Angaben zu Aufgabe 1:

$F := 12000 \cdot N$ Belastung

$d := 2.5 \cdot m$ Seitenlänge des Basisdreiecks

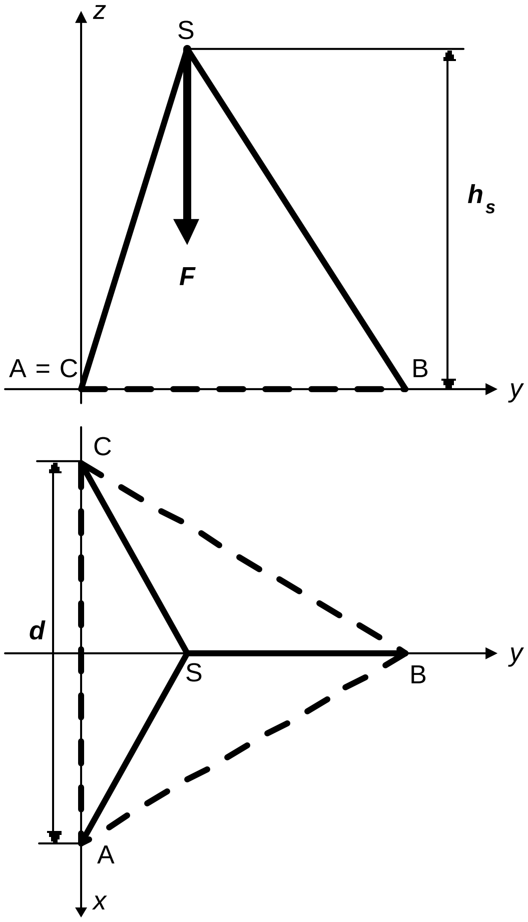
$h_s := 3.5 \cdot m$ Höhe des Spitze über der Grundfläche des Basisdreiecks

Die Stabkräfte und die Kraft in den Ketten wurde mit Hilfe der Vektorrechnung berechnet. Dabei wird der Ursprung O des Koordinatensystems im Fußpunkt von S angenommen

Zwischenrechnung für die vektorielle Darstellung der Stabvektoren

$h := \frac{d}{2} \cdot \sqrt{3}$ $h = 2\,m$ Höhe des Basisdreiecks

$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{h_s}{\frac{2}{3} \cdot h}\right)$ $\alpha = 67.59\,Grad$ Winkel zwischen Stab und Basisdreieck (aus Symmetriegründen für alle drei Stäbe gleich)



$\boldsymbol{OS} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_s \end{pmatrix}$ Ortsvektor OS

$\boldsymbol{OA} := \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{-1}{3} \cdot h \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortsvektor OA

$\boldsymbol{OB} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \cdot h \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortsvektor OB

$\boldsymbol{OC} := \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{-1}{3} \cdot h \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortsvektor OC

$\boldsymbol{S1} := \boldsymbol{OS} - \boldsymbol{OB}$ $\boldsymbol{S2} := \boldsymbol{OS} - \boldsymbol{OA}$ $\boldsymbol{S3} := \boldsymbol{OS} - \boldsymbol{OC}$

Berechnung der Stabkräfte: (dabei wurden die Stabkräfte indiziert (als Literalindex), ist nicht notwendig, man könnte auch mit den obigen Definitionen arbeiten)

$$\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

Belastung in vektorieller Darstellung

$$\boldsymbol{S_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}\cdot h \\ h_s \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{S_2} := \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{1}{3}\cdot h \\ h_s \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{S_3} := \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{1}{3}\cdot h \\ h_s \end{pmatrix}$$

Stabvektoren (Vektoren in Stabrichtung, nicht zu verwechseln mit den Stabkräften)

Die Stabkräfte werden über die Gleichgewichtsbedingung für Kräfte berechnet. Dabei treten die unbekannten Proprtionalitätsfaktoren (k_1, k_2, k_3 mit Literalindex) auf, die zur Bestimmung der Stabkräfte dienen. Sie geben die Zug- oder Druckkräfte (je nach Vorzeichenkonvetion) in den Stäben bezogen auf die Längeneinheit an.

Vorgabe

$$k_1\cdot{\boldsymbol{S_1}}_1 + k_2\cdot{\boldsymbol{S_2}}_1 + k_3\cdot{\boldsymbol{S_3}}_1 = \boldsymbol{F}_1$$ x - Komponente

$$k_1\cdot{\boldsymbol{S_1}}_2 + k_2\cdot{\boldsymbol{S_2}}_2 + k_3\cdot{\boldsymbol{S_3}}_2 = \boldsymbol{F}_2$$ y - Komponente

$$k_1\cdot{\boldsymbol{S_1}}_3 + k_2\cdot{\boldsymbol{S_2}}_3 + k_3\cdot{\boldsymbol{S_3}}_3 = \boldsymbol{F}_3$$ z - Komponente

Die Vektoren $\boldsymbol{F}_i$ und $\boldsymbol{S}_i$ werden mit Feldindizes (STRG [ ) versehen, damit man auf die einzelnen Komponenten der Vektoren zugreifen kann.
Achtung:
ORIGIN wurde auf 1 gestellt (Mathcad 11: Extras - Arbeitsblattoptionen - vordefinierte Variablen, Standardeinstellung ist ORIGIN = 0).

$$k := \text{Suchen}(k_1, k_2, k_3)\ \text{gleit}, 3 \ \rightarrow \begin{pmatrix} -1.14\cdot 10^3\cdot\frac{N}{m} \\ -1.14\cdot 10^3\cdot\frac{N}{m} \\ -1.14\cdot 10^3\cdot\frac{N}{m} \end{pmatrix}$$

Definition von k:= suchen(..) liefert den Lösungsvektor k; man kann nun auf die Feldindizes (STRG [ ) zugreifen

$$k = \begin{pmatrix} -1140 \\ -1140 \\ -1140 \end{pmatrix}\frac{N}{m}$$

$\boldsymbol{FS_1} := k_1 \cdot \boldsymbol{S_1}$ $\boldsymbol{FS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1645 \\ -3990 \end{pmatrix} \mathrm{N}$ Stabkraft des Stabes DB

$\left|\boldsymbol{FS_1}\right| = 4316\,\mathrm{N}$ Betrag der Stabkraft DB

$F_v := \left|\boldsymbol{FS_1}\right| \cdot \sin(\alpha)$ $F_v = 3990\,\mathrm{N}$ Vertikalkomponente

$F_h := \left|\boldsymbol{FS_1}\right| \cdot \cos(\alpha)$ $F_h = 1645\,\mathrm{N}$ Horizontalkomponente

$\boldsymbol{FS_2} := k_2 \cdot \boldsymbol{S_2}$ $\boldsymbol{FS_2} = \begin{pmatrix} 1425 \\ -823 \\ -3990 \end{pmatrix} \mathrm{N}$ Stabkraft des Stabes DA

$\left|\boldsymbol{FS_2}\right| = 4316\,\mathrm{N}$ Betrag der Stabkraft DA

$F_v := \left|\boldsymbol{FS_2}\right| \cdot \sin(\alpha)$ $F_v = 3990\,\mathrm{N}$ Vertikalkomponente

$F_h := \left|\boldsymbol{FS_2}\right| \cdot \cos(\alpha)$ $F_h = 1645\,\mathrm{N}$ Horizontalkomponente

$\boldsymbol{FS_3} := k_3 \cdot \boldsymbol{S_3}$ $\boldsymbol{FS_3} = \begin{pmatrix} -1425 \\ -823 \\ -3990 \end{pmatrix} \mathrm{N}$ Stabkraft des Stabes DC

$\left|\boldsymbol{FS_3}\right| = 4316\,\mathrm{N}$ Betrag der Stabkraft DC

$F_v := \left|\boldsymbol{FS_3}\right| \cdot \sin(\alpha)$ $F_v = 3990\,\mathrm{N}$ Vertikalkomponente

$F_h := \left|\boldsymbol{FS_3}\right| \cdot \cos(\alpha)$ $F_h = 1645\,\mathrm{N}$ Horizontalkomponente

Aus Symmetriegründen müssen die drei Stabkräfte den gleichen Betrag haben; was durch die Rechnung bestätigt wird.

Berechnung der Zugkraft in der Kette:

Aus der Skizze (Draufsicht) erkennt man (x- und y-Richtung wie in Skizze, z-Komponente = 0):
(Aus Symmetriegründen müssen alle Zugkräfte gleich groß sein).

$\beta := 30 \cdot \text{Grad}$

Das Basisdreieck ist gleichseitig (Winkel zwischen 2 Ketten ist 60°), daher gilt $\beta = 30°$

$$\boldsymbol{F_h} := \begin{pmatrix} 0 \\ -F_h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Horizontalkomponente

$$\boldsymbol{r_{KBA}} := \begin{pmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad \boldsymbol{r_{KBC}} := \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m$$

Richtungsvektoren der Zugkräfte (ohne Einheiten)

Berechnung der Proportionalitätsfaktoren λ_1 und λ_2 für die Zugkräfte in den Ketten.
(Gleiche Begründung wie für k_1, k_2, k_3)

$$\lambda_1 := 100 \cdot \frac{N}{m} \qquad \lambda_2 := 100 \cdot \frac{N}{m}$$

Starwerte für nummmerische Lösung des Gleichungssystems)

Vorgabe

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r_{KBA}}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{r_{KBC}}_1 = \boldsymbol{F_h}_1$$

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r_{KBA}}_2 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{r_{KBC}}_2 = \boldsymbol{F_h}_2$$

$\lambda := \text{Suchen}(\lambda_1, \lambda_2)$

Man erhält folgende λ Werte

$$\lambda = \begin{pmatrix} 950 \\ 950 \end{pmatrix} \frac{N}{m}$$

$$\boldsymbol{F_{KBA}} := \lambda_1 \cdot \boldsymbol{r_{KBA}}$$

Zugkraft zwischen den Fußpunkten B und A

$$\boldsymbol{F_{KBA}} = \begin{pmatrix} 475 \\ -823 \\ 0 \end{pmatrix} N \qquad \left|\boldsymbol{F_{KBA}}\right| = 950\,N$$

$$\boldsymbol{F_{KBC}} := \lambda_1 \cdot \boldsymbol{r_{KBC}}$$

Zugkraft zwischen den Fußpunkten B und C

$$\boldsymbol{F_{KBC}} = \begin{pmatrix} -475 \\ -823 \\ 0 \end{pmatrix} N \qquad \left|\boldsymbol{F_{KBC}}\right| = 950\,N$$

Bestimmung der Nenndicke für die Ketten:

Zulässige Spannung einer Haltekette:

$$\sigma_{zul} := 60 \cdot \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{F_K}{2 \cdot A}$$

Den Faktor 2 im Nenner tritt auf, da das Kettenglied zwei Querschnitte aufweist
F_K ist Zugkraft in der Kette

$$A = \frac{d_K^{\,2} \cdot \pi}{4}$$

Querschnittsfläche des Kettengliedes.

$$F_K := \left| F_{KBC} \right|$$

Stabkraft

$$F_K := F_K \qquad \sigma_{zul} := \sigma_{zul}$$

"rückdefinieren", damit symbolisch gerechnet werden kann

$$\sigma_{zul} = \frac{F_K}{2 \cdot \frac{d_K^{\,2} \cdot \pi}{4}} \text{ auflösen}, d_K \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{zul} \cdot \pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sigma_{zul} \cdot \pi \cdot F_K\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{\sigma_{zul} \cdot \pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sigma_{zul} \cdot \pi \cdot F_K\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$d_K := \frac{1}{\sigma_{zul} \cdot \pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sigma_{zul} \cdot \pi \cdot F_K\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_K = 3.17\,mm$$

Ein Kettenglied muss mindestens einen Durchmesser von 3,17 mm haben. daher wird auf die nächstgrößere Dimension aufgerundet:
d = 4 mm

Dimensionierung der Stäbe:

Die Stäbe sind quadratische Stahlrohre und beidseitig gelenkig geführt (Eulerscher Knickfall 2, das heißt s = L (s... freie Knicklänge, L...Länge des Stahlrohres).
Für den Belastungsfall ist I_{erf} zu ermitteln und damit das Stahlrohr so zu dimensionieren, dass Eulersche Knickung gilt.
Eine Knicksicherheit $\nu_k := 5$ wird angenommen.

$$E := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$$

$$F_S := \left| \boldsymbol{FS_3} \right|$$

$$L := \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot h\right)^2 + h_s^2}$$ Stablänge nach den gegebenen Daten

$s := L$ $\quad s = 4\,m$ freie Knicklänge

$$I_{erf} := \frac{\nu_k \cdot F_S \cdot s^2}{E \cdot \pi^2}$$

Das erforderliche Flächenmoment I_{erf} ergit sich daher zu:

$I_{erf} = 15\,cm^4$

Der Vergleich mit dem Datenblatt zeigt, dass man ein **Stahlrohr mit dem Nennmaß 50 x 50** verwenden muss. Für dieses Rohr gilt $I := 19.8 \cdot cm^4$. Bei einer Wanddicke des Rohres von 2.9 mm erhält man die Querschnittsfläche $A_r := 5.39 \cdot cm^2$ (siehe Datenblatt)

Als nächstes wird der Schlankheitsgrad λ berechnet damit man feststellen kann, ob eine elastische Knickung auftritt. Füt Stahl S355JO gilt $\lambda_0 = 89$

$i := \sqrt{\frac{I}{A_r}}$ $\quad i = 0.019\,m$ Trägheitsradius

$\lambda := \frac{s}{i}$ $\quad \lambda = 198$ Schlankheitsgrad

Da $\lambda > \lambda_0$ ist die Annahme einer elastischen Knickung gerechtfertigt

zurück zur Startdatei