Roland Pichler roland.pichler@htl-kapfenberg.ac.at

SPLINE Interpolation

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Polynome, Gleichungssysteme, Differenzialrechnung

- Kurzzusammenfassung

  In der technischen Praxis ist es des öfteren nötig, dass Auswertungen von Messungen durchgeführt werden müssen. Dazu wird sehr häufig die Spline-Interpolation verwendet. In diesem Beitrag sollen die Grundgedanken der kubischen Spline-Interpolation ausgeführt werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, über mehrere Jahrgänge verteilt, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

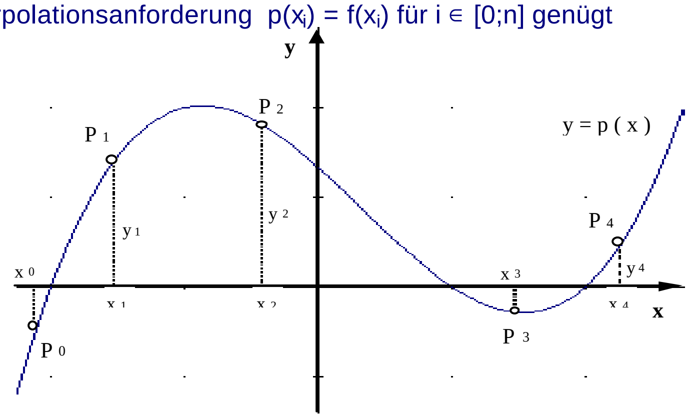
  Mathcad 2001

Grundidee

Eine reelle Funktion f(x) die als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt wird, ist häufig nur an vorgegebenen Argumentstellen

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n \,,$$

den sogenannten Stützstellen bekannt. Die Stützwerte $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ... $y_n = f(x_n)$ erhält man möglicherweise durch Messungen oder Berechnungen; an den Zwischenstellen ist der Wert von f)x) hingegen nicht bekannt. Die Interpolationsaufgabe besteht nun darin, daß man eine Funktion p(x) aus einer gegebenen Funktionsklasse bestimmt, die für $x \in [x_0, x_n]$definiert ist und die der Interpolationsanforderung $p(x_i) = f(x_i)$ für $i \in [0;n]$ genügt



Am Graph des Interpolationspolynoms bemerkt man, daß zwischen den Stützstellen relativ große Schwankungen auftreten. Diese „Welligkeit“ wird um so größer, je mehr Stützstellen vorhanden sind. Durch diese großen Schwankungen sind derartige Polynome zu Weiterbearbeitung (z. B. numerische Differentiation) nicht geeignet.
Diese Probleme kann man mit Hilfe der *Spline - Interpolation* vermeiden. Die Spline - Interpolation ermittelt eine Funktion S(x), die zwischen Stützstellen $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots. < x_n$, den sogenannten *Splineknoten*, möglichst geringe Schwankungen aufweist und trotzdem eine hohe Glattheit besitzt. Das gelingt, indem man die in jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ durch ein Polynom 3. Grades (kubische Splineinterpolation) interpoliert, welches man derart anschreibt:

$S(x) = S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x \cdot x_k)^3$

mit $x \in [x_k, x_{k+1}]$ und $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ergibt **4n** Koeffizienten.

Für $x \geq x_n$ setzt man zusätzlich

$S(x) = S_n(x) = a_n + b_n(x - x_n) + c_n(x - x_n)^2$; (man erhält **3** zusätzliche Koeffizienten)

so daß sich die interpolierende Funktion S(x) aus n + 1 Polynomen $S_k(x)$ mit insgesamt **4n + 3** Koeffizienten zusammensetzt.
Fordert man, daß S(x) die gegebenen Werte y_k an den Knoten x_k interpoliert, weiters daß S(x), S´(x) und S´´(x) stetige Funktionen sind und S(x) in den Intervallen $(-\infty, x_0]$ und $[x_n, \infty)$ linear ist, so heißt S(x) *natürliche Splinefunktion 3. Grades*. Unter diesen Bedingungen erfüllt S(x) die interessante Voraussetzung, daß sie unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die Punkte (x_k, y_k) interpolieren, die kleinste Gesamtkrümmung

$$K = \int_{x_0}^{x_n} [S''(x)]^2 \, dx \rightarrow \text{Min}$$

hat und somit eine besondere Eignung von S´(x) als näherungsweise Ableitung berechtigt ist.

Die 4n + 3 Spline - Koeffizienten a_k, b_k, c_k und d_k berechnet man folgendermaßen:

(i) Interpolationsforderung: $\boxed{S_k(x_k) = y_k}$ $k = 0, \dots, n$

(liefert n + 1 Koeffizienten)

(ii) Stetigkeitsforderung: $\boxed{\begin{array}{l} S_k(x_k) = S_{k-1}(x_k) \\ S_k{}'(x_k) = S_{k-1}{}'(x_k) \\ S_k{}''(x_k) = S_{k-1}{}''(x_k) \end{array}}$ $k = 1, \dots, n$

(liefert 3n Koeffizienten)

(iii) Linearitätsforderung: $\boxed{S_0{}''(x_0) = S_n{}''(x_n)}$
(liefert 2 Koeffizienten)

Man sieht, daß schon bei wenigen Knoten die Anzahl benötigter Gleichungen sehr groß wird. Die so entstehenden Gleichungssysteme können aber mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus gelöst werden.

Neben den kubischen Splines werden auch lineare und quadratische Splines verwendet, wobei die interpolierenden Polynome entweder lineare oder quadratische Funktionen sind.

Anhand von 4 Stützpunkten mit den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ und den zugehörigen Werten $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ und $y_3 = 1$ sollen nun die 4 Splinefunktionen $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ und $S_4(x)$ bestimmt werden und dann mit der internen kubischen Splineberechnung, welche Mathcad anbietet, verglichen werden.

Spline - Interpolation für die Knotenpunkte (0|0), (1|1), (2|0) und (3|1)

Stützpunkte (Knotenpunkte):

$x_0 := 0$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$ $x_3 := 3$

$y_0 := 0$ $y_1 := 1$ $y_2 := 0$ $y_3 := 1$

Näherungspolynome und deren Ableitungen

$$S_k(x) = a_k + b_k \cdot (x - x_k) + c_k \cdot (x - x_k)^2 + d_k \cdot (x - x_k)^3$$

$$\frac{d}{dx}\left[a_k + b_k \cdot (x - x_k) + c_k \cdot (x - x_k)^2 + d_k \cdot (x - x_k)^3\right] \rightarrow b_k + 2 \cdot c_k \cdot (x - x_k) + 3 \cdot d_k \cdot (x - x_k)^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[a_k + b_k \cdot (x - x_k) + c_k \cdot (x - x_k)^2 + d_k \cdot (x - x_k)^3\right] \rightarrow 2 \cdot c_k + 6 \cdot d_k \cdot (x - x_k)$$

Interpolationsbedingungen:

$$S_0(x) = a_0 + b_0 \cdot (x - x_0) + c_0 \cdot (x - x_0)^2 + d_0 \cdot (x - x_0)^3$$

$x := 0$

$a_0 + b_0 \cdot (x - x_0) + c_0 \cdot (x - x_0)^2 + d_0 \cdot (x - x_0)^3 = y_0 \rightarrow a_0 = 0$

$$S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot (x - x_1) + c_1 \cdot (x - x_1)^2 + d_1 \cdot (x - x_1)^3$$

$x := 1$

$a_1 + b_1 \cdot (x - x_1) + c_1 \cdot (x - x_1)^2 + d_1 \cdot (x - x_1)^3 = y_1 \rightarrow a_1 = 1$

$$S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot (x - x_2) + c_2 \cdot (x - x_2)^2 + d_2 \cdot (x - x_2)^3$$

$x := 2$

$a_2 + b_2 \cdot (x - x_2) + c_2 \cdot (x - x_2)^2 + d_2 \cdot (x - x_2) = y_2 \rightarrow a_2 = 0$

$$S_3(x) = a_3 + b_3 \cdot (x - x_3) + c_3 \cdot (x - x_3)^2$$

$x := 3$

$a_3 + b_3 \cdot (x - x_3) + c_3 \cdot (x - x_3)^2 = y_3 \rightarrow a_3 = 1$

Stetigkeitsforderung:

$$S_1(x_1) = S_0(x_1)$$

$x := 1$

$a_1 + b_1 \cdot (x - x_1) + c_1 \cdot (x - x_1)^2 + d_1 \cdot (x - x_1)^3 = a_0 + b_0 \cdot (x - x_{0.}) + c_0 \cdot (x - x_{0.})^2 + d_0 \cdot (x - x_0)^3$

ergibt $a_1 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0$

$$S_2(x_2) = S_1(x_2)$$

$x := x_2$

$a_2 + b_2 \cdot (x - x_2) + c_2 \cdot (x - x_2)^2 + d_2 \cdot (x - x_2)^3 = a_1 + b_1 \cdot (x - x_1) + c_1 \cdot (x - x_1)^2 + d_1 \cdot (x - x_1)^3$

ergibt $a_2 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$

$$S_3(x_3) = S_2(x_3)$$

$x := x_3$

$a_3 + b_3 \cdot (x - x_3) + c_3 \cdot (x - x_3)^2 = a_2 + b_2 \cdot (x - x_2) + c_2 \cdot (x - x_2)^2 + d_2 \cdot (x - x_2)^3$

ergibt $a_3 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2$

$$S'_1(x_1) = S'_0(x_1)$$

$x := x_1$

$b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot (x - x_1) + 3 \cdot d_1 \cdot (x - x_1)^2 = b_0 + 2 \cdot c_0 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot d_0 \cdot (x - x_0)^2$

ergibt $b_1 = b_0 + 2 \cdot c_0 + 3 \cdot d_0$

$$S'_2(x_2) = S'_1(x_2)$$

$x := x_2$

$b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - x_2) + 3 \cdot d_2 \cdot (x - x_2)^2 = b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot (x - x_1) + 3 \cdot d_1 \cdot (x - x_1)^2$

ergibt $b_2 = b_1 + 2 \cdot c_1 + 3 \cdot d_1$

$$S'_3(x_3) = S'_2(x_3)$$

$x := x_3$

$b_3 + 2 \cdot c_3 \cdot (x - x_3) = b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - x_2) + 3 \cdot d_2 \cdot (x - x_2)^2$ ergibt $b_3 = b_2 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot d_2$

$$S''_1(x_1) = S''_0(x_1)$$

$x := x_1$

$2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1 \cdot (x - x_1) = 2 \cdot c_0 + 6 \cdot d_0 \cdot (x - x_0)$ ergibt $2 \cdot c_1 = 2 \cdot c_0 + 6 \cdot d_0$

$$S''_2(x_2) = S''_1(x_2)$$

$x := x_2$

$2 \cdot c_2 + 6 \cdot d_2 \cdot (x - x_2) = 2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1 \cdot (x - x_1)$ ergibt $2 \cdot c_2 = 2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1$

$$S''_3(x_3) = S''_2(x_3)$$

$x := x_3$

$2 \cdot c_3 = 2 \cdot c_2 + 6 \cdot d_2 \cdot (x - x_2)$ ergibt $2 \cdot c_3 = 2 \cdot c_2 + 6 \cdot d_2$

Linearitätsforderung:

$S''_0(x_0) = 0$ $\qquad$ $S''_3(x_3) = 0$

$x := x_0 \qquad 2 \cdot c_0 + 6 \cdot d_0 \cdot (x - x_0) = 0 \rightarrow 2 \cdot c_0 = 0 \qquad 2 \cdot c_3 = 0$

Das lineare Gleichungssystem wird nun gelöst.

Vorgabe

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 1$ $\qquad$ Interpolationsforderung

$a_2 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \quad b_1 = b_0 + 2 \cdot c_0 + 3 \cdot d(\quad 2 \cdot c_1 = 2 \cdot c_0 + 6 \cdot d_0$

$a_1 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 \quad b_2 = b_1 + 2 \cdot c_1 + 3 \cdot d \quad 2 \cdot c_2 = 2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1$ $\qquad$ Stetigkeitsforderung

$a_3 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \quad b_3 = b_2 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot d_2 \quad 2 \cdot c_3 = 2 \cdot c_2 + 6 \cdot d_2$

$2 \cdot c_0 = 0 \quad 2 \cdot c_3 = 0$ $\qquad$ Linearitätsforderung

$$\text{suchen}(a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3, d_0, d_1, d_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Die gefundenen Lösungen:

$a_0 := 0 \qquad b_0 := \frac{5}{3} \qquad c_0 := 0 \qquad d_0 := \frac{-2}{3}$

$a_1 := 1 \qquad b_1 := \frac{-1}{3} \qquad c_1 := -2 \qquad d_1 := \frac{4}{3}$

$a_2 := 0 \qquad b_2 := \frac{-1}{3} \qquad c_2 := 2 \qquad d_2 := \frac{-2}{3}$

$a_3 := 1 \qquad b_3 := \frac{5}{3} \qquad c_3 := 0$

Die grafische Darstellung der drei Polynome über den gesamten Definiotionsbereich:

$x := -0.1, -0.09 .. 3.1$ Definitionsbereich

$S_0(x) := a_0 + b_0 \cdot (x - x_0) + c_0 \cdot (x - x_0)^2 + d_0 \cdot (x - x_0)^3$

$S_1(x) := a_1 + b_1 \cdot (x - x_1) + c_1 \cdot (x - x_1)^2 + d_1 \cdot (x - x_1)^3$ Funktionsgleichungen, die zwischen den Knotenstellen gelten

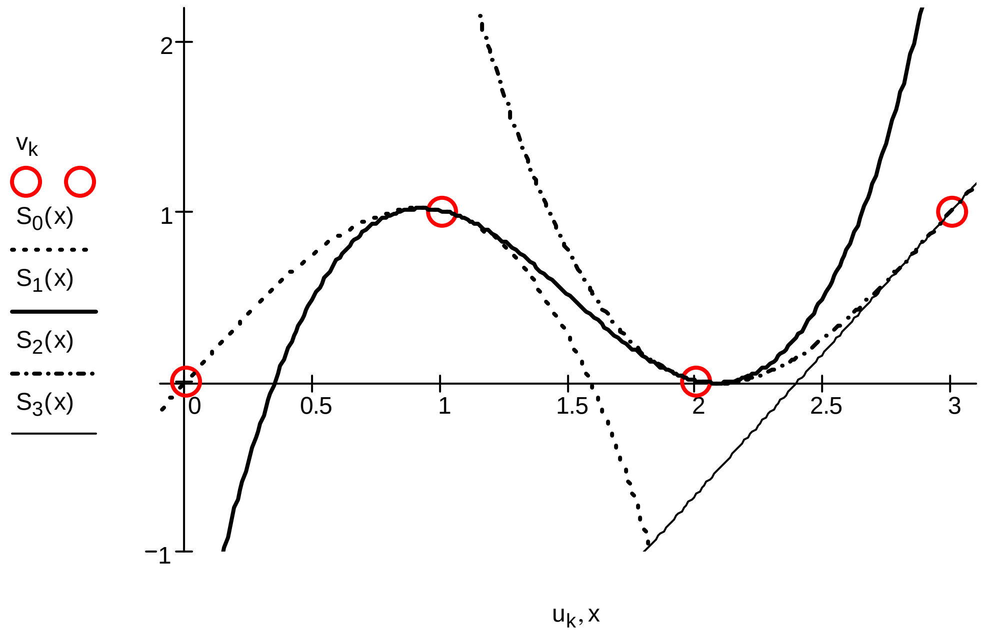
$S_2(x) := a_2 + b_2 \cdot (x - x_2) + c_2 \cdot (x - x_2)^2 + d_2 \cdot (x - x_2)^3$

$S_3(x) := a_3 + b_3 \cdot (x - x_3) + c_3 \cdot (x - x_3)^2$ Funktionsgleichung für den rechten Knoten

$k := 0 .. 3$ Laufvariable für die Knotenpunkte

$u_k :=$ $v_k :=$ Knotenpunkte

u_k	v_k
0	0
1	1
2	0
3	1



Mathcad bietet zur Berechnung von kubischen Splines eine interne Funktion *interp(....)* an.

$vs := \mathrm{lspline}(u, v)$ erzeugt einen Datenvektor, der weiter verarbeitet wird.

$\mathrm{interp}(vs, u, v, x)$ bestimmt die interpolierten Werte.

$$S(x) := \begin{array}{|ll} S_0(x) & \text{if } \; -.1 \le x \le 1 \\ S_1(x) & \text{if } \; 1 \le x \le 2 \\ S_2(x) & \text{if } \; 2 \le x \le 3 \\ S_3(x) & \text{otherwise} \end{array}$$

Selbstdefinierte Funktion S(x), die sich aus den Unbekannten des Gleichungssystems ergibt.

$\mathrm{interp}(vs, u, v, 0.707) = 0.942737838 \quad S(0.707) = 0.942737838$

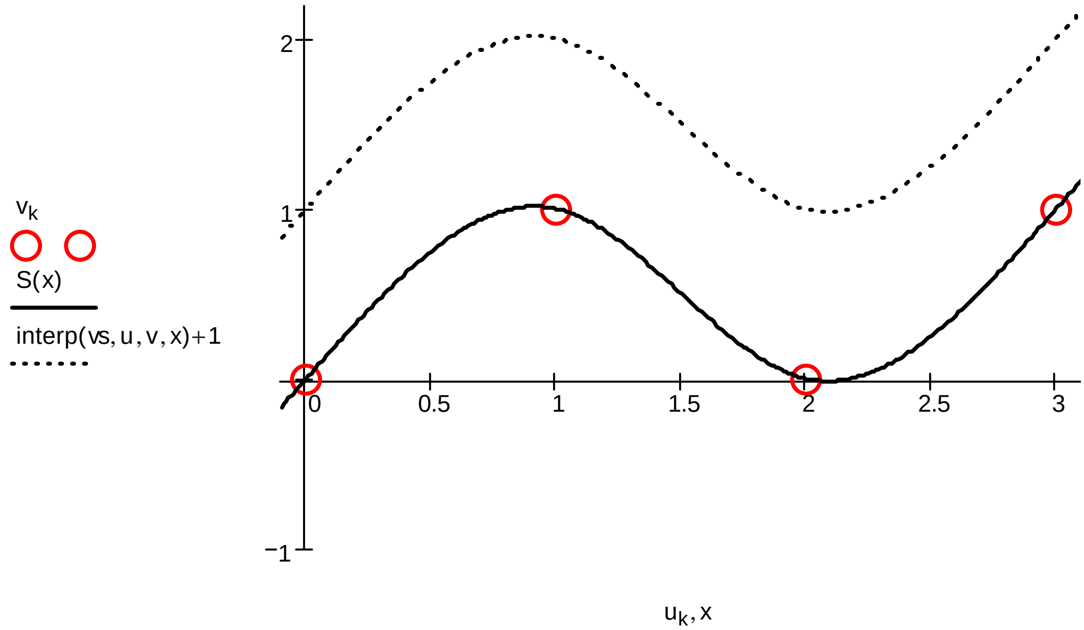
$\mathrm{interp}(vs, u, v, 1.235) = 0.8285205 \quad S(1.235) = 0.8285205$

$\mathrm{interp}(vs, u, v, 2.461) = 0.206060546 \quad S(2.461) = 0.206060546$

Vergleich zwischen interpolierten Werten durch interp(....) bzw. S(x) auf 10 Nachkommastellen

$S(0) = 0 \qquad S(1) = 1 \qquad S(2) = 0 \qquad S(3) = 1$

Werte an den Knoten



Zu interp(..) wurde 1 addiert, damit man die Identität der beiden Graphen sieht.