ÜTA: B - Schlauch für Cluster 1 (tw.) und 3

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  allgemeine Sinusfunktion, Winkelfunktionen im schiefwinkeligen Dreieck;
  lineare Regression; Kosten- und Preistheorie,
  bestimmtes Integral

- Kurzzusammenfassung

  Übungsbeispiel zur Vorbereitung auf die sRDP in AM zum fachspezifischen Teil B für die Cluster 1 und 3

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  Durch die gemischten Inhalte können die einzelnen Items in den jeweiligen Jahrgängen eingesetzt werden.
  Alternativ kann das Beispiel auch zur Vorbereitung/Wiederholung der Inhalte für die sRDP in der 5.Klasse verwendet werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  dem Lehrplan entsprechend für alle HTL Abteilungen;
  Kompetenzkatalog für alle Abteilungen, die in Cluster 1 und 3 die sRDP absolvieren;

- Mathcad-Version:

  Prime 3

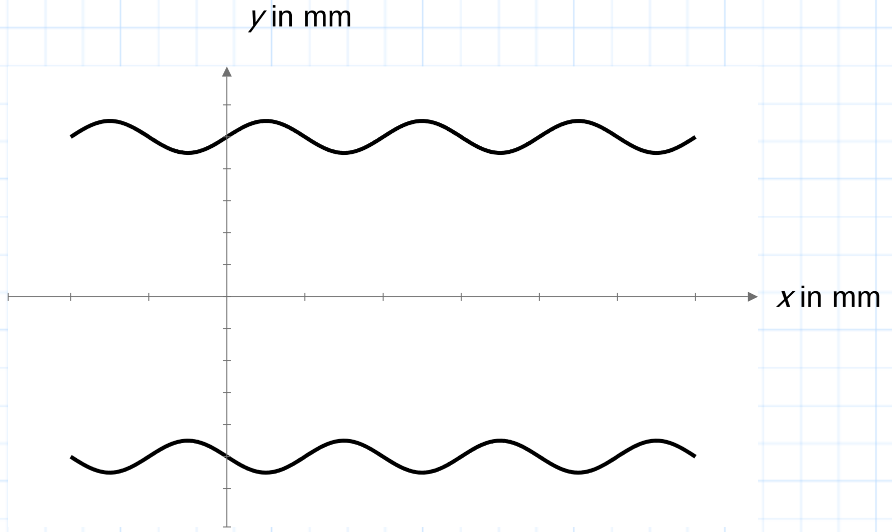
Nur nichtkommerzielle Verwendung

Schläuche

---

a. Schläuche haben auch Gründen der Stabilität manchmal eine geriffelte Oberfläche, wie in der untenstehenden Skizze im Längsschnitt dargestellt. Die obere der beiden in der Grafik dargestellen Begrenzungslinien kann durch eine allgemeine Sinusfunktion ***y*** mit $y(x) = a + b \cdot sin(0.6283 \cdot x)$ beschrieben werden. (*x*,*y* ... Koordinaten in mm)
Es gilt weiters: *D*..... Außendurchmesser des Schlauches;
d..... Innendurchmesser des Schlauches
Anmerkung: Die Wandstärke des Schlauches wird hier nicht berücksichtigt.

- Geben Sie die beiden Parameter *a* und *b* mit Hilfe der Größen *D* und *d* an.
- Skalieren Sie die *x*-Achse in dem Sie die dazu notwendigen Informationen aus der Funktionsgleichung *y* entnehmen. (nicht für Cluster 1)



---

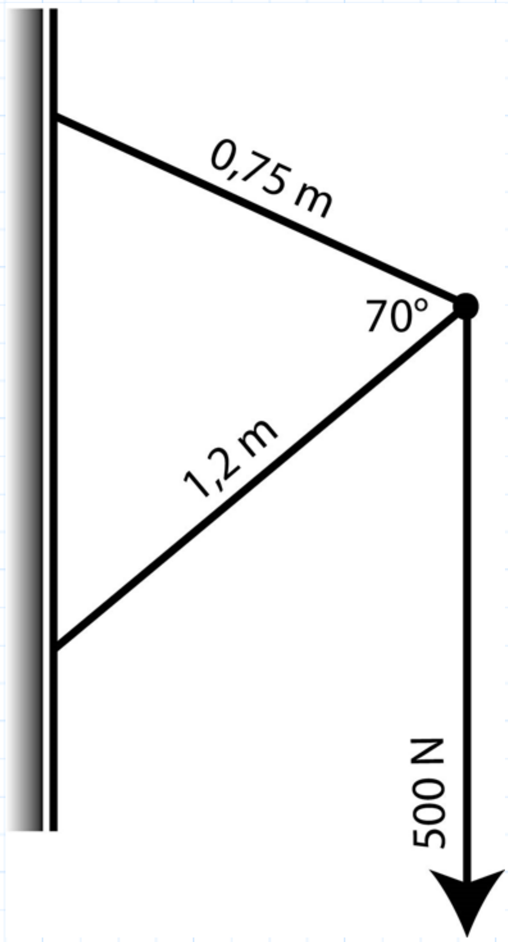
b. Ein geriffelter Schlauch entsteht, wenn die durch die Funktion ***y*** mit $y(x) := 15 + 2 \cdot \cos(0.5 \cdot x)$ beschriebene Begrenzungslinie um die x-Achse rotiert. (x,y in mm)

- Bestimmen Sie, welche Länge dieser Schlauch haben muss (von x = 0 gemessen), damit er 5 Liter einer Flüssigkeit enthält.

Nur nichtkommerzielle Verwendung

c. Ein Schlauch (Gewichtskraft 500 N) wird zum Trocknen gemäß der folgenden Darstellung an einem Gestänge bestehend aus zwei Stäben aufgehängt.

- Skizzieren sie mit Hilfe eines Kräftedreiecks/parallelogramms die Zerlegung der Gewichtskraft in die Kräfte, die in Richtung der beiden Stäbe wirken.
- Berechnen Sie den Betrag der Kräfte, die in Richtung dieser Stäbe wirken.



Nur nichtkommerzielle Verwendung

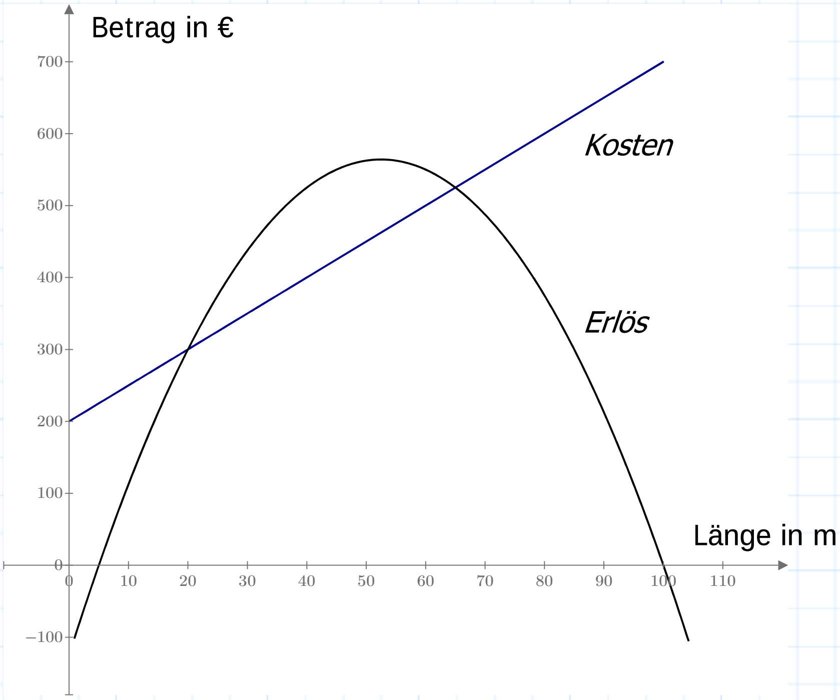
d. Schläuche werden in Baufachmärkten als Meterware angeboten.
Für die lineare Kostenfunktion der Schläuche gilt: Die Fixkosten betragen € 350. Der Schlauch wird um 40 Cent pro Meter eingekauft.
Die Gewinnfunktion pro Meter Schlauch wird (für einen konstanten Verkaufspreis) durch die Funktion *G* angegeben:

$$G(x) = 1.1 \cdot x + b$$

x .... Länge des Schlauchs in Meter
G(x) ... Gewinn in € bei Verkauf eines Schlauchs der Länge x
b .... Konstante

- Geben Sie an um welchen Preis (pro Meter) der Schlauch im Baumarkt verkauft wird.
- Geben Sie den Wert der Konstante *b* der Gewinnfunktion an.

e. Die nachstehende Grafik zeigt die Kosten- und Erlösfunktion für eine Sonderfertigung von Schläuchen.



- Kreuzen Sie das Intervall für jene Längen (in Meter) an, in dem Gewinn erzielt wird.

o 5 < x < 100
o]20; 65[
o [300; 565]
o (300; 525)
o (200; 525]

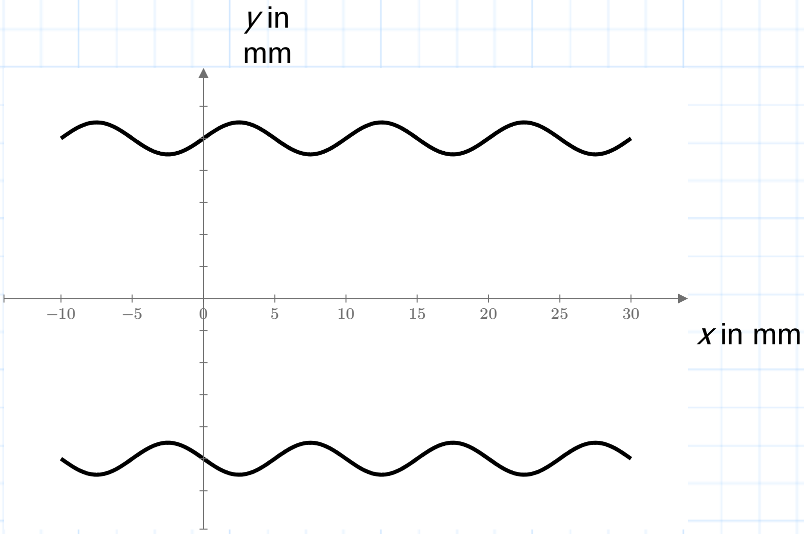
Nur nichtkommerzielle Verwendung

Lösungserwartung a:

$a = \frac{D+d}{2}$ $\qquad b = \frac{D-d}{2}$ $\qquad$ oder $\qquad y(x) = \frac{D+d}{2} + \frac{D-d}{2} \cdot sin(0.6283 \cdot x)$

Aus dem Parameter 0,6283 kann die Länge einer Schwingung bestimmt und damit in das Diagramm eingetragen werden.

$$0.6283 = \frac{2 \cdot \pi}{L} \xrightarrow{solve, L} 10.000294934234579782$$



Lösungsschlüssel:

1 x A: für die richtige Angabe der Parameter a und b
1 x C: für das richige Interpretieren des Parameters 0,6283 sowie das korrekte Eintragen in das Diagramm

Komptenzkatalog: B1_3.2, B1_3.3 und B3_3.2, B3_3.3

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Lösungserwartung b:

Um die Länge zu erhalten muss die folgende Gleichung (unter Berücksichtigung der Einheiten) gelöst werden.

$$\boxed{5 \cdot 10^6 = \pi \cdot \int_0^{xx} y(x)^2 \, \mathrm{d}x} \xrightarrow{solve, xx} ?$$

keine Lösung mit Solve daher mit numerischem Verfahren (von der verwendeten Technologie abhängig/ ev. auch mit Einheiten möglich):

$$xx := 100$$

Startwert
(bewusst schlecht gewählt)

$$V(xx) := 5 \cdot 10^6 - \pi \cdot \int_0^{xx} y(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

In Nullstellenform umschreiben

$$xx := \mathbf{root}(V(xx), xx) = 7011$$

Lösung mit Funktion root
(in mm)

$$xx = 7011$$

$$\pi \cdot \int_0^{xx} y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot 10^6$$

Probe OK

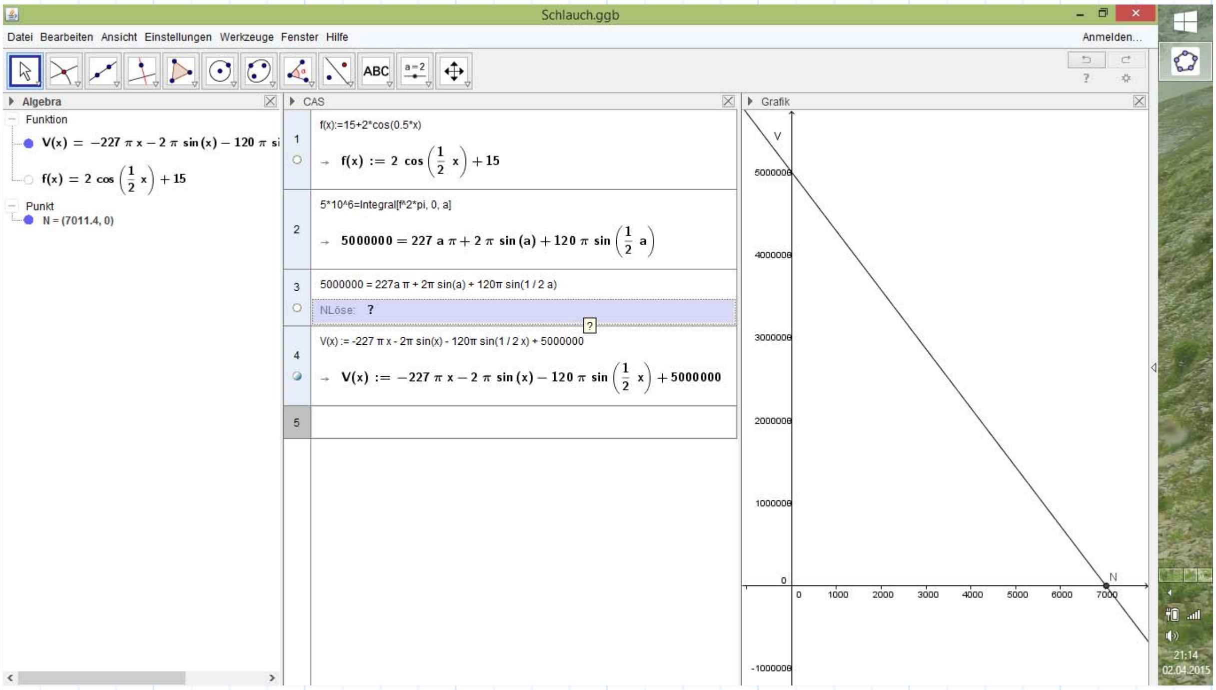
$$\boxed{\mathbf{root}(V(a), a, 0, 1000)} = ?$$

$$\mathbf{root}(V(a), a, 0, 10000) = 7.011 \cdot 10^3$$

Geht auch ohne Startwert, wenn ein Intervall angeben wird in dem die Lösung enthalten ist.

Nur nichtkommerzielle Verwendung

alternative Lösung mit Geogebra (über Grafik der Stammfunktion und anschließendes Suchen der Nullstelle)



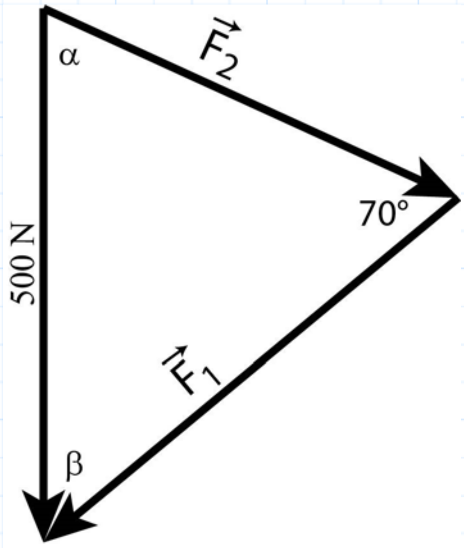
Lösungsschlüssel:

1 x A: für das richtige Modell (Aufstellen der Gleichung, ...) (u)
1 x B: für die richtige Berechnung der Länge des Schlauchs (a)

Komptenzkatalog: B1_3.2, B1_3.3 und B3_3.2, B3_3.3

Anmerkung: Die zweite Lösung mit Geogebra soll zeigen, dass es je nach verwendeter Technologie verschiedenen Zugänge/Lösungswege für ein Problem gibt. (Technologiekompetenz)

Lösungserwartung c:



Mit Cosinussatz kann die fehlende Seite (in Meter) berechnet werden:

$$c := \sqrt{1.2^2 + 0.75^2 - 2 \cdot 1.2 \cdot 0.75 \cdot \cos(70\,°)}$$

$$c = 1.178$$

Mit Sinussatz kann der kleinste Winkel des Dreiecks berechnet werden:

$$\beta := \operatorname{asin}\left(\frac{0.75 \cdot \sin(70\,°)}{c}\right) = 36.759\,°$$

$$\alpha := 180\,° - 70\,° - \beta = 73.241\,°$$

Die gesuchten Kräfte (in N) ergeben sich mit dem Sinussatz:

$$F_1 := \frac{500}{\sin(70\,°)} \cdot \sin(\alpha) = 509.488$$

$$F_2 := \frac{500}{\sin(70\,°)} \cdot \sin(\beta) = 318.43$$

Lösungsschlüssel:

1 x A: für die richtige Skizze der Kräftezerlegung (u)
1 x A: für die richtige Vorgehensweise bei der Berechnung der Kräfte (a)
1 x B: für die richtige Berechnung der beiden Kräfte (a)

Komptenzkatalog: B1_2.3, B1_2.5 und B3_2.3, B3_2.5

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Lösungserwartung d:

Für die Gewinnfunktion gilt: $G = E - K = p \cdot x - (k \cdot x + d) = (p - k) \cdot x - d$

Daher ist der Verkaufspreis in € pro Meter: $1.1 + 0.4 = 1.5$

Die Konstante b entspricht den negativen Fixkosten: $b = -350$

Lösungsschlüssel:

1 x C: für die richtige Angabe des Verkaufspreises (u)
1 x C: für die richtige Angabe der Konstante b (u)

Komptenzkatalog: 3.9; B1_3.2 und B3_3.2

Lösungserwartung e:

Das zweite Intervall]20; 65[ist richtig.

Lösungsschlüssel:

1 x C: für die Angabe des richtigen Intervalls (u)

Komptenzkatalog: 3.9; B1_3.2 und B3_3.2

Nur nichtkommerzielle Verwendung