Wilfried Rohm

# Differenzengleichungen

Differenzengleichungen bzw. rekursiv definierte Folgen ermöglichen eine relativ leichte Modellbildung und werden daher in biologischen Systemen und in der Wirtschaftsmathematik gerne und zunehmend zur Beschreibung von Systemen und im Besonderen auch zur Simulation dynamischer Systeme verwendet.

In Mathcad können Differenzengleichungen direkt rekursiv über die Definition von Vektoren "so wie auf einem Blatt Papier" angeschrieben werden. Hier folgen einige Aufgabenstellungen, wobei der Großteil dem HAK-Buch Hinkelmann/Böhm/Hofbauer/Metzger-Schuhäcker: Mathe mit Gewinn[2] entnommen sind.

Aufgabe 1: Zinseszinsrechnung

## Aufgabe 1: Zinseszinsrechnung

$n := 0..30$

$K_0 := 1000$ $\quad p := 0.06$

Wichtig ist, dass wirklich INDIZES definiert werden (kein "niedrig schrieben"!)

$K_{n+1} := K_n + p \cdot K_n$

Die Rekursionsgleichung für das Kapital nach n+1 Perioden definiert eine lineare Differenzengleichung 1.Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Möglichkeiten zur tabellarischen Darstellung:

$n =$

| |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| ... |

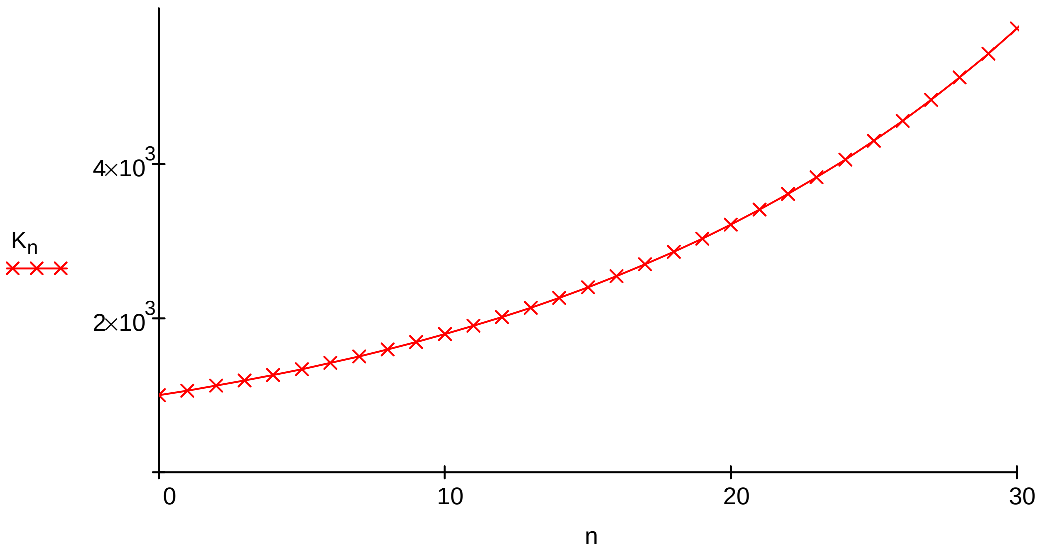
$K_n =$

| |
|---|
| $1 \cdot 10^3$ |
| $1.06 \cdot 10^3$ |
| $1.124 \cdot 10^3$ |
| $1.191 \cdot 10^3$ |
| ... |

$K =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | $1 \cdot 10^3$ |
| 1 | $1.06 \cdot 10^3$ |
| 2 | $1.124 \cdot 10^3$ |
| 3 | $1.191 \cdot 10^3$ |
| 4 | ... |

Grafische Darstellung:




Aufgabe 1: Zinseszinsrechnung

Aufgabe 2: Temperaturverlauf

**Aufgabe 2 : Gebremstes Wachstum (Sättigungskurve) am Beispiel des Temperaturverlaufes eines Getränkes, das einem Kühlschrank entnommen wird.**

Annahmen: Kühlschranktemperatur = 5°C
Die Erwärmung des Getränks pro Minute wird auf 30% von der Temperaturdifferenz geschätzt
Die Zimmertemperatur wird mit 22°C angegeben.

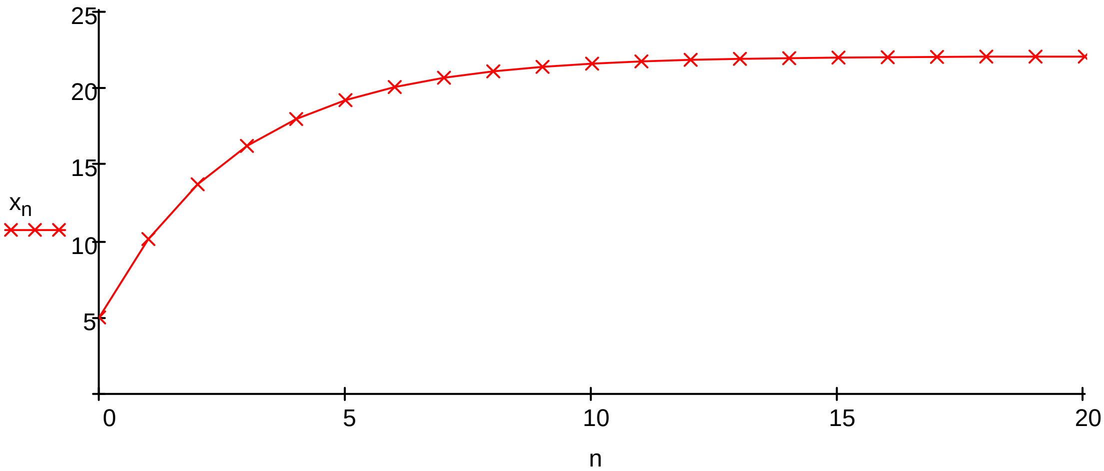
Gemäß den obigen Modellannahmen lässt sich die Erwärmung durch folgende Rekursionsformel beschreiben:

$x_0 := 5$ $n := 0 .. 20$

$x_{n+1} := x_n + 0.3 \cdot (22 - x_n)$

x =

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 10.1 |
| 2 | 13.67 |
| 3 | 16.169 |
| 4 | ... |



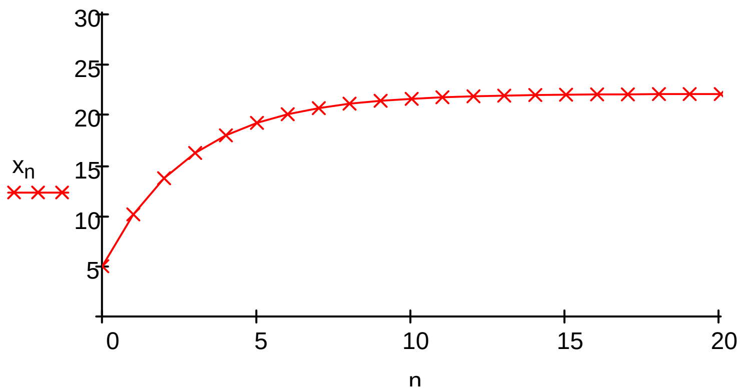

Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten

**Hinweis** : Es empfiehlt sich eigentlich immer, die Rekursionsformel (so wie oben) für den Wert mit dem Index **n+1** zu definieren und den Startwert (Anfangswert) mit dem Index 0 zu versehen.
Begründung:

- Vektoren werden in Mathcad standardmäßig ab 0 indiziert.
- Wird (so wie in manchen Büchern) die Rekursionsformel für den Wert mit dem Index n definiert, muss der Wert der "Laufvariabalen" n zweimal (für die Rekursionsformel und für die Grafik) unterschiedlich definiert werden, wie nachfolgend gezeigt wird.

$x_0 := 5$ $n := 1 .. 20$ $x_n := x_{n-1} + 0.3 \cdot (22 - x_{n-1})$

$n := 0 .. 20$




Aufgabe 2: Temperaturverlauf

Aufgabe 3: Logistisches Wachstum

Beim logistischen Wachstum wird der **Zuwachs** eine Population proportional zur momentanen Population (so wie beim exponentiellen Wachstum), aber **auch** proportional zur jeweils freiblebenden "Restkapazizät" angenommen (so wie beim gebremsten Wachstum mit einem "Sättigungswert" S - siehe auch Aufgabe 2)

Man erhält daher die folgende Diffenrenzengleichung:

$$y(n+1) - y(n) = k \cdot y(n-1) \cdot (S - y(n-1))$$

Umformung ergibt:

$$y(n+1) = y(n) + k \cdot y(n-1) \cdot (S - y(n-1))$$

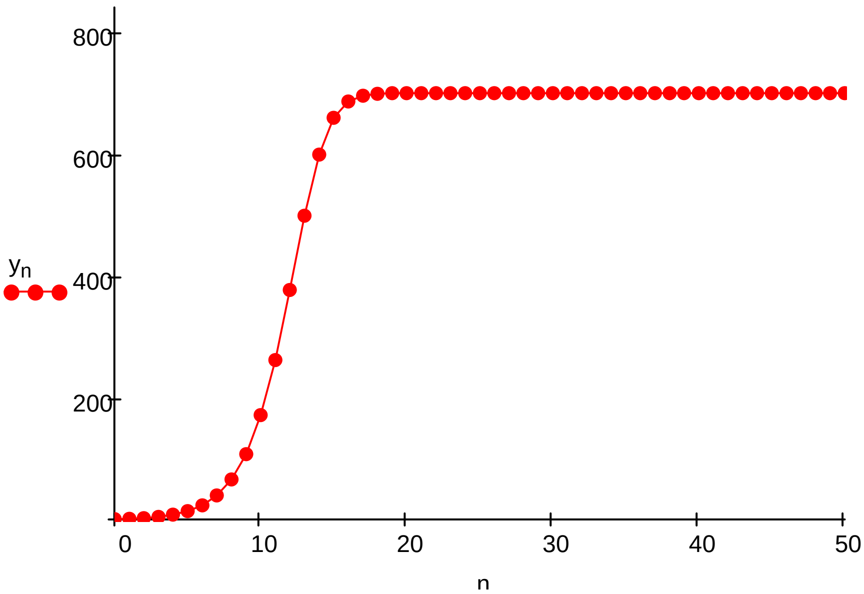
Umschreiben als "Vektorgleichung" ermöglicht wiederum eine tabellarische und grafische Darstellung:

$y_0 := 1$ $\quad k := \frac{1}{1000}$ $\quad S := 700$ $\quad$ getroffene Annahmen

$n := 0..50$ $\quad y_{n+1} := k \cdot y_n \cdot (S - y_n) + y_n$

y =

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1.699 |
| 2 | 2.885 |
| 3 | 4.897 |
| 4 | 8.301 |
| 5 | 14.042 |
| 6 | 23.675 |
| 7 | 39.687 |
| 8 | 65.892 |
| 9 | 107.675 |
| 10 | 171.453 |
| 11 | 262.074 |
| 12 | ... |




Aufgabe 3: Logistisches Wachstum

## Aufgabe 4: Gekoppelte Differenzengleichungen

Als Beispiel für eine komplexere Systembeschreibung mit Differenzengleichungen wird hier das klassische **Räuber-Beute-Modell von Lotka/Volterra** vorgeführt.

Dieses Modell simuliert eine kleine Nahrungskette mit dem Fuchs als Fleisch fressenden Räuber und dem Hasen als Pflanzen fressendes Beutetier.
Als Variablen verwenden wir H für den Hasenbestand und F für den Fuchsbestand.

In Abwesenheit von Füchsen wird für die Hasen ein exponentielles Wachstum (Parameter a) angenommen, allerdings wird bei jedem Zusammentreffen Hase-Fuchs (dessen Wahrscheinlichkeit abhängig von den Beständen, also dem Produkt H*F ist) der Bestand gemäß einem Parameter c reduziert.

Bei den Füchsen nimmt ohne Beute der Bestand mit dem Parameter b exponentiell ab und (ähnlich wie oben) nimmt der Bestand in Abhängigkeit von der Zusammentreffwahrscheinlichkeit mit dem Parameter d ("der Beutewahrscheinlichkeit") zu.

Als (natürlich veränderbare) Werte wird nun angenommen:

| | |
|---|---|
| $a := 0.08$ | Nettozuwachsrate der Hasen |
| $b := 0.2$ | Gewichtsverlust der Füchse / Woche |
| $c := 0.002$ | Wahrscheinlichkeit für einen Hasen, bei einem Treffen mit einem Fuchs gerissen zu werden |
| $d := 0.0004$ | Beutewahrscheinlichkeit (aus der Sicht des Fuchses) |
| $H_0 := 500 \quad F_0 := 20$ | Populationsgrößen zum Beginn |

Aus den obigen Modellannahmen resultiert das folgrende gekoppelte Differenzengleichungssystem:

$n := 0..200$

$$\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} H_n + a \cdot H_n - c \cdot H_n \cdot F_n \\ F_n - b \cdot F_n + d \cdot H_n \cdot F_n \end{pmatrix}$$

Die gekoppelten Diffenzengleichungen werden in **einen** Vektor geschrieben, sodass für die Berechnung von $H_{n+1}$ bzw. $F_{n+1}$ sowohl $H_n$ als auch $F_n$ bekannt sind!

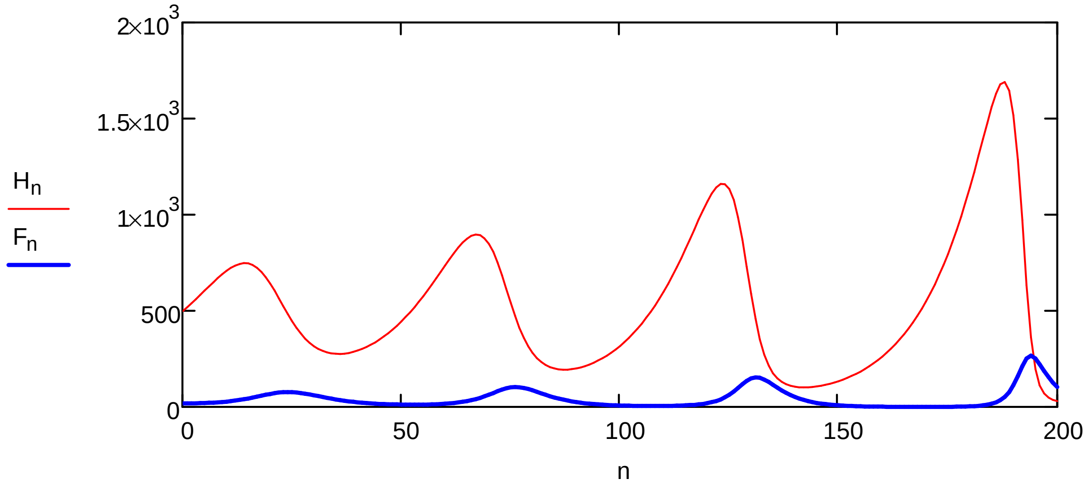
H =

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 500 |
| 1 | 520 |
| 2 | 541 |
| 3 | 562 |
| 4 | 584 |
| 5 | 606 |
| 6 | 629 |
| 7 | 650 |
| 8 | 672 |
| 9 | 691 |
| 10 | 709 |
| 11 | ... |

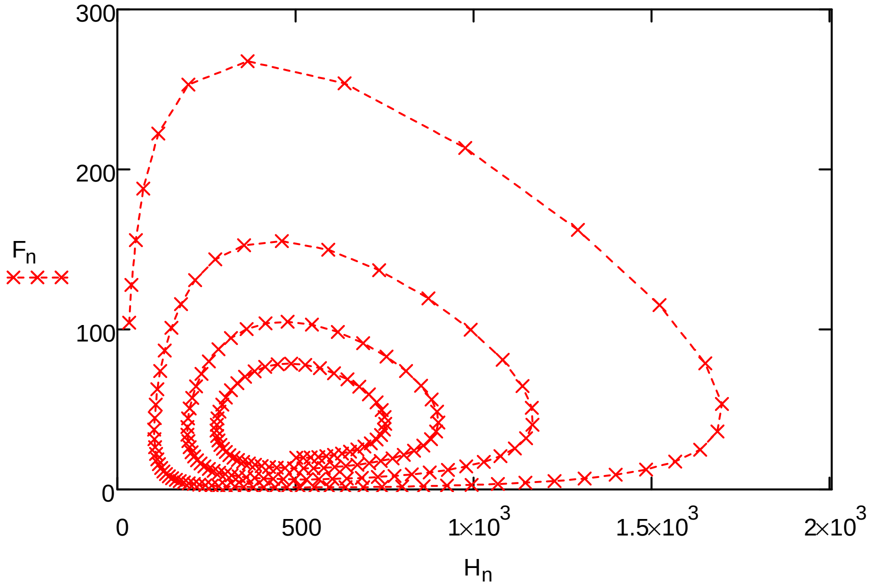
F =

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 1 | 20 |
| 2 | 20 |
| 3 | 20 |
| 4 | 21 |
| 5 | 22 |
| 6 | 23 |
| 7 | 24 |
| 8 | 25 |
| 9 | 27 |
| 10 | 29 |
| 11 | ... |

**Zeitdiagramm**




**Phasendiagramm**




Aufgabe 4: Gekoppelte Differenzengleichungen

- **Zurück zur Beispielübersicht "Wirtschaftsmathematik"**