Nietrost Bernhard bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Näherung einer Wechselspannung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Polynomfunktion, allgemeine Sinusschwingung, Integralmittelwerte, Stetigkeit, Fourieranalyse

- Kurzzusammenfassung

  Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf ein elektrotechnisches Problem

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  Kompetenzorientiertes Übungsbeispiel; auch als Vorbereitungsbeispiel für die teilzentrale Reifeprüfung (sRDP) im Fach angewandte Mathematik für den HTL Cluster 2 einsetzbar.
  Zu jedem Aufgabenteil sind im Lösungsteil die Kompetenzen und die Inhalte entsprechend dem Kompetenzkatalog für die sRDP angeführt.
  Die einzelnen Teile des Beispiels sind aufeinander aufbauend (nicht unabhängig im Vergleich zu den Aufgaben der sRDP).
  Bei den Fragestellungen werden weitgehend die Schlüsselwörter der sRDP verwendet.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4. Jahrgang, höhere Abteilungen für Mechatronik, Elektronik, Informatik, ...

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

  www.bifie.at (Kompetenzkataloge, Schlüsselwörter, Modellmatura, weitere Übungsaufgaben (ÜTA).....)

Näherung einer Wechselspannung durch Parabelbögen

Eine Periode einer Wechselspannung mit Spitzenwert $U_S := 100\,mV$ und Frequenz $f := 20\,Hz$ soll stückweise durch zwei quadratische Parabelbögen beschrieben werden.
Der erste Parabelbogen soll den Sinus im Bereich von 0 bis T/2, der zweite im Bereich von T/2 bis T beschreiben. Als Stützstellen sind die Nullstellen und das Maximum bzw. Minimum zu verwenden.

1. Gib die Funktionsgleichungen für die beiden Parabelstücke an.

2. Veranschauliche die Wechselspannung und die Näherung durch die beiden Parabelbögen in einem Diagramm über eine Periode mit Hilfe einer Graphik.

3. Vergleiche den Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert der Sinusfunktion mit den entsprechenden Werten der Näherung durch die Parabel. Erkläre warum etwaige Abweichungen auftreten.
Gib jeweils den relativen Fehler für den Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert an, der sich bei die Verwendung der Näherung durch die Parabel gegenüber dem Sinus ergibt.

4. An der Übergangsstelle (bei T/2) haben beide Parabelbögen gleiche y Werte.
Überprüfe ob der Übergang zwischen den Parabelbögen auch bezüglich der Steigung und der Krümmung stetig (ohne Sprung) erfolgt.

5. Bestimme die Fourierkoeffizienten der Näherung durch die Parabelbögen (Erkläre welche Fourierkoeffizienten nicht berechnet werden müssen!)
Vergleiche das Amplitudenspektrum der Parabelbögen (Darstellung als Stabdiagramm) mit dem Amplitudenspektrum der Wechselspannung.

Lösung

1. Gib die Funktionsgleichungen für die beiden Parabelstücke an.

Inhalt: Modellieren einer quadratischen Polynomfunktion

Kompetenzen: Modellieren und Operieren/Technologieeinsatz
Deskriptoren: B2_3.2 und B2_3.3

Die Parabelbögen können mit Hilfe der allgemeinen Form ($y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$), der Scheitelform ($y = a \cdot (x - m)^2 + n$) oder der Nullstellenform ($y = a \cdot (x - n_1) \cdot (x - n2)$) einer quadratischen Funktion berechnet werden.

Die Stützstellen sind für den **ersten Parabelbogen** (0/0), ($\frac{T}{4}$/ U_S) und ($\frac{T}{2}$/0),

und für den **zweiten Parabelbogen** ($\frac{T}{2}$/0), ($\frac{3T}{4}$/ U_S) und (T/0)

1. Bogen

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $\qquad T := \frac{1}{f} \qquad T = 0.05$

c ist beim ersten Bogen Null, da dieser durch den Ursprung geht.

Vorgabe

$$U_S = a \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^2 + b \cdot \frac{T}{4} \qquad 0 = a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{T}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} -640000 \\ 16000 \end{pmatrix}$$ Koeffizienten a und b der ersten Parabel

$y_1(t) := a1 \cdot t^2 + b1 \cdot t$ Definition der ersten Parabel

2. Bogen

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Vorgabe

$0 = a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{T}{2} + c$ $\quad 0 = a \cdot T^2 + b \cdot T + c$ $\quad -U_S = a \cdot \left(\frac{3T}{4}\right)^2 + b \cdot \frac{3T}{4} + c$

$\begin{pmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} 640000 \\ -48000 \\ 800 \end{pmatrix}$ Koeffizienten a,b und c der zweiten Parabel

$y_2(t) := a2 \cdot t^2 + b2 \cdot t + c2$ Definition der zweiten Parabel

Die beiden Parabelbögen lauten daher.

$y_1(t) \rightarrow 16000 \cdot t - 640000 \cdot t^2$ $\quad y_2(t) \rightarrow 640000 \cdot t^2 - 48000 \cdot t + 800$

2. Veranschauliche die Wechselspannung und die Näherung durch die beiden Parabelbögen in einem Diagramm über eine Periode mit Hilfe einer Graphik.

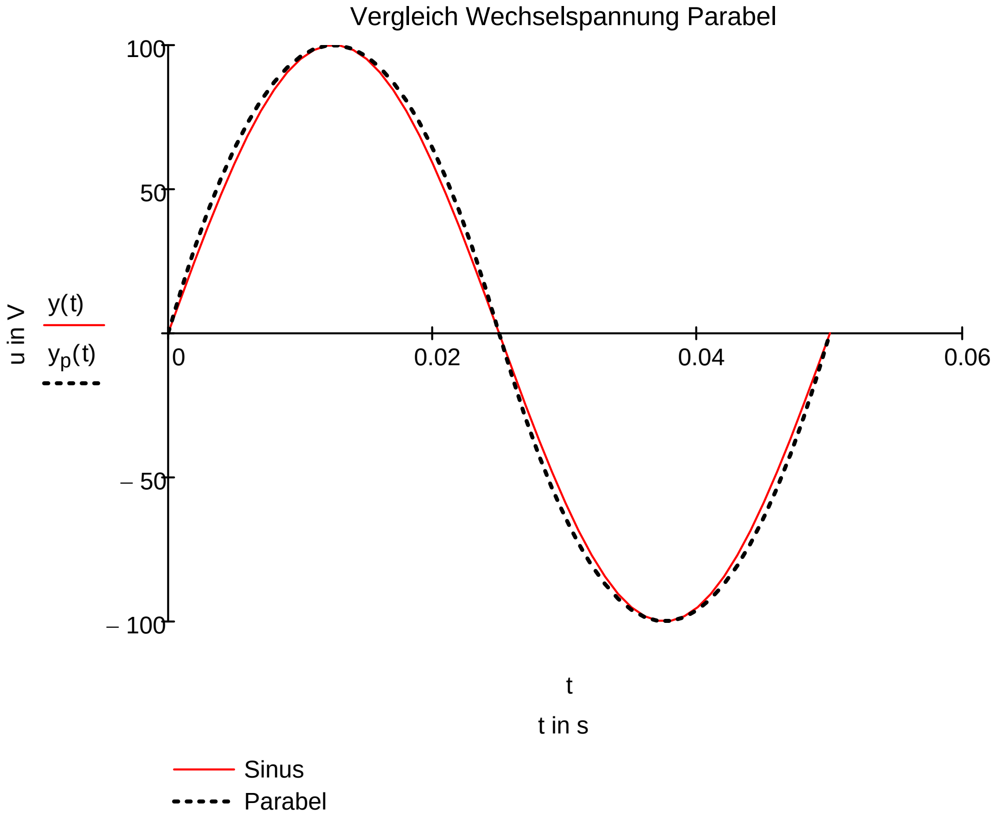
Inhalt: Die in Punkt 1 bestimmten Funktionen und die Wechselspannung müssen in eine graphische Darstellung umgesetzt werden (Wahl des Darstellungsbereichs, *stückweise stetige Darstellung der Parabelbögen*)

Kompetenzen: Modellieren/Transferieren und Operieren/Technologieeinsatz
Deskriptoren: B2_3.2, B2_3.4

$y_p(t) := y_1(t) \cdot \Phi\left(\frac{T}{2} - t\right) + y_2(t) \cdot \Phi\left(t - \frac{T}{2}\right)$ stückweise Definition mit Heavysidefunktion.

Definition der Wechselspannung und des Zeichenbereichs

$y(t) := U_S \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ $\quad t := 0, 0.001 .. T$



Aus der Graphik ist zu erkennen, dass die Parabelbögen die Schwingung gut approximieren aber zwischen den Stützstellen die y-Werte betragsmäßig etwas zu groß sind.

3. Vergleiche den Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert der Sinusfunktion mit den entsprechenden Werten der Näherung durch die Parabel. Erkläre warum etwaige Abweichungen auftreten. Gib jeweils den relativen Fehler für den Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert an, der sich bei die Verwendung der Näherung durch die Parabel gegenüber dem Sinus ergibt.

Inhalt: Berechnung der entsprechenden Mittelwerte mit Hilfe der Integralrechnung (stückweise Formulierung von Integralen, Integrationsgrenzen) und anschließender Vergleich der Ergebnisse (beim Mittelwert ist keine Berechnung erforderlich):

Kompetenzen: Modellieren, Operieren/Technologieeinsatz, Interpretieren, Argumentieren
Deskriptoren: B2_4.6, B2_1.1

Mittelwert: Da über und unter der Zeitachse sowohl beim Sinus als auch bei der Näherung durch die Parabel die Flächen gleich sind, ist das Ergebnis immer Null und daher kein Unterschied

Gleichrichtwert:

$$GWsin := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |y(t)|\, dt = 63.66$$

$$GWpar := \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} y_1(t)\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} |y_2(t)|\, dt \right) = 66.67$$

$$RF_{GW} := \frac{GWpar}{GWsin} - 1 = 4.72 \cdot \%$$

Der Gleichrichtwert der Parabelnäherung ($GWpar = 66.67$ mV) ist um fast 5% (= relativer Fehler) größer als jener der Sinusschwingung ($GWsin = 63.66$ mV), da die Parabel betragsmäßig eine etwas größere Fläche mit der Zeitachse einschließt.

Effektivwert:

$$EWsin := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y(t)^2\, dt} = 70.71$$

$$EWpar := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} y_1(t)^2\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} y_2(t)^2\, dt \right)} = 73.03$$

$$RF_{EW} := \frac{EWpar}{EWsin} - 1 = 3.28 \cdot \%$$

Auch der Effektivwert der Parabelnäherung ($EWpar = 73.03$ mV) ist um etwas mehr als 3% größer als jener der Sinusschwingung ($EWsin = 70.71$ mV).

4. An der Übergangsstelle (bei T/2) haben beide Parabelbögen gleiche y Werte.
Überprüfe ob der Übergang zwischen den Parabelbögen auch bezüglich der Steigung und der Krümmung stetig (ohne Sprung) erfolgt.

Inhalt: Untersuchung der Stetigkeit an der Übergangsstelle

Kompetenzen: Operieren/Technologieeinsatz, Interpretieren, Argumentieren
Deskriptor: B2_4.3, B2_4.5, A4.4

Überprüfung der Stetigkeit von Steigung und Krümmung

Überprüfung der Steigung

$$y1_1(t) := \frac{d}{dt}y_1(t) \rightarrow 16000 - 1280000 \cdot t$$

$$y1_2(t) := \frac{d}{dt}y_2(t) \rightarrow 1280000 \cdot t - 48000$$

$$y1_1\left(\frac{T}{2}\right) = -1.6 \times 10^4 \qquad y1_2\left(\frac{T}{2}\right) = -1.6 \times 10^4$$

Die Parabelbögen haben an der Übergangsstelle (bei T/2) die gleiche Steigung und daher ist der Übergang der Steigung stetig.

Überprüfung der Krümmung

$$y2_1(t) := \frac{d}{dt}y1_1(t) \rightarrow -1280000$$

$$y2_2(t) := \frac{d}{dt}y1_2(t) \rightarrow 1280000$$

Die Parabelbögen haben an der Übergangsstelle (bei T/2) eine unterschiedliche Steigung (Vorzeichen!!!) und daher ist der Übergang der Krümmung nicht stetig.

5. Bestimme die Fourierkoeffizienten der Näherung durch die Parabelbögen (Erkläre welche Fourierkoeffizienten nicht berechnet werden müssen!)
Vergleiche das Amplitudenspektrum der Parabelbögen (Darstellung als Stabdiagramm) mit dem Amplitudenspektrum der Wechselspannung.

Inhalt: Bestimmung der Fourierkoeffizienten entweder durch Berechnung (b_n der Parabel) oder durch eine entsprechende Erklärung (a_n der Parabel, Spektrum einer Sinusschwingung.) Vergleichende Darstellung im Stabdiagramm.

Kompetenzen: Operieren/Technologieeinsatz, Interpretieren, Argumentieren
Inhalte: B2_4.6, B2_4.9, A5.1

Das Spektrum der Sinusfunktion besteht aus einem einzigen Amplitudenwert (U_S)
Die stückweisen Parabelbögen sind punktsymmetrisch und müssen daher nicht berechnet werden (Alle Werte a_n sind Null). Besonders ist natürlich auch $a_0 = 0$, da kein Gleichanteil vorliegt.

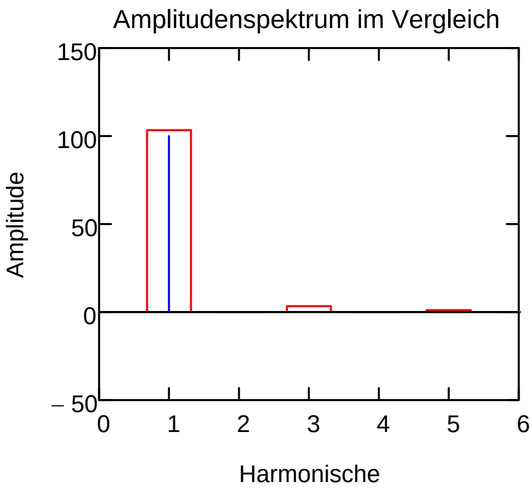
Berechnung des Spektrums der Parabel:

$n := 1 .. 6 \qquad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f$

$$bpar_n := \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} y_1(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} y_2(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt \right)$$

Spektrum der Parabel in Tabellenform und als Stabdiagramm

$$bpar = \begin{pmatrix} 0 \\ 103.2 \\ -2.18 \times 10^{-14} \\ 3.82 \\ -1.4 \times 10^{-14} \\ 0.83 \\ 7.46 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

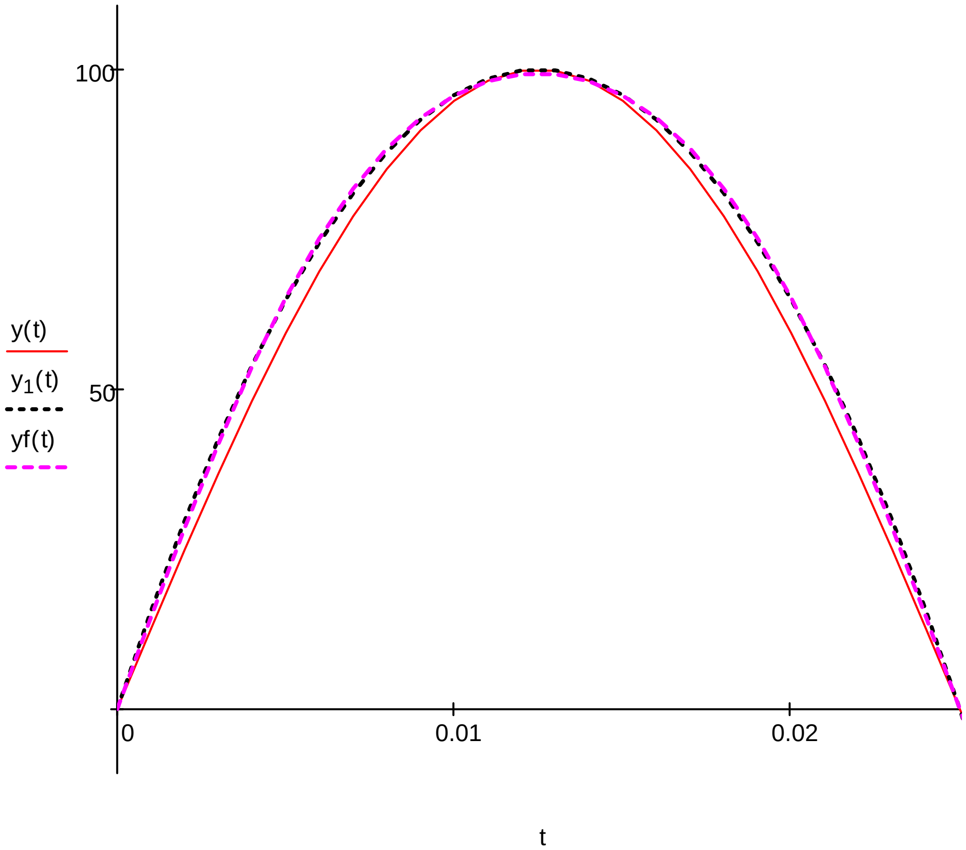


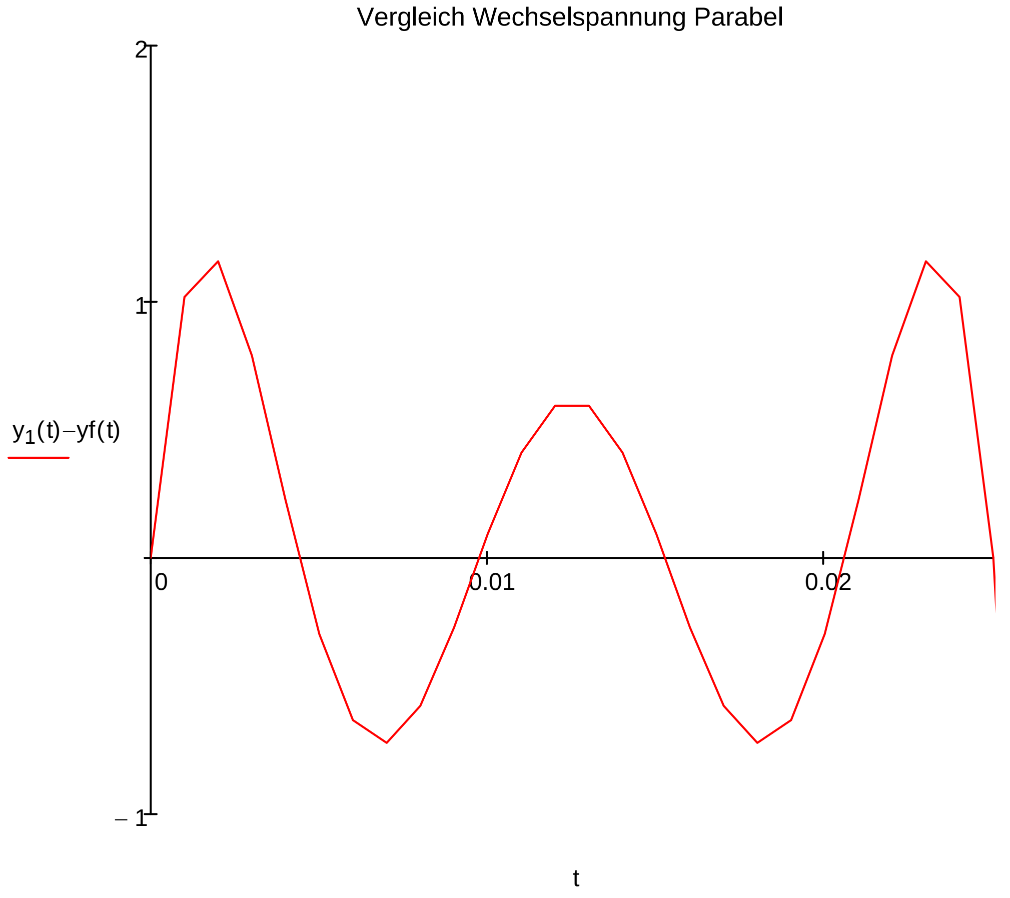
Das Spektrum der Sinusschwingung besteht nur aus der Grundschwingung mit der Amplitude U_S = 100 mV.

Die Parabel hat eine dominante und leicht größere 1.Harmonische (= Grundschwingung) und bereits deutlich abfallend die ungeraden Harmonischen.
Der geringe Anteil an Oberschwingungen erklärt auch warum die Parabel eine gute Näherung für die allgemeine Sinusfunktion liefert.
Zu beachten ist auch, dass durch die numerische Berechnung die Amplitudenwerte der geraden Harmonischen nicht Null sondern nur sehr kleine Werte ergeben.

$$yf(t) := \sum_{i=1}^{3} \left(bpar_i \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot i \cdot t) \right)$$

Vergleich Wechselspannung Parabel




Vergleich Wechselspannung Parabel
2
1
−1
$y_1(t)-yf(t)$
0
0.01
0.02
t