Einführung Mathcad Prime 3

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Verwendung der für den Schulgebrauch wichtigsten mathematischen Funktionen:
  Erstellen von Arbeitsblättern, Gleichungen lösen, Funktionen grafisch darstellen, Differenzial und Integralrechnung, Differentialgleichungen (numerisch), Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, ...

- Kurzzusammenfassung

  die wichtigsten mathematischen Funktionen für den Schulgebrauch

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  dieses Dokument oder Teile dieses Dokuments können zur Einführung von Mathcad eingesetzt werden bzw. sollen den Schülern auch in anderen technischen Gegenständen eine Hilfe beim Einsatz von Mathcad sein;
  Beispielhaft werden die aus schulischer Sicht wichtigsten mathematischen Funktionen vorgestellt mit kurzen Kommentaren (weitere Informationen sind in der Mathcad Hilfe zu finden)

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Einsatz von in der Praxis üblichen Rechenhilfen;

- Mathcad-Version:

  Prime 3

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

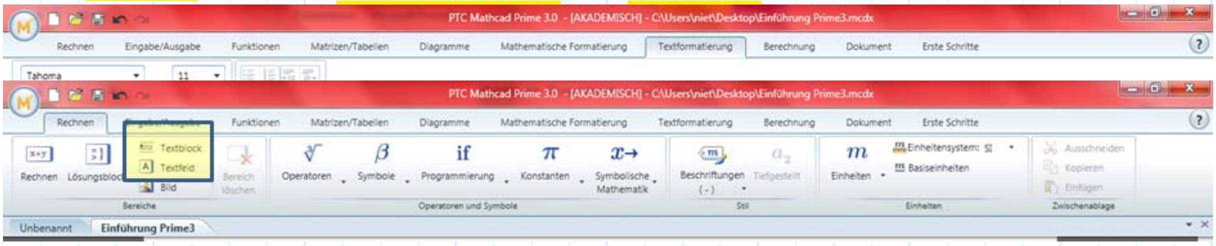
- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  Verwendete Symblolik zur Erklärung:
  Die jeweiligen Menüs von Mathcad sind gelb hinterlegt.
  Die <*Befehle/Schaltflächen*> in diesen Menüs sind kursiv in < >.

Einführung in MCD Prime 3

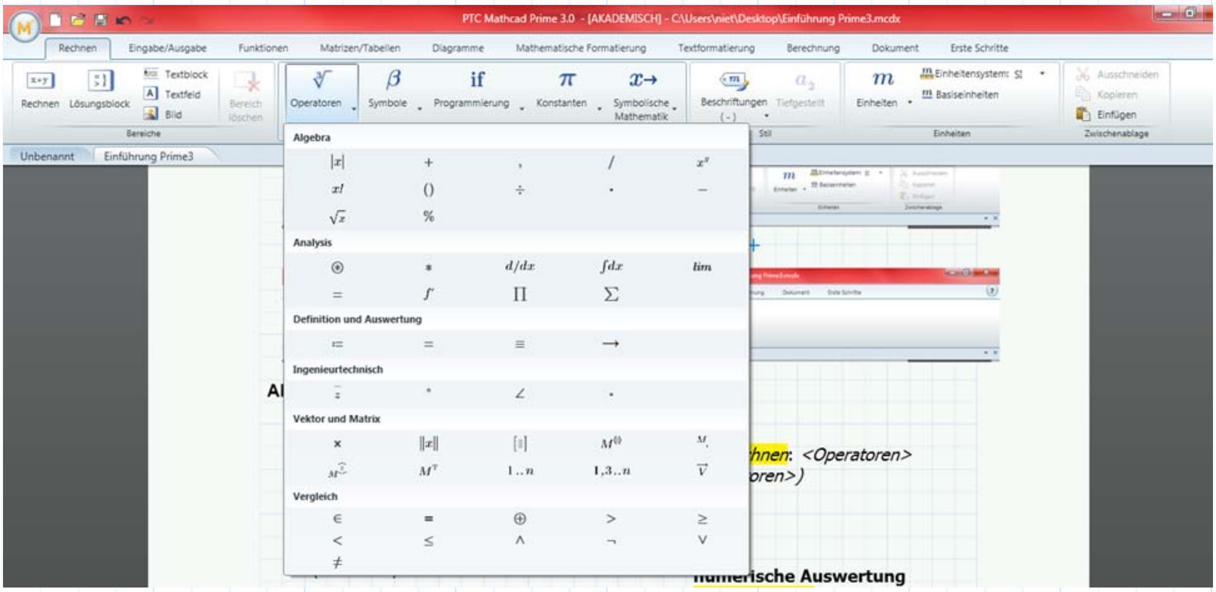
Text

- Rechnen: *<Textblock>* oder *<Textfeld>*



Algebra

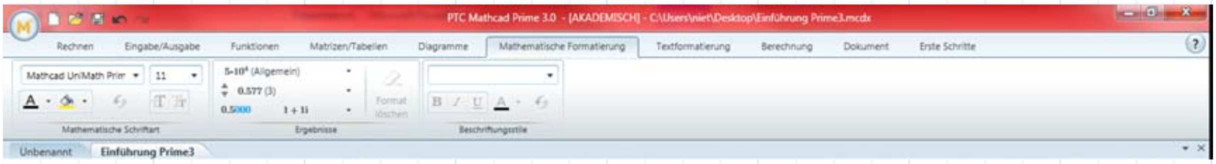
- **Eingabe** mathematischer Ausdrücke
  wichtige Tasten sind: <space> und Cursor sowie Rechnen: *<Operatoren>*
- **Auswertung** mit = oder -> *(<strg>+<.>* oder *<Operatoren>)*
- **Variable**: Name beliebig mit := definiert



$$\left(3\ \sqrt{8}+\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 5 = 418.791$$

$$\left(3\ \sqrt{8}+\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 5 = 418.790764717$$

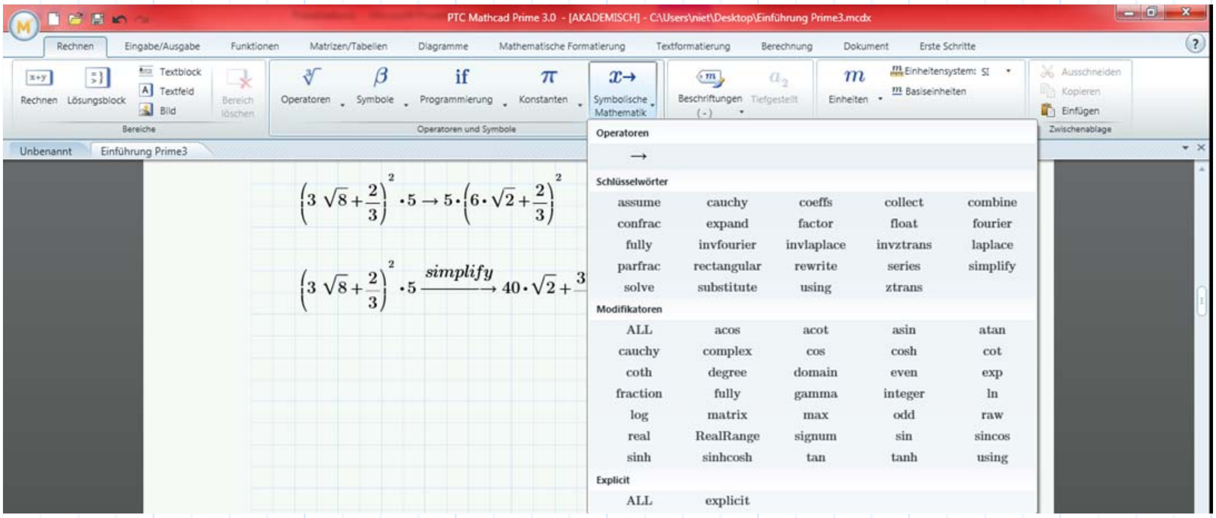
numerische Auswertung
Mathematische Formatierung



$$\left(3\sqrt{8}+\frac{2}{3}\right)^2\cdot 5 \rightarrow 5\cdot\left(6\cdot\sqrt{2}+\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(3\sqrt{8}+\frac{2}{3}\right)^2\cdot 5 \xrightarrow{simplify} 40\cdot\sqrt{2}+\frac{3260}{9}$$

exakte Auswertung
ev. mit Rechnen
<symbolische Mathematik>
Befehlen
simplify etc.



$r:=5\ cm$ $\qquad r=1.969\ in$

Definition von Variablen auch mit **Einheiten** möglich.
Einheit kann bei Ausgabe (mit =) durch Cursor nachträglich verändert werden.
Einheiten über Rechnen *<Einheiten>* einfügen!!!

$$V:=\frac{4\cdot r^3\cdot\pi}{3}=0.524\ L$$

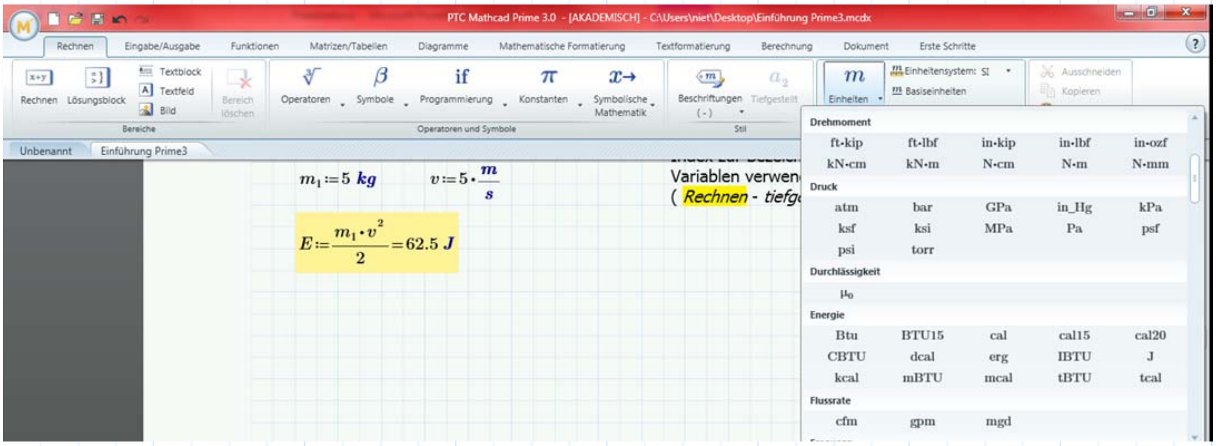
$$V=523.599\ mL$$

$$V=523.599\ cm^3$$

$m_1:=5\ kg$ $\qquad v:=5\cdot\frac{m}{s}$

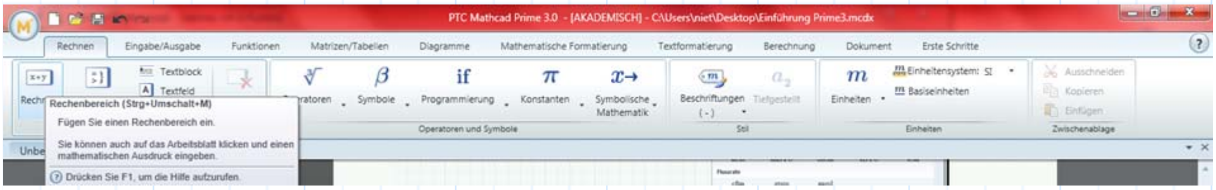
Index zur Bezeichnung der Variablen verwenden
(Rechnen - *<tiefgestellt>*)

$$E:=\frac{m_1\cdot v^2}{2}=62.5\ J \qquad E=62.5\ W\cdot s$$



Text und mathematische Felder kombiniert; Bereiche zum Wegblenden.

In ein Textfeld/Textblock kann ein mathematischer Ausdruck eingefügt werden, wenn im Textmodus die Schaltfläche <*Rechnen*> gedrückt wird.



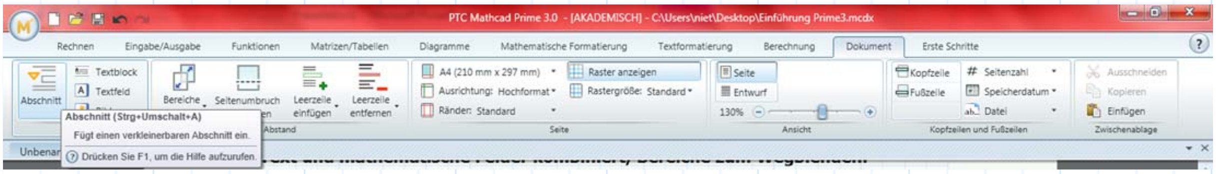
Beispiel: Zwei Widerstände mit $R_1 := 5\ \Omega$ und $R_2 := 8\ \Omega$ sind parallelgeschaltet.

Der Gesamtwiderstand beträgt $R_{ges} := \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = 3.077\ \Omega$.

Dieser Widerstand wird an eine Spannungsquelle von $U := 120\ mV$ angeschlossen.

- Berechne den in den einzelnen Widerständen fließenden Strom.

Im Dokument kann ein ausblendbarer <*Abschnitt*> erzeugt werden.



Lösungsweg (ggfs. verdeckt durch Drücken der Schaltfläche links oben: - oder +)

$I_{ges} := \frac{U}{R_{ges}} = 39\ mA$ $\qquad I_1 := \frac{U}{R_1} = 24\ mA$ $\qquad I_2 := \frac{U}{R_2} = 15\ mA$

$I_1 + I_2 = 39\ mA$

Lösungen: $I_1 = 24\ mA$ und $I_2 = 15\ mA$

Gleichungen lösen

$$2\ x^2 + 3\ x + 1 = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Gleichung(en) mit symbolischem Gleichheitszeichen (**=**) schreiben
Rechnen
<Operatoren> für **=**
<symbolische Mathematik>
für solve,x

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} -\dfrac{\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2}}{a} \\ -\dfrac{\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2}}{a} \end{bmatrix}$$

eventuell mit Zusatz assume, ...

-> Screenshot weiter oben

$$L := 2\ x^2 + 3\ x + 1 = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

numerische Lösungen können auch gespeichert werden

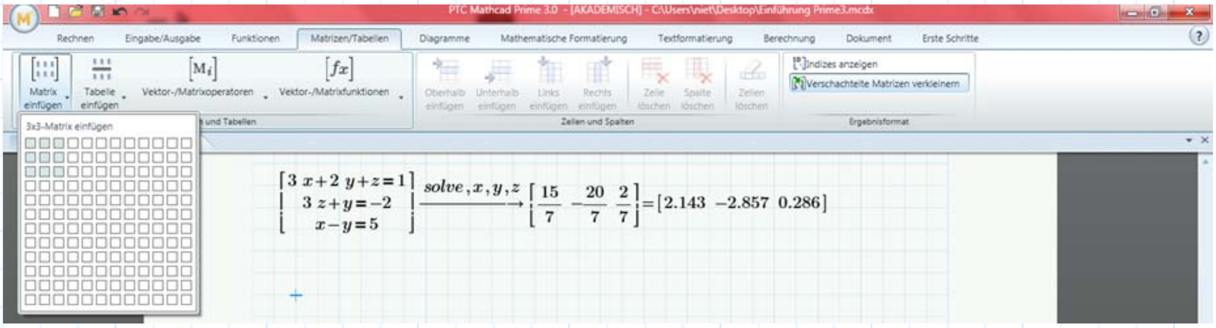
$L = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ $\qquad L_0 = -1$ $\qquad L_1 = -0.5$

Index ist Matrixindex
Rechnen;
<Operatoren>

$$x_1 := x^3 + x + 1 = 0 \xrightarrow[assume, x = real]{solve, x} \frac{\left(\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{93}}{18}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}}{\left(\frac{\sqrt{93}}{18} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = -0.682 \qquad x_1 = -0.682$$

Gleichungssysteme lösen
(Bei Eingabe in Vektorform ist das Gleichunssystem analytisch mit solve lösbar)

$$\begin{bmatrix} 3\ x+2\ y+z=1 \\ 3\ z+y=-2 \\ x-y=5 \end{bmatrix} \xrightarrow{solve,x,y,z} \begin{bmatrix} \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.143 & -2.857 & 0.286 \end{bmatrix}$$



Matrix und Vektoroperationen

Matrix/Vektor durch Matrizen/Tabellen -> *<Matrix einfügen>*

$$A := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot m \qquad v := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{s} \qquad w := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{s} \qquad M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$M_{1,2} = -3$ Einzelne Elemente mit Matrixindex (beginnend bei 0).

$\|A\| = 4.123\ m$ $|A| = 4.123\ m$ Weitere Befehle in *<Vektor/Matrixoperationen>*

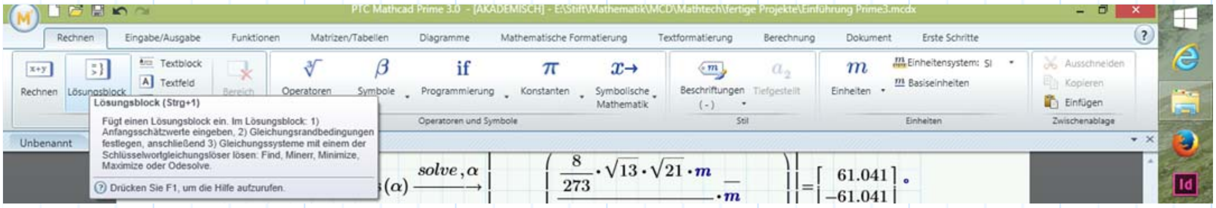
$$M \cdot v = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \qquad M \cdot M^{T} = \begin{bmatrix} 14 & -14 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$v \cdot w = 8\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$v \times w = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix} \frac{m^2}{s^2} \qquad \|v \times w\| = 14.457\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha) \xrightarrow{solve,\alpha} \begin{bmatrix} \operatorname{acos}\left(\dfrac{8 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{21} \cdot \boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{m}} \cdot |\boldsymbol{s}|^2}{273 \cdot \boldsymbol{s} \cdot \overline{\boldsymbol{s}} \cdot |\boldsymbol{m}|^2}\right) \\ -\operatorname{acos}\left(\dfrac{\dfrac{\dfrac{\frac{8}{273} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{21} \cdot \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} \cdot \overline{\boldsymbol{m}}}{\overline{\boldsymbol{s}}}}{|\boldsymbol{m}|^2} \cdot |\boldsymbol{s}|^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61.041 \\ -61.041 \end{bmatrix} {}^\circ$$

Lösungsblock
(numerisches Lösen von Gleichungen oder Gleichungssytemen)



Schätzwerte

$x := 0 \qquad y := 0$

Nebenbedingungen

$$x^2 + 2\,x + 3\,y = 5$$

$$x + 2\,y = 1$$

Gleichungslöser

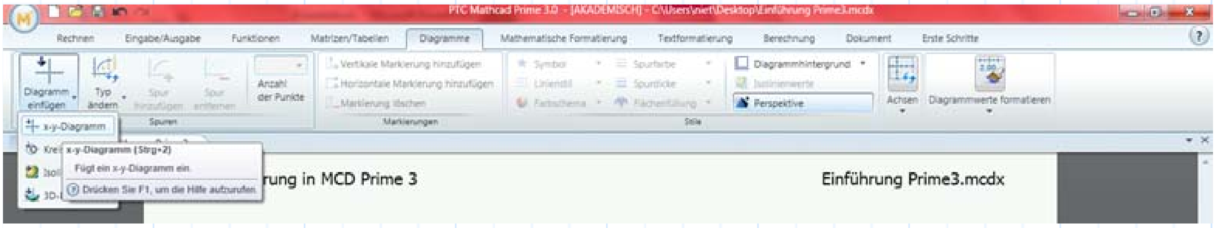
$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} := \mathbf{find}(x, y) = \begin{bmatrix} 1.637 \\ -0.319 \end{bmatrix}$$

Lösungsblock
Rechnen; <*Lösungsblock*>
numerisches Verfahren;
liefert **eine** Lösung, die von der Wahl der Schätzwerte abhängt. (zB: x:=-1 liefert eine andere Lösung dieses Gleichungssytems)
Befehl "**find**" mit =
Ergebnis kann auch durch Definition einer Variable zugeordnet werden.

$x1 = 1.637$

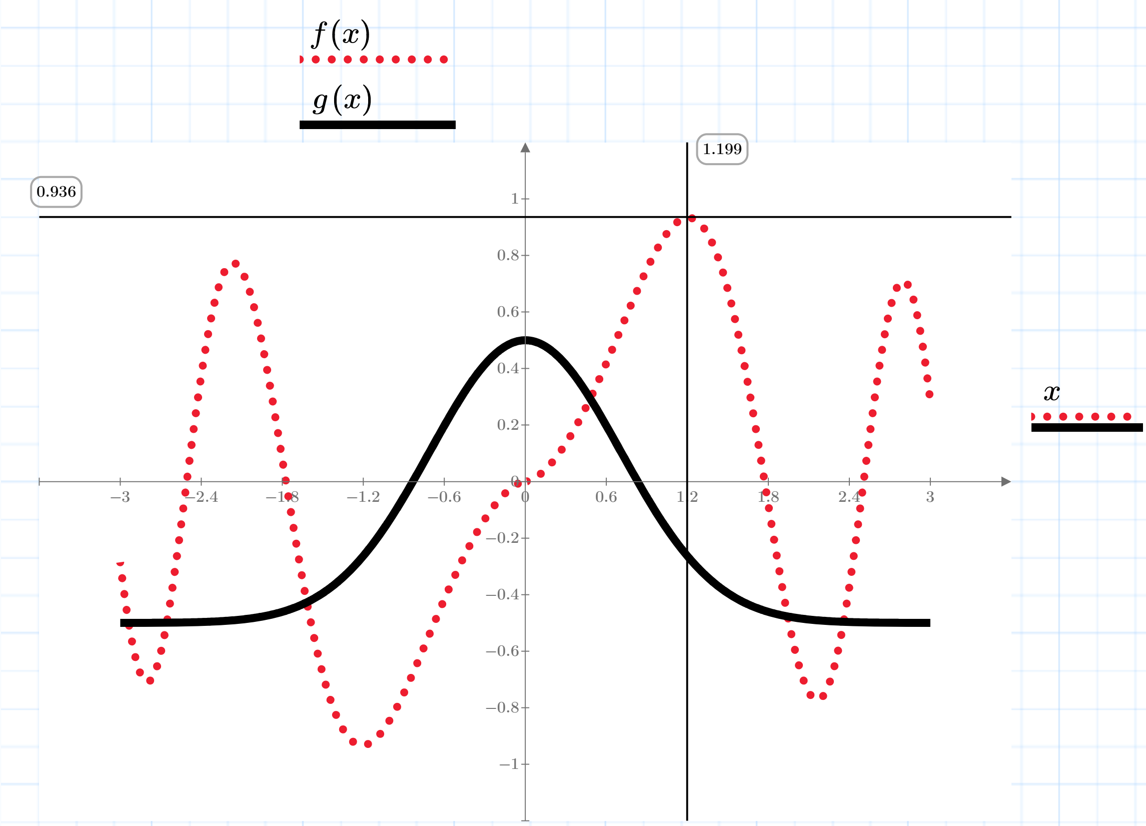
$y1 = -0.319$

Diagramme, Funktionen



Funktion mit := mit abhängiger und unabhängiger Variable definieren.

$$f(x) := \frac{\sin(x^2)}{\sqrt[3]{x}} \qquad g(x) := e^{-x^2} - \frac{1}{2}$$



Verschiedenste Formatierungen des Diagramms sind möglich -> siehe Diagramme
Darstellungsbereich einfach über die Zahlenwerte am Ende der Achsen mit der Maus ändern.
Weitere Funktionen in eine Diagramm einzeichnen: <*Spur hinzufügen*>

Algebra und Funktionen
mit definierten Funktionen können auch algebraische Operationen durchgeführt werden.

$$0 = g(x) \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(2)} \\ -\sqrt{\ln(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.833 \\ -0.833 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x) = 0.4} \xrightarrow[\;]{\substack{solve, x \\ assume, x = RealRange(1, 2)}} ?$$

Nicht alle Gleichungen sind mit "solve" lösbar. Als Alternative bieten sich die numerischen Verfahren "Lösungsblock" oder die Wurzelfunktion "root" an.

Schätzwerte

$x := 2$

Nebenbedingungen

$f(x) = 0.4$

Gleichungslöser

$\mathbf{find}(x) = 1.628$

Numerische Lösung mittels Wurzel (root)

$\mathbf{root}(g(sw), sw, 0, 2) = 0.833$

$sw := 2$

$\mathbf{root}(g(sw), sw) = 0.833 - 1.143i \cdot 10^{-7}$

$n(x) := f(x) - 0.4$

$\mathbf{root}(n(sw), sw, 1, 2) = 1.628$

Funktion root sucht Nullstellen; entweder Suchbereich für Nullstelle oder Schätzwert für Nullstelle angeben. (Siehe nebenstehende Bsp) (Imaginärteil sollte eigentlich Null sein -> Variable TOL in *Berechnung* kleiner einstellen)

Sonst muss eine neue Funktion *n* so definiert werden, dass eine Nullstelle gesucht wird.

Differenzial und Integralrechnung

Ableitung auch mit Strich

alle Rechenzeichen
(auch Strich für Ableitung):
Rechnen; <*Operatoren*>

$$z(x) := x^5$$

$$z'(x) \rightarrow 5 \cdot x^4$$

$$z_2(x) := \frac{d^2}{dx^2} z(x) \rightarrow 20 \cdot x^3$$

$$z_2(x) = 3 \xrightarrow[]{\substack{solve, x \\ assume, x = real}} \frac{150^{\frac{1}{3}}}{10} = 0.531$$

$$\int \sin(x)^2 \, dx \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\sin(2 \cdot x)}{4}$$

$$\int_{1\,s}^{5\,min} \left(0.3 \, \frac{m}{min^2} \cdot t\right) dt = 3.75 \, m$$

$$\int_{1\,s}^{x} \left(0.3 \, \frac{m}{min^2} \cdot t\right) dt \rightarrow -\frac{0.15 \cdot m \cdot \left(1.0 \cdot s^2 - x^2\right)}{min^2}$$

$$L := \int_{100\,s}^{x} \left(0.3 \, \frac{m}{min^2} \cdot t\right) dt = 5 \, m \xrightarrow[]{\substack{solve, x \\ float, 3}} \begin{bmatrix} -3.33 \cdot \sqrt{900.0 \cdot s^2 + 3.0 \cdot min^2} \\ 3.33 \cdot \sqrt{900.0 \cdot s^2 + 3.0 \cdot min^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -360.195 \\ 360.195 \end{bmatrix} s$$

$$L = \begin{bmatrix} -360.195 \\ 360.195 \end{bmatrix} s$$

Differenzialgleichungen numerisch lösen

$Ende := 100 \quad N := 1000$

Differenzialgleichung in Lösungsblock mit den Anfangsbedingungenen schreiben.
Lösung mit "odesolve" wird von 0 bis *Ende* berechnet mit *N* Zwischenpunkten (Auflösung).
Die Lösungsfunktion *y* verwendet die *N* Lösungspunkte und interpoliert dazwischenliegende Punkte.
y kann daher als Funktion *y*(*x*) numerisch im Lösungsbereich weiter verwendet werden.

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$y''(x) + 0.05 \cdot y'(x) + 3 \cdot y(x) = 5 \cdot sin(x)$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

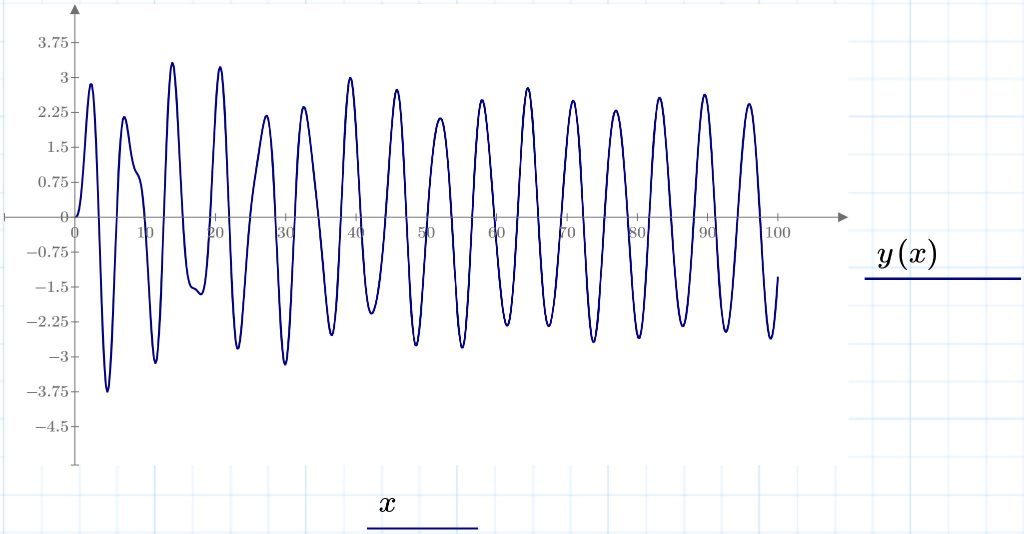
Gleichungslöser

$$y := \mathbf{odesolve}(y(x), Ende, N)$$

$$y(5.3) = -2.474 \qquad \int_1^2 y(x)\,\mathrm{d}x = 1.704$$

$$y1(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) \qquad y1(3) = -3.482$$

Anmerkung zu Grafik:
Die Variable Ende wird auf der *x*-Achse verwendet um den Darstellungsbereich zu begrenzen.



Stochastik

viele Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind vorprogrammiert (Hypergeom, Binomial, Poisson, Normal, t, chiquadrat.....(siehe Funktionen, *<Wahrscheinlichkeitsverteilung>*) der Syntax ist relativ ähnlich:

$\mathrm{dbinom}(2, 10, 25\%) = 28.157\%$

d + W-keitsverteilung entspricht P(X=2) für n=10 und p=25%

$\mathrm{pbinom}(2, 10, 25\%) = 52.559\%$

p + W-keitsverteilung entspricht P($X \le 2$) für n=10 und p=25% (kumulativ)

$\mathrm{rbinom}(3, 10, 25\%) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

r + W-keitsverteilung liefert 3 zufällige Ausgänge eines Experiments mit n=10 und p=25% (Simulation)

$\mathrm{qbinom}(90\%, 10, 25\%) = 4$

q + W-keitsverteilung versucht eine Lösung x der Gleichung P($X \le x$) = 90% für n=10 und p=25% zu finden. (Umkehraufgabe, Quantile, bei diskreter Zufallsvariable tw. problematisch)

Probe:

$\mathrm{pbinom}(4, 10, 25\%) = 0.922$

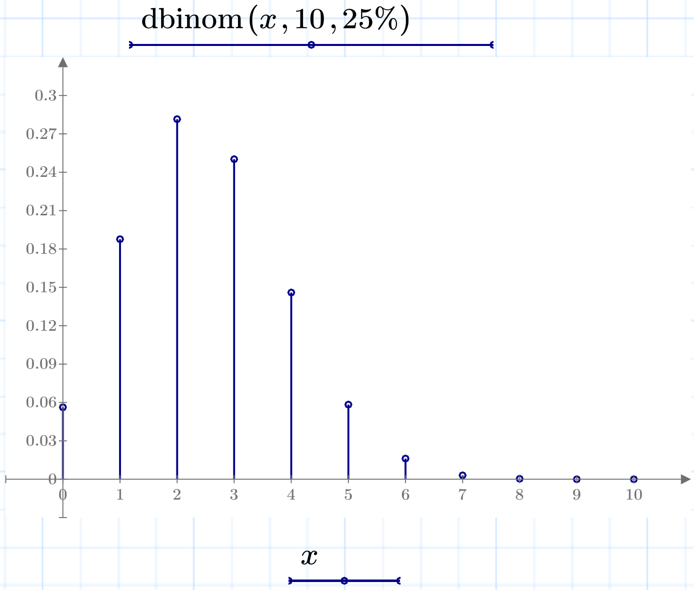
Hinweis zur Prozentschreibung:
In der Angabe einfach das Prozentzeichen anhängen zB: 5%

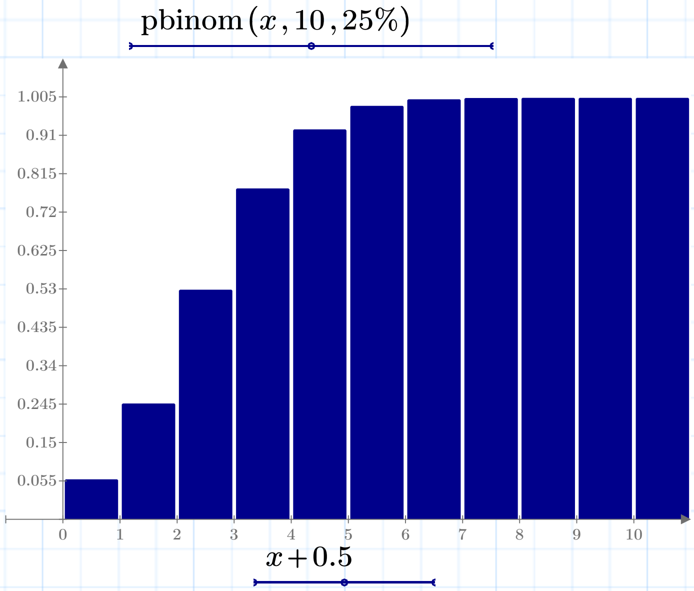
Ergebnis in Prozentschreibweise:
Mathematische Formatierung
<Ergebnisformat>

Wahrscheinlichkeitsfunktion, Dichtefunktion, Verteilungsfunktion

$x := 0, 1 .. 10$

bei diskreter Zufallsvariable den Darstellungsbereich definieren Rechnen, <*Operatoren*> Bereich oder Schrittbereich und
Diagramme <*Typ ändern*> Stab- bzw. Säulendiagramm (+ Verschiebung auf x-Achse um 0,5)





Boxplot

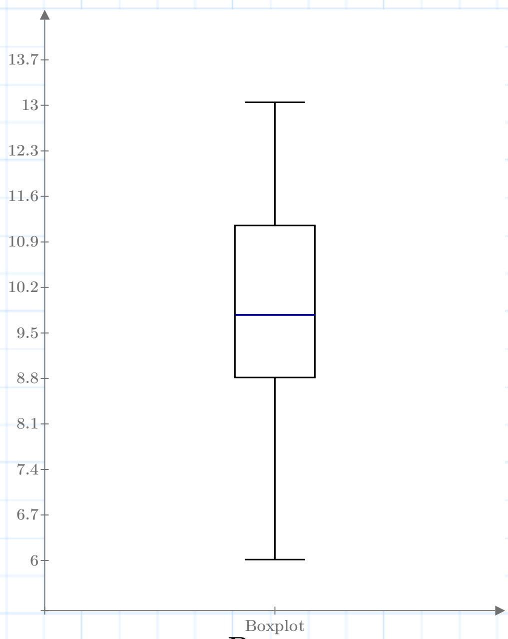
$DATA := \mathrm{rnorm}(50, 10, 2)$

$$DATA = \begin{bmatrix} 9.943 \\ 9.351 \\ 8.071 \\ 6.618 \\ 10.697 \\ 11.287 \\ 9.568 \\ 11.848 \\ 9.896 \\ 9.26 \\ 6.015 \\ 8.096 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Die ersten drei Werte der Funktion Boxplot (Funktionen *<statistische Versuchsplanung>*) entsprechen den Quartilen, dann Min und Max, sowie eventuelle Ausreisser (nach Definition von MCD)

$$\mathrm{M} := \mathrm{boxplot}(DATA) = \begin{bmatrix} 8.815 \\ 9.776 \\ 11.152 \\ 6.015 \\ 13.047 \end{bmatrix}$$

$B := [\text{“Boxplot”}]$ Beschriftung des Boxplots (als Matrix)



M^{T}

B

Diagramm: *<x-y Diagramm einfügen> <Typ ändern>*

Hinweis: Boxplotdaten transponieren!!

Schließende Statistik

$x_{quer} := \text{mean}(DATA) = 9.793$

$s := \text{Stdev}(DATA) = 1.64$

$n := \text{rows}(DATA) = 50$

Mittelwert und Standardabweichung einer Stichprobe (DATA siehe oben) (Funktionen *<Statistik>*)

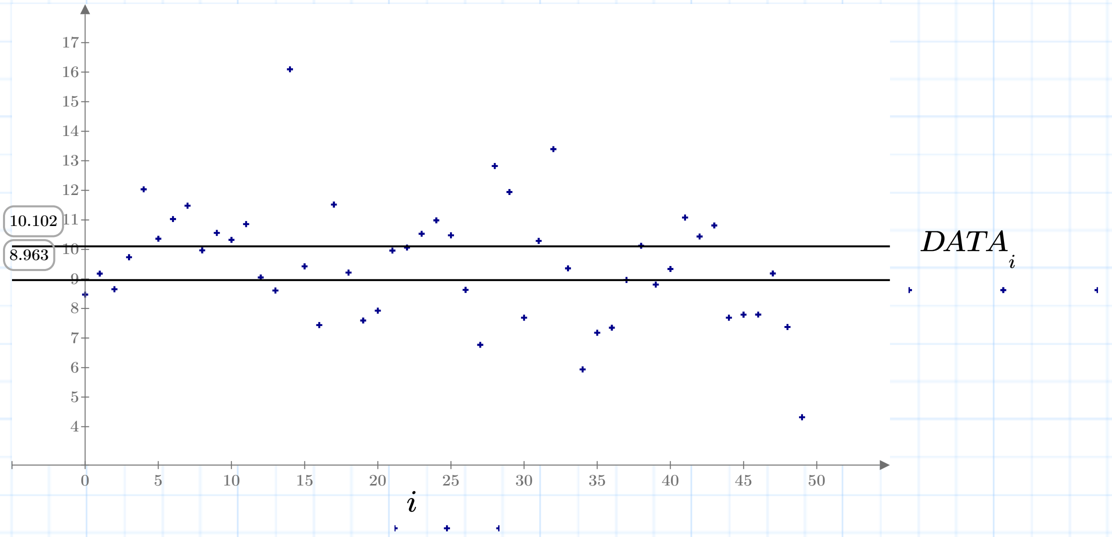
$\mu_{Oben} := x_{quer} + \text{qt}(97.5\%, n-1) \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 10.259$

$\mu_{Unten} := x_{quer} - \text{qt}(97.5\%, n-1) \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 9.327$

95 % Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Stichprobe mit unbekannter Standardabweichung

Grafische Darstellung der einzelnen Messwerte (DATA) und des 90% Konfidenzintervalls für den Erwartungswert auf Basis dieser Messwerte.

$i := 0, 1 .. n-1$



Regression

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \\ 5 & 8 \\ 7 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Messwerte: erste Spalte *x*, zweite Spalte *y*

$$\begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} := \mathrm{line}\left(M^{\langle 0 \rangle}, M^{\langle 1 \rangle}\right) = \begin{bmatrix} 13.72 \\ -1.022 \end{bmatrix}$$

lineare Regression:
Funktionen
<Kurvenanpassung>

$$y_{Lin}(x) := k \cdot x + d$$

$$\mathrm{corr}\left(M^{\langle 0 \rangle}, M^{\langle 1 \rangle}\right) = -0.985$$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$P := \mathrm{regress}\left(M^{\langle 0 \rangle}, M^{\langle 1 \rangle}, 2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 15.362 \\ -1.701 \\ 0.056 \end{bmatrix}$$

Polynomregression:
mit Befehl "regress" (nicht in Funktionen enthalten)
Zahl am Ende des Befehls gibt den Grad an.
Ergebnisvektor liefert 6 Einträge wobei die letzten 3 (allgemein n+1) Einträge die Koeffizienten des Polynoms sind.

$$y_{Poly}(x) := \sum_{i=0}^{2} P_{i+3} \cdot x^{i}$$

$$E := \mathrm{expfit}\left(M^{\langle 0 \rangle}, M^{\langle 1 \rangle}\right) = \begin{bmatrix} 18.348 \\ -0.1 \\ -2.848 \end{bmatrix}$$

Exponentielle Regression:
Funktionen
<Kurvenanpassung>
Expfit liefert (ggfs. als dritten Parameter einen Vektor mit Schätzwerte angeben) Werte für $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x} + c$

$$y_{Exp1}(x) := E_0 \cdot e^{E_1 \cdot x} + E_2$$

$$\begin{bmatrix} d_L \\ \lambda \end{bmatrix} := \mathrm{line}\left(M^{\langle 0 \rangle}, \ln\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2.802 \\ -0.142 \end{bmatrix}$$

Alternativ kann die Idee des ordinatenlogarithmischen Diagramms verwendet werden für $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$

$$y_{Exp2}(x) := e^{d_L} \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Grafische Darstellung der Messwerte und der Ergebnisse: $x := 0, 0.1 .. 12$