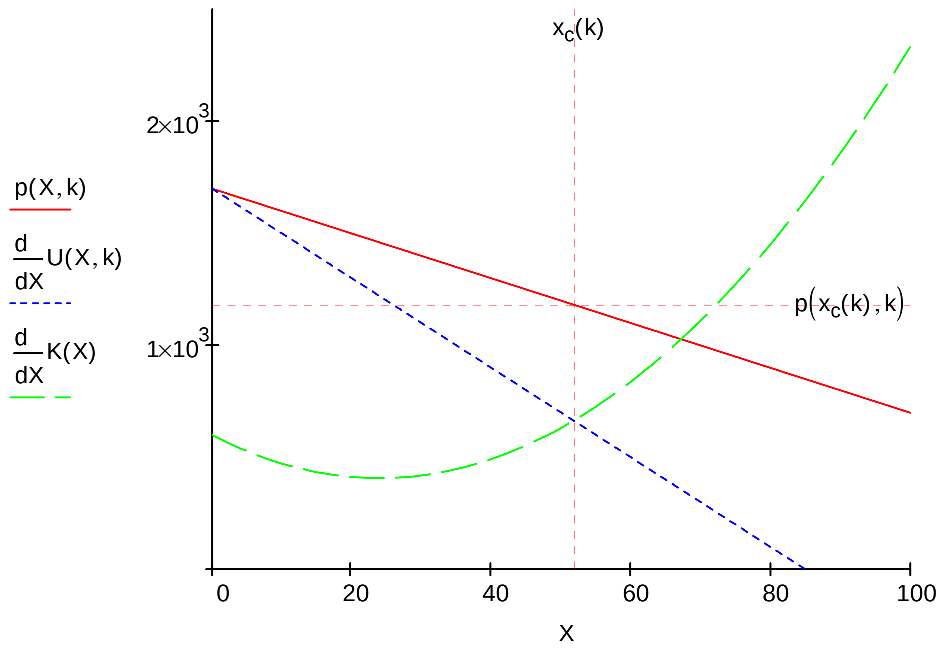


Bestimmung des Cournotschen Punktes

$x_c(k) = 52$ $p(x_c(k), k) = 1180$ Es wird der oben definierte Wert für k verwendet!

$X := 0..100$

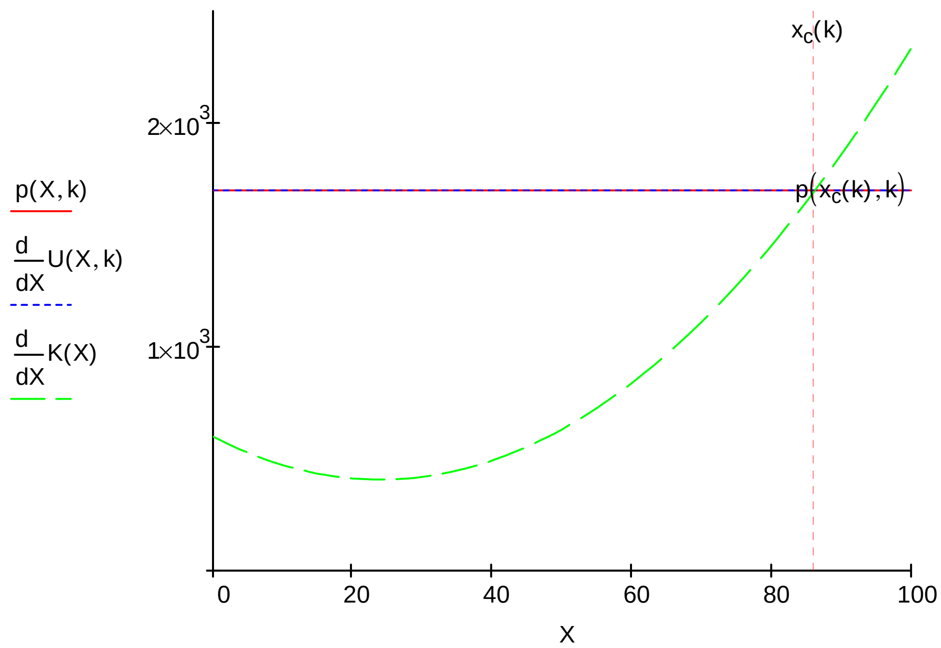
$k := -10$



Nun kann auch wie eingangs angeführt eine entsprechende Animation der letzten Grafik in Abhängigkeit von k erfolgen.

$k := 0 + (-1) \cdot FRAME$ FRAME kann beispielsweise von 0 bis 40 gehen.

$k = 0$



Das fertige Video steht als zip-Datei zur Verfügung.

- **Zurück zur Beispielübersicht "Wirtschaftsmathematik"**