Roland Pichler roland.pichler@htl-kapfenberg.ac.at

Fouerierreihen - eine Einführung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Integralrechnung, Summenbildung, Fourierreihe

- Kurzzusammenfassung

  In ersten Teil des Beitrages wird gezeigt, dass man beliebige periodische Funktionen (auch mit endlichen Unstetigkeitsstellen) durch Summen von periodischen Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz darstellen kann; dies führt zur Fourierreihe.
  Anschließend folgt mit Hilfe von Mathcad die allgemeine Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihe.
  Als letztes wird nun diese Werkzeug auf einige Beispiele angewendet.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand

  Wesentlich an diesem Besipiel ist die Erkenntnis, dass periodische, aber nicht sinusförmige Zusammenhänge sehr oft durch eine Summe von Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen fargestellt werden können. Dies kann man mit Hilfe von Mathcad sehr schön zeigen. Auch die Herleitung der Fourierkoeffizienten gelingt mit Mathcad ausgezeichnet.
  Der Einsatz von Mathcad ist eine wesntliche Voraussetzungfür das Gelingen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4.Jahrgang bzw. 5. Jahrgang Elektrotechnik, Nachrichtentechnik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

Inhaltsübersicht

Fourier-Reihen

Wenn wir ein Konzert hören, so trifft auf unser Ohr ein gewaltiger Schwingungsmix in Form einer sehr komplizierten Schalldruckfunktion. Dennoch hören wir einzelne Instrumente und Töne heraus. Unsere Ohren nehmen nämlich eine Fourieranalyse der eintreffenden Schalldruckfunktion vor.
Die Entwicklung der Fourieranalyse hat eine lange Geschichte und beruht auf zahlreichen Untersuchungen von physikalischen Erscheinungen. Für die Beschreibung von periodischen Vorgängen eignen sich die am Einheitskreis abgeleiteten Sinus- und Kosinusfunktionen ganz besonders. Duch Summen von gewichteten Sinus- und Kosinussignalen lassen sich beliebige, periodische Signale beschreiben. Bei einer schwingenden Saite lassen sich zum Beipiel verschiedene Schwingungsmoden feststellen. Außer der Schwingung der Saite über die gesamte Länge, schwingt die Saite um Knotenpunkte herum mit der halben Länge, einem Drittel, einem Viertel.... Daraus ergeben sich harmonisch verwandte Teilschwingungen deren Frequenzen idealisiert ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung sind. Wenn es also gelingt die Schwingung der Saite zu einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Linearkombination von Sinusschwingungen zu beschreiben, kann der Zustand der Saite auch zu jedem anderen Zeitpunkt bestimmt werden, indem die Koeffizienten des früheren Zeitpunktes ausgewertet werden.

Es gibt auch andere physikalische Systeme, die eine vorgegebene Funktion in Sinus- oder Kosinusfunktionen zerlegen:

- Ein optischer Filter lässt nur sinusförmige Lichtwllen in bestiommter Frquenz durch
- Ein Prisma lenkt sinusförmige Lichtwellen je nach Frquenz unterschiedlich stark ab
- Eine Linse sortiert räumliche Sinusstrukturen eines Gegenstandes in der Brennebene nach der "räumlichen Frequenz".
- Ein elektrischer Nachrichtenübertragungskanal lässt nur bestimmte harmonische Anteile von Signalen durch.

Das mathematische Werkzeug für derartige Zerlegungen wir durch die Fourieranalyse geliefert. Sie wurde vom französischen Mathematiker Jean Baptiste Fourier (1768 - 1830) als komplexe Theorie entwickelt.

Die Darstellung einer Funktion durch eine Taylor-Reihe ist nicht die einzige Möglichkeit, unendliche Reihen als Darstellungsform zu benutzen. Periodische Funktionen, die etwa mechanische oder elektrische Schwingungsvorgänge beschreiben, können durch Sinus- und Kosinusfunktionen auf Grund ihrer Periodizität weit besser beschrieben werden als durch Potenzfunktionen. Eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen ist auch technisch praktikabler, denn die Übertragung sinusförmiger Schwingungen ist leicht mess- und berechenbar. Die Zerlegung einer Funktion in harmonische Schwingungen, d. h. in Sinus- oder/und Kosinusfunktionen, heißt harmonische Analyse. Da es sich hierbei meist um Funktionen der Zeit handelt, werde t als Argument genommen.

1. Grundlagen

Im zweiten Jahrgang untersucht man üblicherweise Summen von periodischer Funktionen. Dabei kann man softwareunterstützt sehr anschaulich die Überlagerungen zeigen, wie im folgenden Beispiel gezegt wird.

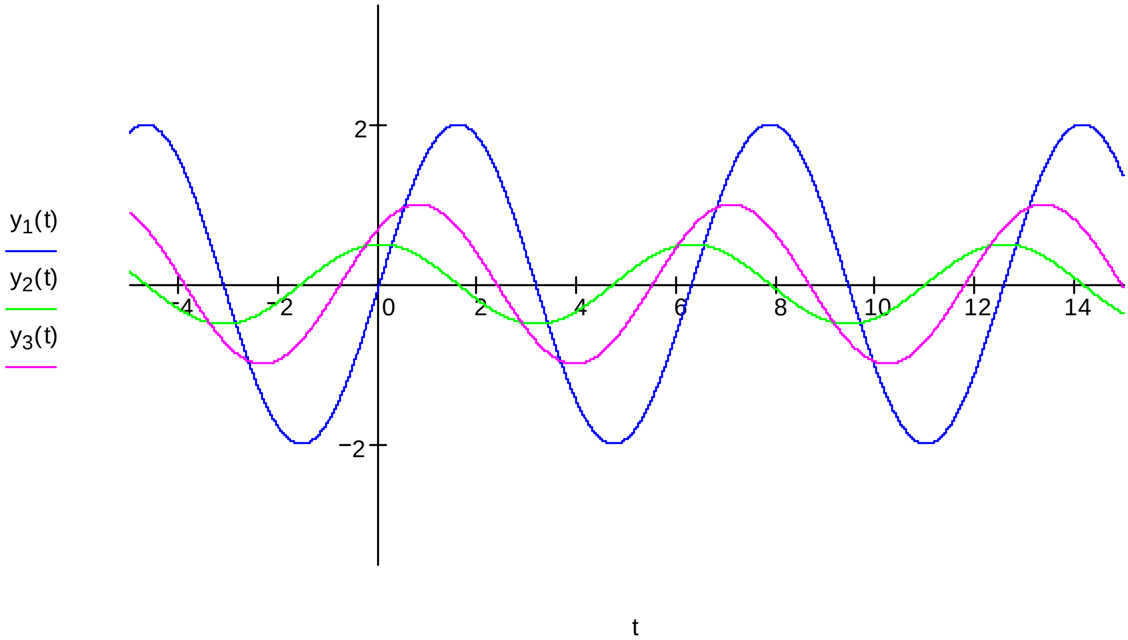
1. Beispiel:

Vorgegeben sind die drei Sinuslinien $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$. Die drei Funktionen sind graphisch darzustellen.
Wähle den Definitionsbereich zwischen $-2 \cdot \pi \le 6 \cdot \pi$

$$y_1(t) := 2 \cdot \sin(t) \qquad y_2(t) := \frac{1}{2} \cdot \cos(t) \qquad y_3(t) := \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

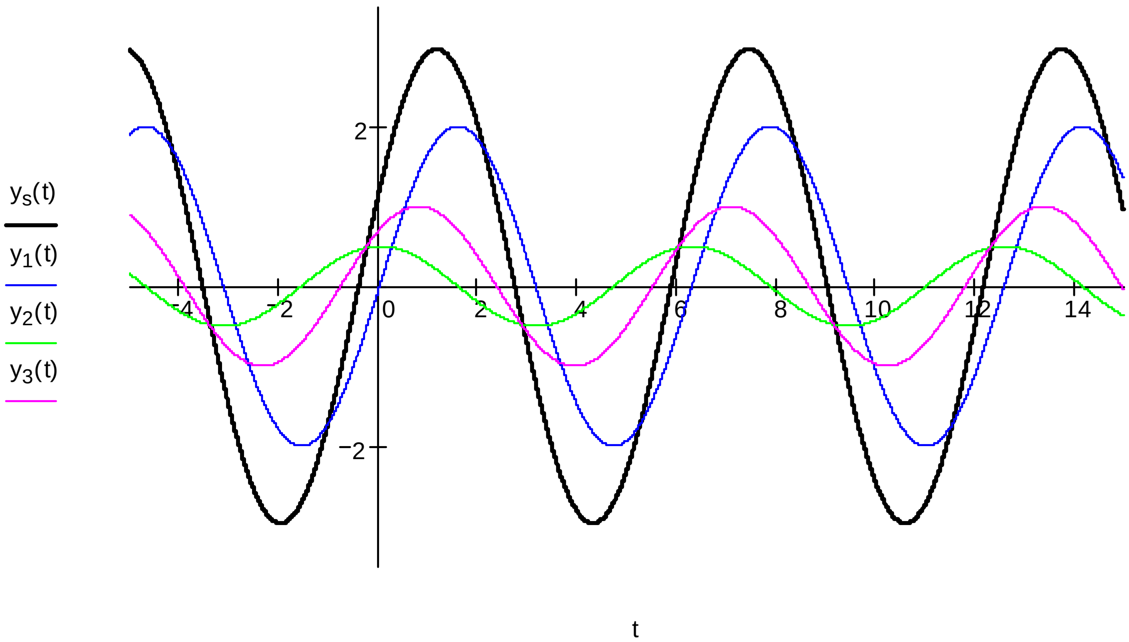
Aus der graphischen Darstellung kann man sehr schön den sinusförmigen Verlauf und die unterschiedlichen Amplituden erkennen.

$$t := -2 \cdot \pi, -2\pi + 0.001 .. 6 \cdot \pi$$



Die Bildung der Summenfuktion liefert nun folgendes Eegebnis,(die drei Basiskurven sind nochmal eingezeichnet)

$$y_s(t) := y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$



Danach sind folgende Fragen zu beantworten:

a) Welche Perioden haben die einzelnen Funktionen $y_i(t)$? a) 2π

b) Welcher Art ist Summenfunktion $y_s(t)$? b) Sinusfunktion

c) Wie lautet deren Periode? c) 2π

2. Beispiel:

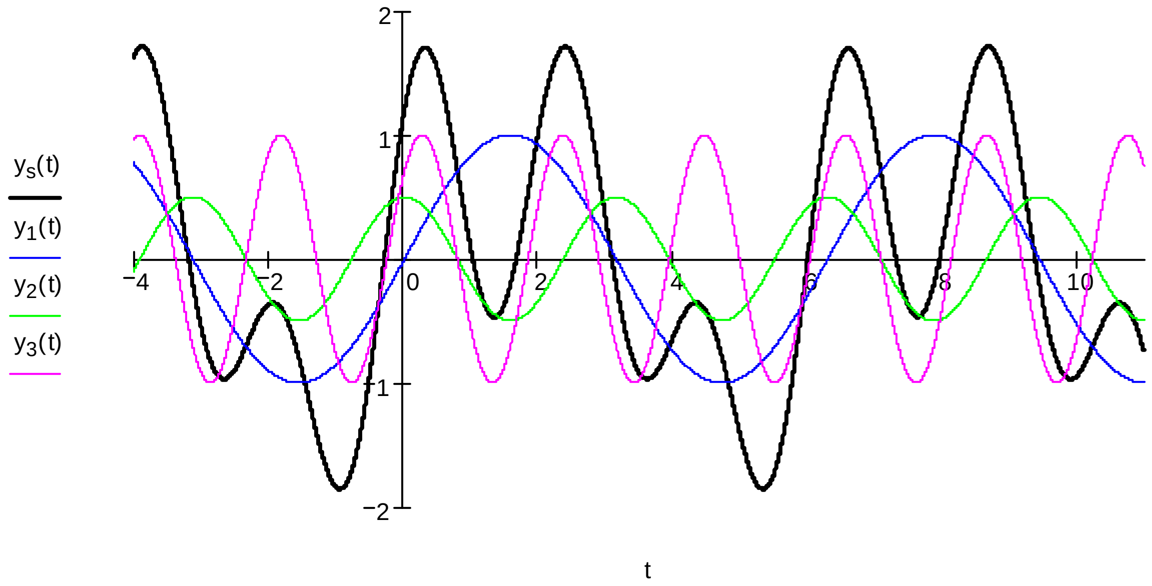
Als nächstes sind wiederum drei Sinuslinien darzustellen.Wähle den Definitionsbereich zwischen $-2 \cdot \pi \le 6 \cdot \pi$

$y_1(t) := 1 \cdot \sin(t)$ $\quad y_2(t) := \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot t)$ $\quad y_3(t) := 1 \cdot \sin\left(3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$

$y_s(t) := y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

Stelle die Graphen undauch die Summenfunktion dar und diskutiere das Ergebnis:

$t := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.001 .. 6 \cdot \pi$



Beantworte danach folgende Fragen:

a) Welche Perioden haben die einzelnen Funktionen $y_i(t)$? a) 2π , π , $\frac{2 \cdot \pi}{3}$

b) Welcher Art ist die Summenfunktion $y_s(t)$? b) eine periodische Funktion

c) Wie lautet deren Periode? c) 2π

3. Beispiel:

Die unten stehende Funktiongleichung beschreibt eine Rechteckspannung u(t)

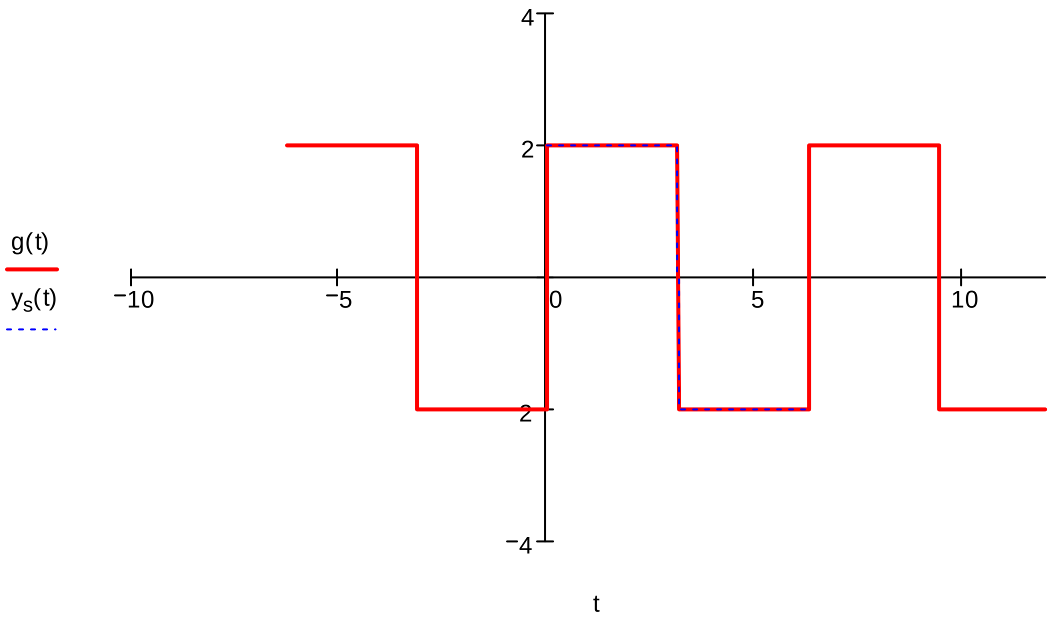
$t := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.01 .. 6 \cdot \pi$

$T := 2 \cdot \pi$

$$y_S(t) := \begin{cases} 2 & \text{if } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ (-2) & \text{if } \frac{T}{2} < t \le T \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(t) := y_S\left(t - T \cdot \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

Bemerkung: "floor( )" rundet die in Klammer stehende Zahl auf die nächst kleinere ganze Zahl, stellt Verschiebung auf der x-Achse dar



Beantworte danach folgende Fragen:

a) Welche Perioden haben die einzelnen Funktionen $y_i(t)$? a) ....2π..............................

b) Welche Funktion ist die Summenfunktion $g(t)$? b) ....g(t) = ys(t) ....

c) Wie lautet deren Periode? c) ....2π.............................

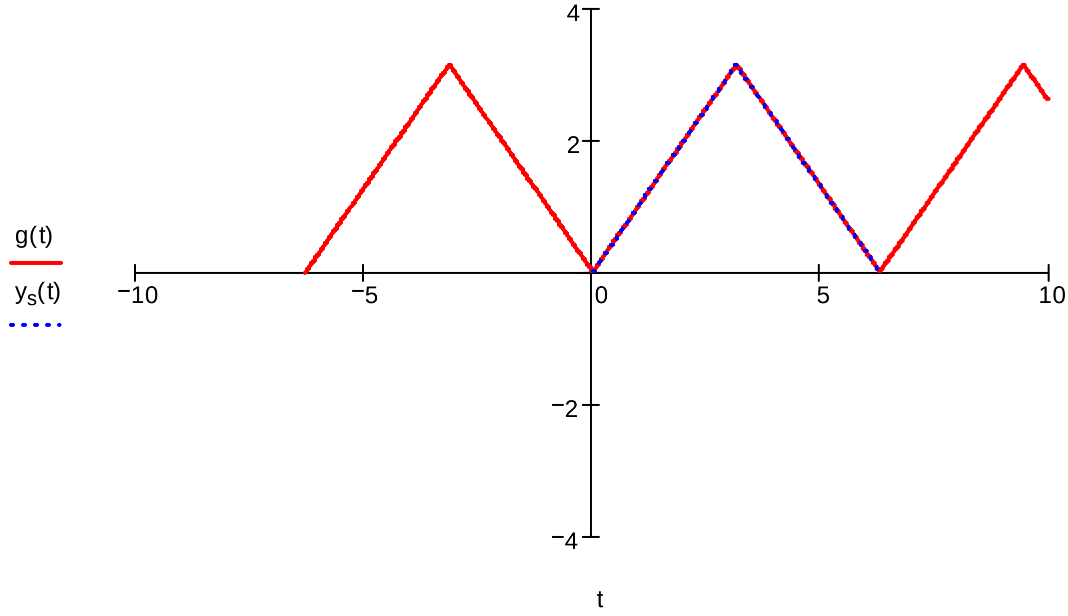
4. Beispiel:

Die unten stehende Funktion beschreibt eine Dreieckspannung u(t)
Versuche (ähnlich wie oben) eine Funktionsgleichung zu entwickeln.
Überprüfe durch Darstellung mit Mathcad.

$T := 2 \cdot \pi$

$$y_S(t) := \begin{vmatrix} t \ \text{ if } \ 0 \le t < \dfrac{T}{2} \\ T - t \ \text{ if } \ \dfrac{T}{2} < t \le T \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

$$g(t) := y_S\left(t - T \cdot \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$



2. Fourier- Koeffizienten

Allgemein gilt nach Jean Baptiste FOURIER (1768 - 1830), dass jede periodische Funktion f(t) mit der Periode $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ in eine Reihe entwickelt werden kann:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \right)$$

wobei sich die *Fouerier-Koeffizienten* folgendermaßen berechnen lassen:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

speziell gilt: $a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt$

Diese Koeffizienten erhält man auf folgendem Wege.

Zur Bestimmung von a_0 wird die Reihe über eine Periode $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ integriert. Man erhält: $T := T$

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T \frac{a_0}{2}\, dt + \int_0^T a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)\, dt + \int_0^T a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)\, dt \ldots$$

$$+ \int_0^T b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt + \int_0^T b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t)\, dt + \ldots\ldots$$

dabei gilt ffür die Integrale $\int_0^T \frac{a_0}{2}\, dt \rightarrow \frac{1}{2} \cdot T \cdot a_0$

$$\int_0^T a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \rightarrow \frac{\sin(T \cdot n \cdot \omega)}{n \cdot \omega} \cdot a_n \qquad \frac{\sin(T \cdot \omega \cdot n)}{n \cdot \omega} \cdot a_n = 0$$ für n =1, 2, 3, ...

$$\int_0^T b_n \cdot \sin(n\omega \cdot t)\, dt \text{ faktor } \rightarrow -b_n \cdot \frac{\cos(T \cdot n \cdot \omega) - 1}{n \cdot \omega} \qquad \frac{\cos(T \cdot \omega \cdot n) - 1}{n \cdot \omega} = 0$$ für n =1, 2, 3, ...

man erhält: $\boxed{\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot T\cdot a_0 \text{ auflösen}, a_0 \rightarrow 2\cdot\frac{\int_0^T f(t)\,dt}{T}}$

Die Koeffizienten a_n und b_n (n = 1, 2, 3, ...erhält man, indem man die Reihe hintereinanderfolgend mit cos(ωt), cos(2ωt), ..., cos(nωt), ..., sin(ωt), sin(2ωt), ..., sin(nωt), ... multipliziert und danach über die Periode integriert.

Als Beispiel sei die Berechnung von a_1 und b_1 gezeigt:

$$\int_0^T f(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt = \int_0^T a_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt + \int_0^T a_2\cdot\cos(2\cdot\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt \ldots$$
$$+ \int_0^T b_1\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt + \ldots\ldots\ldots$$

dabei gilt: $T := \frac{2\cdot\pi}{\omega}$

$$\boxed{\int_0^T a_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt \rightarrow \frac{\pi}{\omega}\cdot a_1} \qquad \int_0^T b_1\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt \rightarrow 0$$

$$\int_0^T a_n\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt \text{ faktor } \rightarrow \frac{2}{\omega\cdot(-1+n)\cdot(1+n)}\cdot a_n\cdot n\cdot\sin(\pi\cdot n)\cdot\cos(\pi\cdot n)$$

$$\frac{2}{\omega\cdot(-1+n)\cdot(1+n)}\cdot a_n\cdot n\cdot\sin(\pi\cdot n)\cdot\cos(\pi\cdot n) = 0$$ für n = 2, 3, ...

$$\int_0^T b_n\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt \text{ faktor } \rightarrow 2\cdot b_n\cdot(\cos(\pi\cdot n)-1)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)+1}{\omega\cdot(1+n)\cdot(-1+n)}$$

$$2\cdot b_n\cdot(\cos(\pi\cdot n)-1)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)+1}{\omega\cdot(1+n)\cdot(-1+n)} = 0$$ für n = 2, 3, ...

da $\cos(\pi\cdot n)-1=0$ für gerade n und $\cos(\pi\cdot n)+1=0$ für ungerade n

$$\boxed{\int_0^T b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt \to \frac{\pi}{\omega} \cdot b_1}$$

$$\int_0^T a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt \to 0$$

$$\int_0^T b_n \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \text{ faktor } \to \frac{2}{\omega \cdot (1+n) \cdot (-1+n)} \cdot b_n \cdot \sin(\pi \cdot n) \cdot \cos(\pi \cdot n)$$

$$\frac{2}{\omega \cdot (-1+n) \cdot (1+n)} \cdot b_n \cdot n \cdot \sin(\pi \cdot n) \cdot \cos(\pi \cdot n) = 0$$

für n = 2, 3, ...

$$\int_0^T a_n \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \text{ faktor } \to -2 \cdot a_n \cdot n \cdot (\cos(\pi \cdot n) - 1) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot n) + 1}{\omega \cdot (-1+n) \cdot (1+n)}$$

$$2 \cdot a_n \cdot (\cos(\pi \cdot n) - 1) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot n) + 1}{\omega \cdot (1+n) \cdot (-1+n)} = 0$$

für n = 2, 3, ...

$T := T$

Man erhält:

$$\boxed{\int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)\, dt = \frac{\pi}{\omega} \cdot a_1 \text{ auflösen}, a_1 \to \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)\, dt \cdot \frac{\omega}{\pi}}$$

$$\boxed{\int_0^T f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt = \frac{\pi}{\omega} \cdot b_1 \text{ auflösen}, b_1 \to \int_0^T f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt \cdot \frac{\omega}{\pi}}$$

3. Fourierreihen - Darstellung einiger Funktionen

Im Folgenden wird anhand dreier Beispiele die Berechnung der Fourier - Koeffizienten erklärt.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\right)$$

wobei sich die *Fouerier-Koeffizienten* folgendermaßen berechnen lassen:

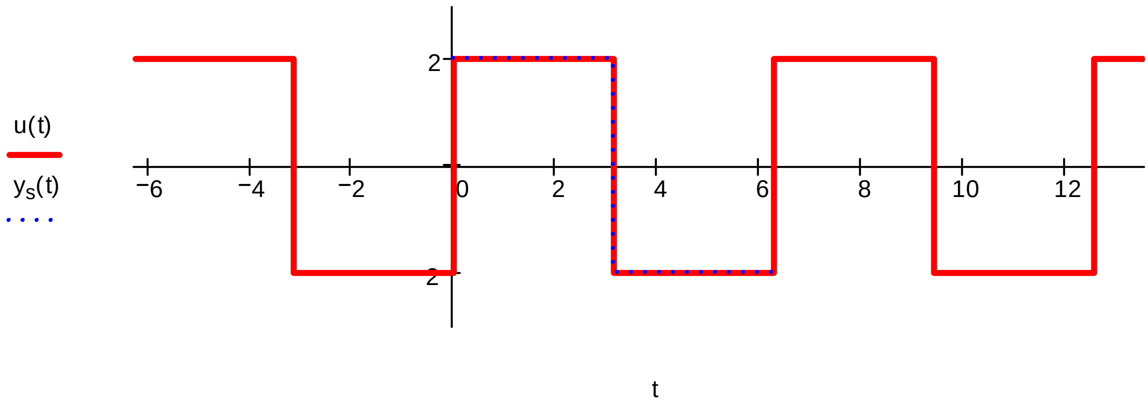
$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt \qquad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

5. Beispiel:

Die unten stehende Funktiongleichung beschreibt eine Rechteckspannung u(t)

$$T := 2 \cdot \pi \qquad y_s(t) := \begin{vmatrix} 2 & \text{if} \quad 0 \le t < \frac{T}{2} \\ (-2) & \text{if} \quad \frac{T}{2} < t \le T \quad \text{otherwise} \end{matrix} \qquad u(t) := y_s\left(t - T \cdot \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$t := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.001 .. 6 \cdot \pi$$



Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten verwenden wir die obigen Formeln und gehen dabei wie folgt vor:

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Berechnung von a_0: $\quad a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 2\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -2\,dt\right) \text{ vereinfachen } \rightarrow a_0 = 0$$

Berechnung von a_n: $a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 2\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -2\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt\right) \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(4\cdot\frac{\sin(\pi\cdot n)}{n} - \frac{4}{n}\cdot\sin(\pi\cdot n)\cdot\cos(\pi\cdot r\right.$$

$a_n = 0$ für alle n ist zu zeigen

Berechnung von b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 2\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -2\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,dt\right) \rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-4\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)}{n} + \frac{2}{n} + 2\cdot\frac{2\cdot\cos(\pi\cdot n)^2}{n}\right.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-4\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)}{n} + \frac{2}{n} + 2\cdot\frac{2\cdot\cos(\pi\cdot n)^2 - 1}{n}\right) \text{ vereinfachen } \rightarrow b_n = 4\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n) - 1}{\pi\cdot n}$$

$b_n = 0$ für n = gerade (2, 4, 6, ...)

$b_n = 4\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n) - 1}{\pi\cdot n} = 4\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}$ für n = ungerade (1, 3, 5, ...)

Darstellung der Funktion als Fourierreihe:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(4\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n) - 1}{\pi\cdot n}\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\right)$$

ergibt $n := n$

$$\sum_{n=1}^{9}\left(4\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)-1}{\pi\cdot n}\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\right)$$

ergibt

$$\frac{8}{\pi}\cdot\sin(\omega\cdot t)+\frac{8}{3\cdot\pi}\cdot\sin(3\cdot\omega\cdot t)+\frac{8}{5\cdot\pi}\cdot\sin(5\cdot\omega\cdot t)+\frac{8}{7\cdot\pi}\cdot\sin(7\cdot\omega\cdot t)+\frac{8}{9\cdot\pi}\cdot\sin(9\cdot\omega\cdot t)$$

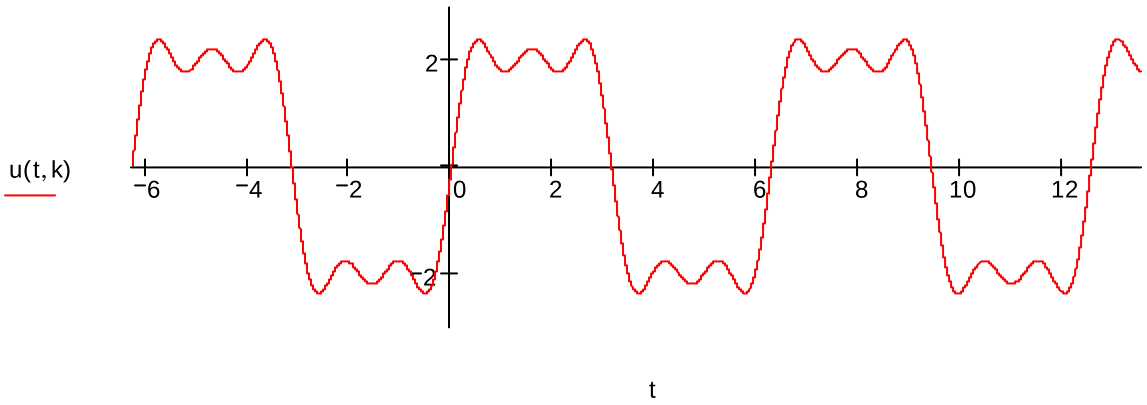
Die ersten 5 Glieder dieser Fourierreihe

$$u_5(t)=\frac{8}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(\omega\cdot t)}{1}+\frac{\sin(3\omega\cdot t)}{3}+\frac{\sin(5\omega\cdot t)}{5}+\frac{\sin(7\omega\cdot t)}{7}+\frac{\sin(9\omega\cdot t)}{9}\right)$$

Für die graphische Darstellung bricht man nach einigen Koeffizienten ab. z. B. n = 5

$k := 5$

$$u(t,k) := \sum_{n=1}^{k}\left(4\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot n)-1}{\pi\cdot n}\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\right)$$



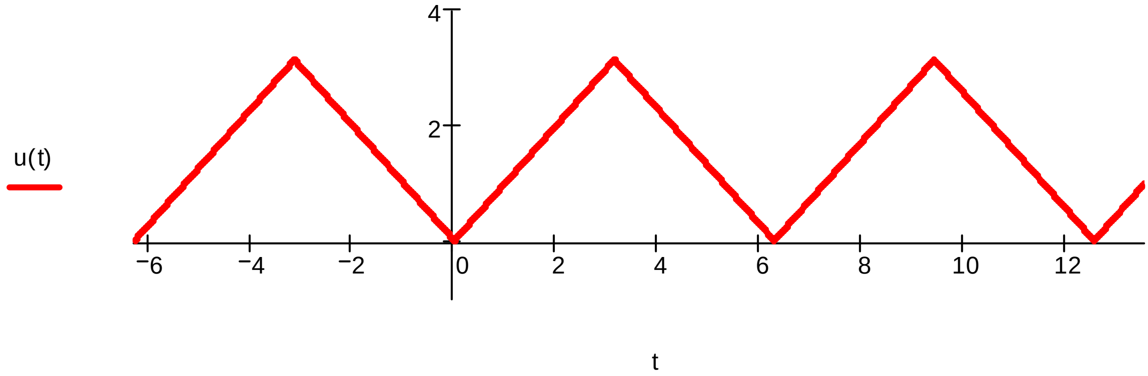
6. Beispiel:

Die unten stehende Funktiongleichung beschreibt eine Rechteckspannung u(t)

$T := 2\cdot\pi$

$$y_S(t) := \begin{cases} t & \text{if } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ T - t & \text{if } \frac{T}{2} < t \le T \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(t) := y_S\left(t - T\cdot\text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$



Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten verwenden wir die obigen Formeln und gehen dabei wie folgt vor:

$$\omega := \frac{2\cdot\pi}{T}$$

Berechnung von a_0: $a_0 = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\,dt$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} t\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (T-t)\,dt\right] \text{ vereinfachen } \rightarrow a_0 = \pi$$

Berechnung von a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} t\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(T-t)\cdot(\cos(n\cdot\omega\cdot t))\,dt\right] \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(\pi\cdot n)+\pi\cdot n\cdot\sin(\pi\cdot n)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(\pi\cdot n)+\pi\cdot n\cdot\sin(\pi\cdot n)}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2\cdot\cos(\pi\cdot n)^2-1}{n^2} - \frac{-\cos(\pi\cdot n)+\pi\cdot n\cdot\sin(\pi\cdot n)}{n^2}\right) \text{ vereinfachen}$$

$a_n = 0$ für gerade n

$a_n = -2\cdot\cos(\pi\cdot n)\cdot\frac{-2}{\pi\cdot n^2}$ für ungerade n

Berechnung von b_n:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (T - t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \right] \rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-(-\sin(\pi \cdot n) + \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n))}{n^2} - \frac{2}{n} \right.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-(-\sin(\pi \cdot n) + \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n))}{n^2} - \frac{2}{n^2} \cdot \sin(\pi \cdot n) \cdot \cos(\pi \cdot n) + \frac{\sin(\pi \cdot n) + \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{n^2} \right] \text{vereinfac}$$

$b_n = 0$ für alle n

Darstellung der Funktion als Fourierreihe:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \cdot \cos(\pi \cdot n) \cdot \frac{-1 + \cos(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n^2} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \right)$$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{9} \left(-2 \cdot \cos(\pi \cdot n) \cdot \frac{-1 + \cos(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n^2} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \right)$$

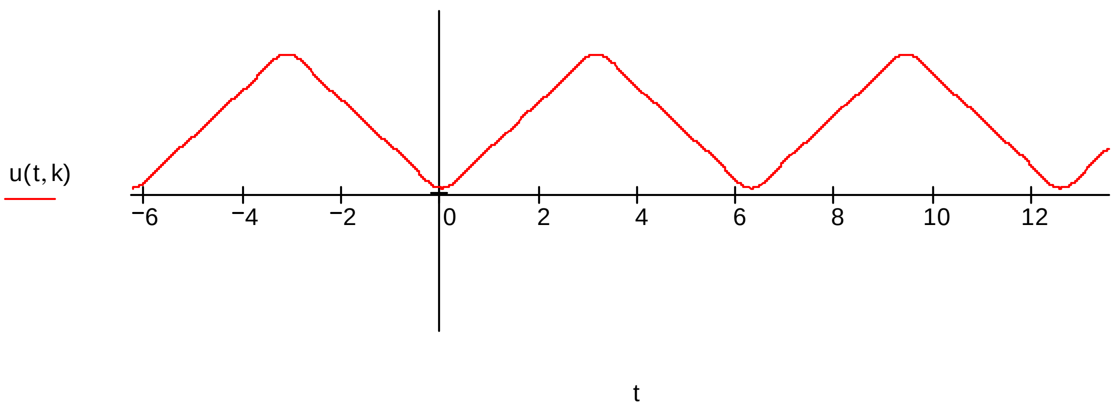
ergibt

$$\frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{4}{\pi} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{4}{9 \cdot \pi} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) - \frac{4}{25 \cdot \pi} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) - \frac{4}{49 \cdot \pi} \cdot \cos(7 \cdot \omega \cdot t) - \frac{4}{81 \cdot \pi} \cdot \cos(9 \cdot \omega \cdot t)$$

Für die graphische Darstellung bricht man nach einigen Koeffizienten ab. z. B. n = 5

$k := 5$

$$u(t, k) := \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(-2 \cdot \cos(\pi \cdot n) \cdot \frac{-1 + \cos(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n^2} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \right)$$



$$\left. n) \right)$$

$$\left. \frac{-1}{} \right)$$

$$\ldots - \frac{2 \cdot \cos(\pi \cdot n)^2 - 1}{n^2} - \frac{\pi \cdot n \cdot \sin(\pi \cdot n) - \cos(\pi \cdot n)}{n^2} \Bigg)$$

$$\rightarrow a_n = -2 \cdot \cos(\pi \cdot n) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot n) - 1}{\pi \cdot n^2}$$

$$\frac{2}{2} \cdot \sin(\pi \cdot n) \cdot \cos(\pi \cdot n) + \frac{\pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n) + \sin(\pi \cdot n)}{n^2}\Bigg]$$

hen $\rightarrow b_n = -2 \cdot \sin(\pi \cdot n) \cdot \dfrac{\cos(\pi \cdot n) - 1}{\pi \cdot n^2}$