Nietrost Bernhard

bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Geometrie, Mechanik und Kinematik eines Wagenhebers

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Sinussatz, Cosinussatz, Funktionen, Differentialrechnung

- Kurzzusammenfassung

  Einfaches Problem mit Praxisbezug

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  projektorientierter Unterricht ev. auch fächerübergreifend mit Mechanik, Praxisbezug, leicht verständliche Aufgabenstellung (Wagenheber dieser Art sind in vielen Autos zu finden), [Vormittag ca. 5EH; die tatsächlich benötigte Zeit variiert sehr stark abhängig von verschiedenen Vorgaben wie: Vorstellung/Nachbesprechung/Präsentation der Ergebnisse, Einbindung von Aufgabenstellungen aus Mechanik etc.]

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2. oder 3. Jahrgang ev. in Verbindung mit dem Gegenstand Mechanik, alle Abteilungen, besonders Maschineningenieurwesen, Mechatronik, Maschinenbau,...

- Mathcad-Version

  Mathcad 15

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  Die Variable GRUPPE (s.u. neben Titel) dient zur Einstellung verschiedener Angaben für bis zu 7 Gruppen zu je 3-5 Personen. Die Aufgabenstellung kann auch fächerübergreifend in Verbindung mit Mechanik gestellt werden

  Bitte auf geeignete Formatierung beim Ausdruck achten (Seitenumbrüche).

Klicken Sie bitte in der Menüleiste auf **Format / Kopf -/Fußzeile...** , um diese gemäß der Vorgabe auszufüllen

Festlegung der Angabewerte:

Diese sind in der Matrix Abmessungen für 7 Gruppen enthalten.
Die Variable GRUPPE legt fest welche der 7 Gruppen ausgewählt wird.
Die Ergebnisse werden automatisch mitgerechnet.

$$\text{GRUPPE} := 7$$

$$\text{Abmessungen} := \begin{pmatrix} 17 & 19 & 20 \\ 18 & 20 & 19 \\ 19 & 21 & 18 \\ 20 & 22 & 17 \\ 21 & 23 & 16 \\ 22 & 24 & 15 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix} \cdot \text{cm}$$

In der Matrix Abmessungen sind die Geometriewerte für 7 Gruppen enthalten. Diese können natürlich verändert werden. Die weitere Lösung bezieht sich auf die in GRUPPE verwendeten Werte.

$$a := \text{Abmessungen}_{\text{GRUPPE}-1,0}$$

$$b := \text{Abmessungen}_{\text{GRUPPE}-1,1}$$

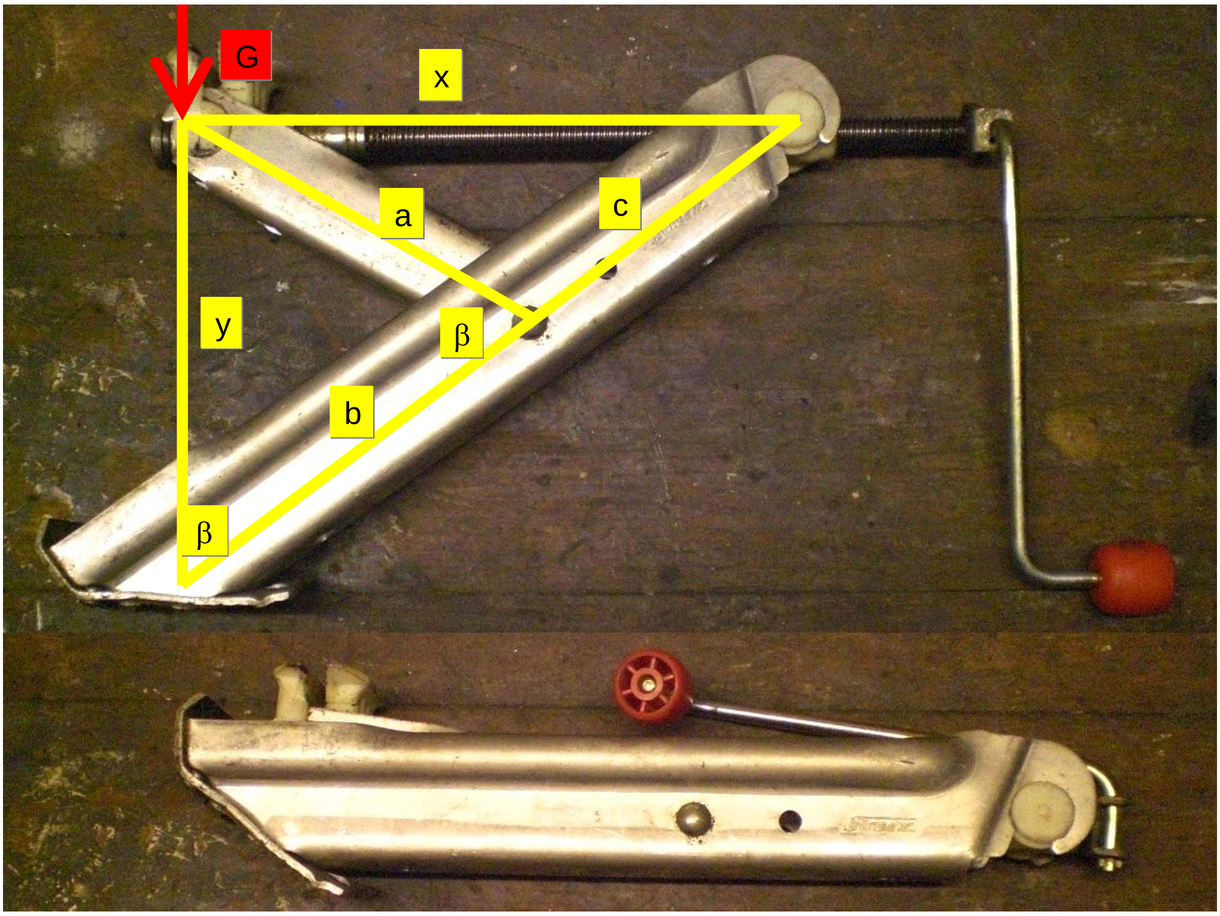
$$c := \text{Abmessungen}_{\text{GRUPPE}-1,2}$$

Die folgenden beiden Seiten enthalten die für die Schüler relevanten Fragestellungen zu diesem Projekt. Sie können für jede GRUPPE ausgedruckt und kopiert an die Schüler ausgegeben werden.

Projekt:Wagenheber

GRUPPE = 7

Durch Drehen der Schraube wird der Abstand x verringert und damit die Last G (das Auto) angehoben (y wird größer).
Anmerkung: Die Position des Wagenhebers ist immer so, dass y senkrecht ist und sich die Last G über der Standfläche befindet. Die Länge x muss nicht waagrecht sein.



Abmessungen: $a = 23 \cdot cm$ $b = 25 \cdot cm$ $c = 14 \cdot cm$

Teil A: Geometrie, Kinematik

1. Berechne die Entfernungen x und y in Abhängigkeit vom Winkel α und gib die Ergebnisse der Berechnung in einer Tabelle (im Bereich von $\alpha = 10° .. 60°$ mit $\Delta\alpha = 10°$) an.
2. Stelle mit Hilfe der Tabelle die Höhe des Autos y über dem Winkel des Wagenhebers α dar.
3. Stelle mit Hilfe der Tabelle die Höhe des Autos y über der Länge der Schraube x dar.
4. Interpretiere die Graphik und/oder die Tabelle hinsichtlich der Geschwindigkeit mit der das Auto am Anfang und am Ende des Vorgangs gehoben wird, wenn sich die Schraube gleichförmig dreht.
5. Berechne mit Hilfe der Tabelle die Änderungsrate $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für verschiedene Winkel α (zB. von 10° auf 20° oder von 30° auf 40°...... - verwende dazu die Tabelle aus Punkt 1)
Überlege welche Bedeutung die berechneten Quotienten k haben. (Vgl. auch Aufgabe 4)
6. ***(Diese Fragenstellung ist nur bei entsprechender Kenntnis der Differentialrechung in der Kinematik - 3. JG laut Lehrplan - sinnvoll. - Anwendung der impliziten Ableitung. Bei Verwendung in Jahrgang 2 ist dieser Teil zu streichen !!)***
Berechne unter der Annahme, dass die Schraube pro Sekunde den Abstand x um 2 mm verringert, die Hebegeschwindigkeit des Autos bei verschiedenen Längen der Schraube x. Stelle die Hebegeschwindigkeit über der Schraubenlänge x in einem Diagramm dar.

Teil B: Mechanik

1. Triff eine plausible Annahme für die Last G. Begründe diese Annahme!
2. Teile die Last (Gewichtskraft G) in die Richtungen der Stäbe a und x auf. Stelle die Aufteilung der Kräfte für den Fall $\alpha = 50°$ durch ein Kräftedreieck/parallelogramm dar.
3. Berechne die Kräfte in Richtung der Stäbe a und x (bei verschiedenen Stellungen des Waagenhebers im Bereich von $\alpha = 10° .. 60°$ mit $\Delta\alpha = 10°$). Gib die Ergebnisse der Berechnung in einer Tabelle an.
4. Erstelle aus der Tabelle eine Graphik in der $\vec{F}_a$ sowie $\vec{F}_x$ auf der y-Achse und α auf der x-Achse aufgetragen werden..
5. Interpretiere die Graphik und/oder die Tabelle hinsichtlich der Belastung der Schraube x und der Schwinge a.

Teil C: Festigkeitslehre (optional in Kombination mit Mechanik)

Bestimme unter Verwendung der geschätzten Masse G das Gewinde der Wagenheberspindel. Die Sicherheit v_F gegen Fließen muss mindestens 5 betragen. Um den angehobenen Wagen sicher in Position halten zu können muss das Gewinde selbsthemmend sein.

Die Querschnitte des Stehers (Strecke b-c) und der Schwinge (Strecke a) sind zu entwerfen und zu dimensionieren. Die Sicherheit v_{FQ} gegen Fließen muss mindestens 5 betragen. Für derartige Blechkonstruktionen eignen sich kalt gerollte Blechprofile (keine Walzprofile). Die Profile können für die Dimensionierung näherungsweise als U-Profile angenommen werden.

Hinweis: Schlage für die Spindel und für die Blechteile (Steher und Schwinge) ein geeignetes Material vor und begründe die Antwort.

Teil C ist fakultativ. Es ist unbedingt eine Absprache/Adaptierung mit dem Fach Mechanik erforderlich!
Weiters sind keine Lösungen vorhanden!

Teil D: Präsentation/Vorstellen/Nachbesprechung der Ergebnisse (ev. auf Flipchart)

Dieser Teil bietet die Möglichkeit die Ergebnisse in geeigneter Art zu reflektieren und eventuell zu vergleichen.

Die folgenden Seiten enthalten die Lösungen zu den Aufgabensstellungen. Bei elektronischer Ausgabe der Angabe sind die nachfolgenden Seiten zu löschen!

Lösungen zu Teil A

$kN := 1000N$ Definition der Einheit Kilonewton (kN)

-----------------Teil A Frage 1---

Das Dreieck a,b,y (siehe obige Skizze) kann durch h_y in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt werden und y als Summe zweier Teilstrecken bestimmt werden. Der Winkel β wird durch die Schenkel a und b gebildet und mit Cosinussatz berechnet (Lösung eindeutig!).

$$y(\alpha) := b \cdot \cos(\alpha) + \sqrt{a^2 - (b \cdot \sin(\alpha))^2}$$

$$\beta(\alpha) := \mathrm{acos}\left(\frac{b^2 + a^2 - y(\alpha)^2}{2 \cdot b \cdot a}\right)$$

Das Dreieck a,c x kann (mit dem Außenwinkel β) zur Berechnung von x verwendet werden. (Cosinussatz)

$$x(\alpha) := \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\pi - \beta(\alpha))}$$

Einschub: Für die Berechnung der kinematischen Größen ist ein direkter Zusammenhang zwischen x und y sinnvoll. Dies kann durch Elimination des Winkels β erreicht werden.
(Einsetzen von $\cos(\beta)$ in x = ... unter Verwendung von $\cos(\pi - \beta) = -\cos(\beta)$ und Umformen nach y)
Anmerkung: Durch den neuen Befehl "explizit" können diese symbolischen Berechnungen durchgeführt werden obwohl die verwendeten Größen bereits definiert sind!)

$$x^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\pi - \beta) = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$x^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \;\left|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, \cos(\beta) = \dfrac{b^2 + a^2 - y^2}{2 \cdot b \cdot a} \\ \text{explizit} \end{array}\right. \rightarrow x^2 = \frac{a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + b \cdot c^2 - c}{b}$$

$$x^2 = \frac{a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + b \cdot c^2 - c \cdot y^2}{b} \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, y \\ \text{explizit} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} \dfrac{\sqrt{c \cdot \left(a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + b \cdot c^2 - b \cdot x^2\right)}}{c} \\ -\dfrac{\sqrt{c \cdot \left(a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + b \cdot c^2 - b \cdot x^2\right)}}{c} \end{array}\right]$$

$$yy(x) := \frac{\sqrt{c \cdot \left(a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + b \cdot c^2 - x^2 \cdot b\right)}}{c}$$

Zusammenhang zwischen der Schraubenlänge x und und der Höhe y

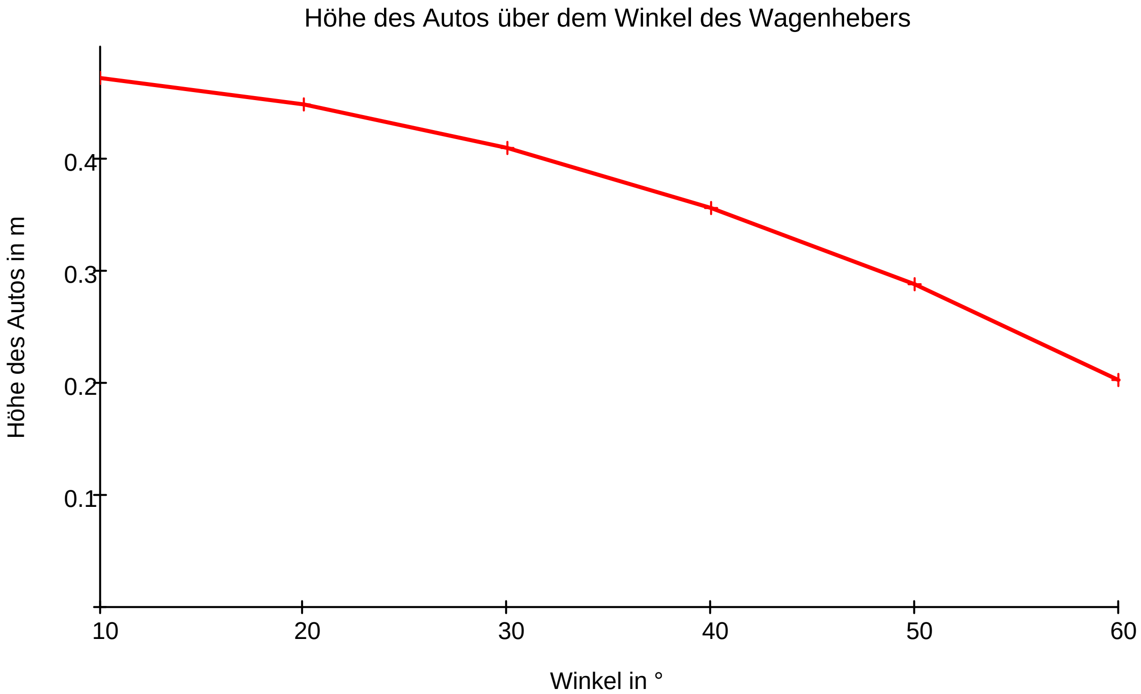
Definition von Laufvariablen für Winkel und Schraubenlänge x zur graphischen Darstellung:

$\alpha := 10\text{Grad}, 20\text{Grad} .. 60\text{Grad}$ $\qquad$ $xx := 0.05 \cdot m, 0.06 \cdot m .. 0.35 \cdot m$

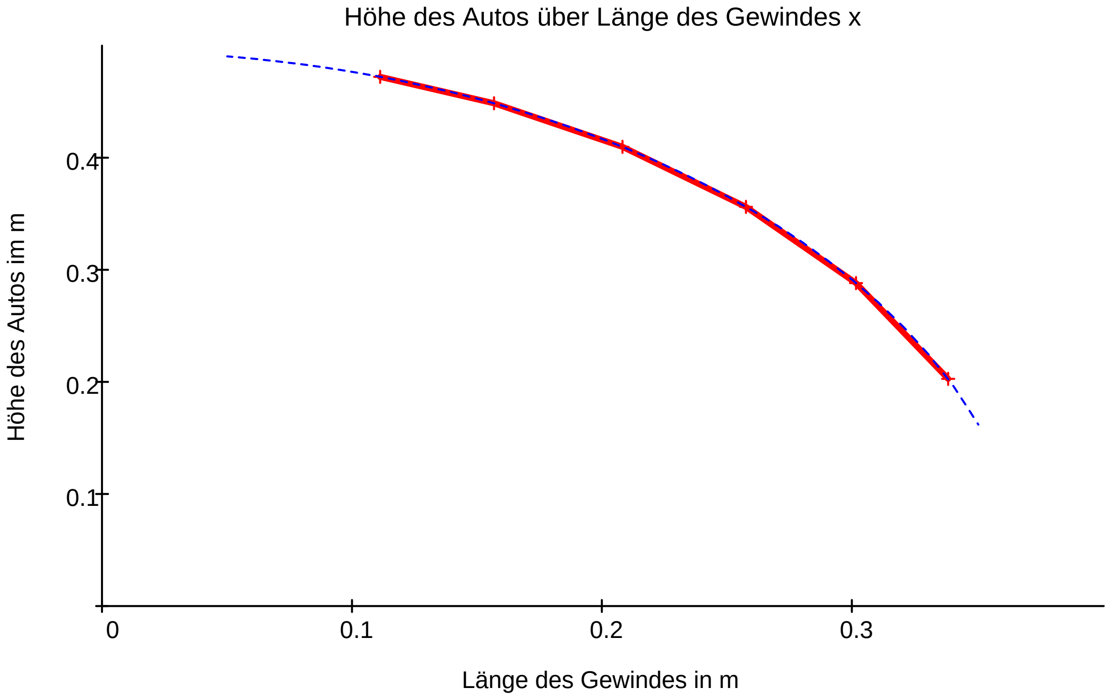
Ausgabe der geforderten Tabellenwerte:

$\frac{\alpha}{\text{Grad}} =$	$x(\alpha) =$ (m)	$y(\alpha) =$ (m)	$\beta(\alpha) =$ (· Grad)
10	0.111	0.472	159.12
20	0.157	0.448	138.176
30	0.208	0.41	117.079
40	0.257	0.356	95.679
50	0.301	0.288	73.627
60	0.338	0.203	49.724

-----------------Teil A Frage 2---



-----------------Teil A Frage 3---



Anmerkung: blau punktiert ist zusätzlich der direkte Zusammenhang zwischen x und y eingezeichnet!

-----------------Teil A Frage 4---

Aus der Graphik ist zu erkennen, dass bei großer Schraubenlänge x (rechte Seite des Diagramms) das KFZ schneller gehoben wird als bei kleiner Schraubenlänge x (Linke Seite des Diagramms).

-----------------Teil A Frage 5---

Änderung der Höhe Δy in Anhängigkeit von der Änderung der Schraubenlänge:

$$k(\alpha) := \frac{y(\alpha + 10\text{Grad}) - y(\alpha)}{x(\alpha + 10\text{Grad}) - x(\alpha)}$$

$k(10\text{Grad}) = -0.519$

$k(30\text{Grad}) = -1.084$

$k(50\text{Grad}) = -2.325$

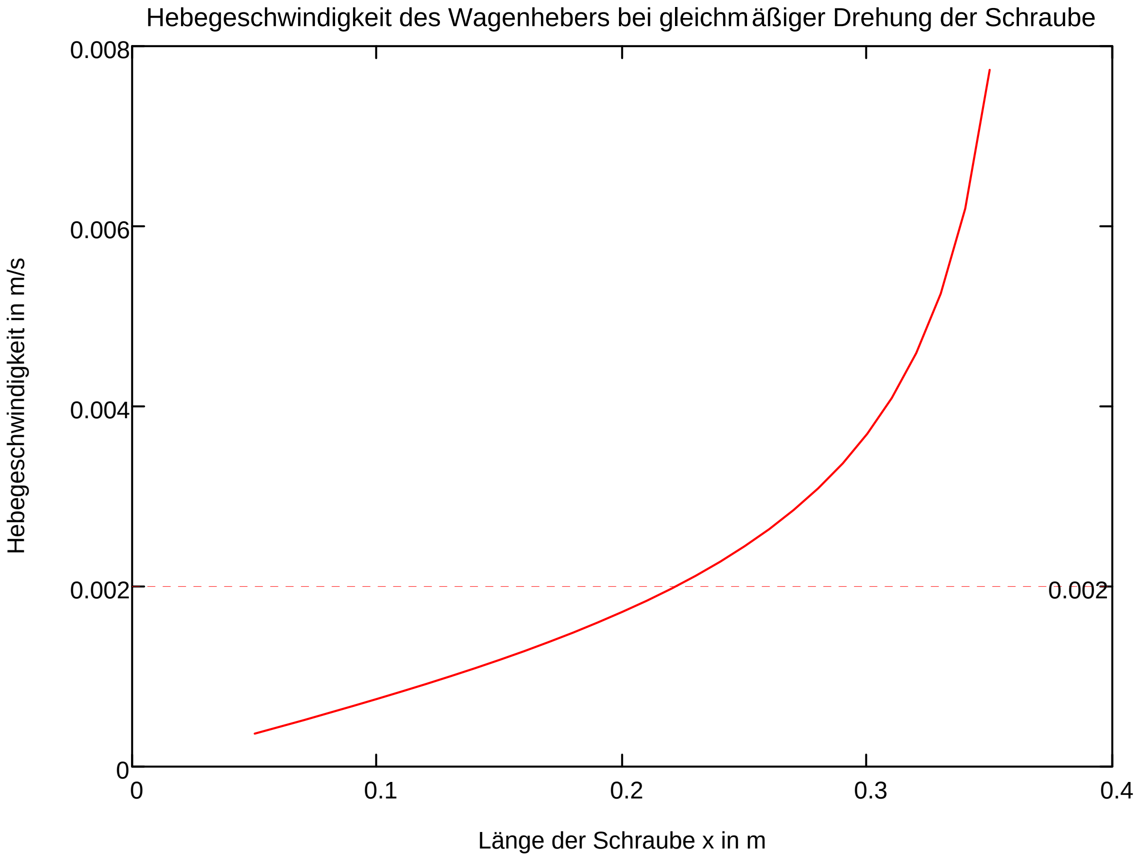
Der Faktor k ist ein "Übersetzungsfaktor" der Geschwindigkeit: Die mittlere Hebegeschwindigkeit ist um das k fache größer als die Geschwindigkeit der Schraube.
Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die ein Größe (Schraubenlänge x) abnimmt und die andere (Höhe y) steigt.

-----------------Teil A Frage 5---

Berechnung der Geschwindigkeit durch Differentialrechnung:

Anmerkung: die Ableitung nach x ist implizit, da x eigentlich x(t) ist und daher muss noch die innere Ableitung $\frac{dx}{dt} = -2\frac{mm}{s}$ berücksichtigt werden.

$$yv(x) := \frac{d}{dx}yy(x)\cdot -2\frac{mm}{s} \qquad yv(0.1m) = 7.496\times 10^{-4}\frac{m}{s}$$



Die waagrechte strichlierte Linie stellt die Geschwindigkeit der Schraube dar. Am Anfang (im Diagramm von rechts nach links) ist die Hebegeschwindigkeit deutlich höher, am Ende geringer als die Geschwindigkeit mit der die Schraube gedreht wird.

Lösungen zu Teil A

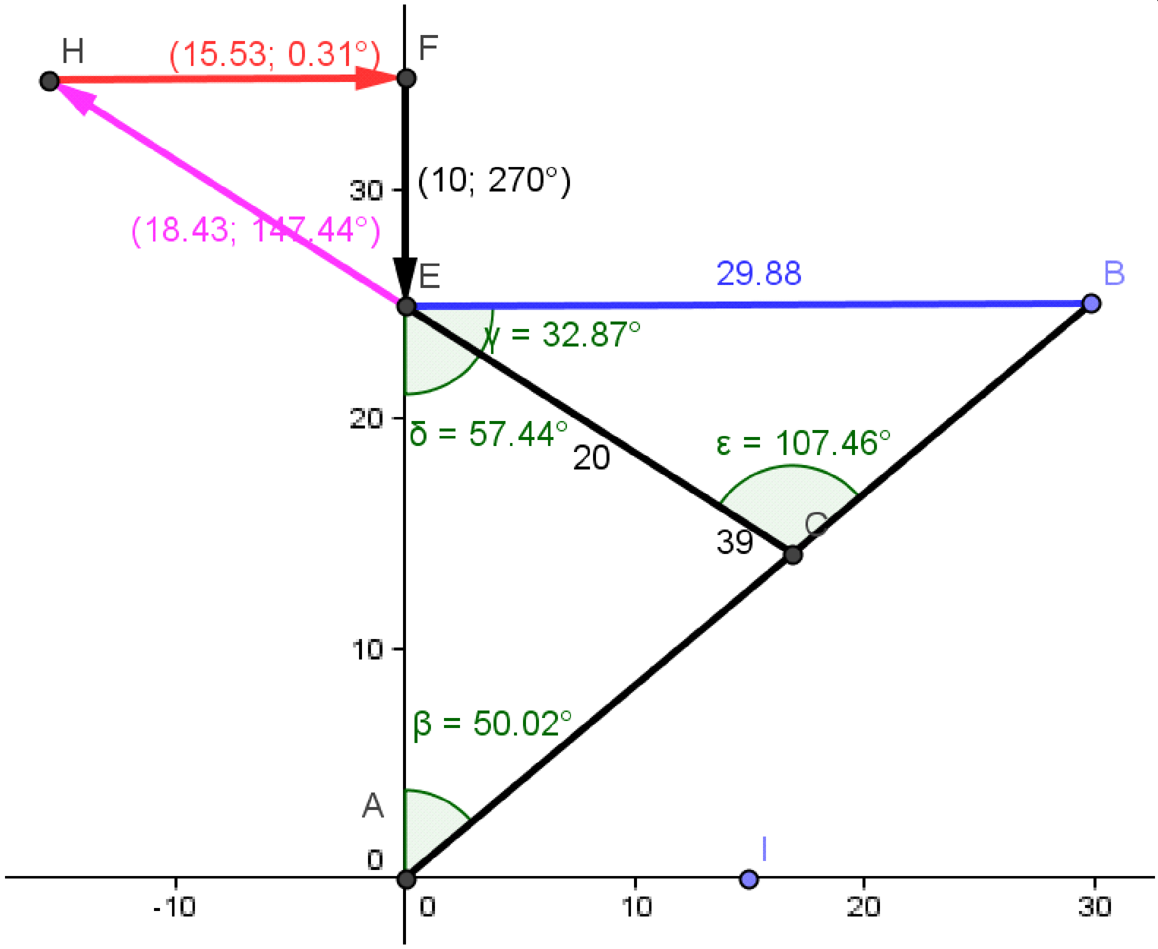
Lösungen für Teil B:

-----------------Teil B Frage 1---

Annahme: $G := 10kN$ ca. halbe Masse eines KFZ (ev. auch mit Beladung)

-----------------Teil B Frage 2---

Die nachfolgende Skizze des Kräftedreiecks (mit den Eckpunkten EFH) für $\beta = 50°$ wurde mit Geogebra erstellt und zeigt den Wagenheber sowie die Gewichtskraft $\vec{F_G} = 10kN$ (schwarz bzw. blau) und die gesuchten Kräfte (rot bzw. magenta).
Die Angabe der Kräfte erfolgt in Geogebra als Vektor (in Polarform: Länge des Vektors und Richtung)



-----------------Teil B Frage 3---

Mit Cosinussatz berechnet man den Winkel γ zwischen a und x im Dreieck a, c und x.

$$\gamma(\alpha) := \operatorname{acos}\left(\frac{a^2 + x(\alpha)^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot x(\alpha)}\right)$$

Kräftedreieck: Die Gewichtskraft G wird in Richtung von x und a aufgeteilt. Lösung mit Sinussatz, wobei der Winkel γ der Gewichtskraft gegenüber liegt (Eckpunkt H).

$$Fa(\alpha) := \frac{G}{\sin(\gamma(\alpha))} \cdot \sin(\alpha + \beta(\alpha) - \gamma(\alpha)) \qquad Fx(\alpha) := \frac{G}{\sin(\gamma(\alpha))} \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta(\alpha))$$

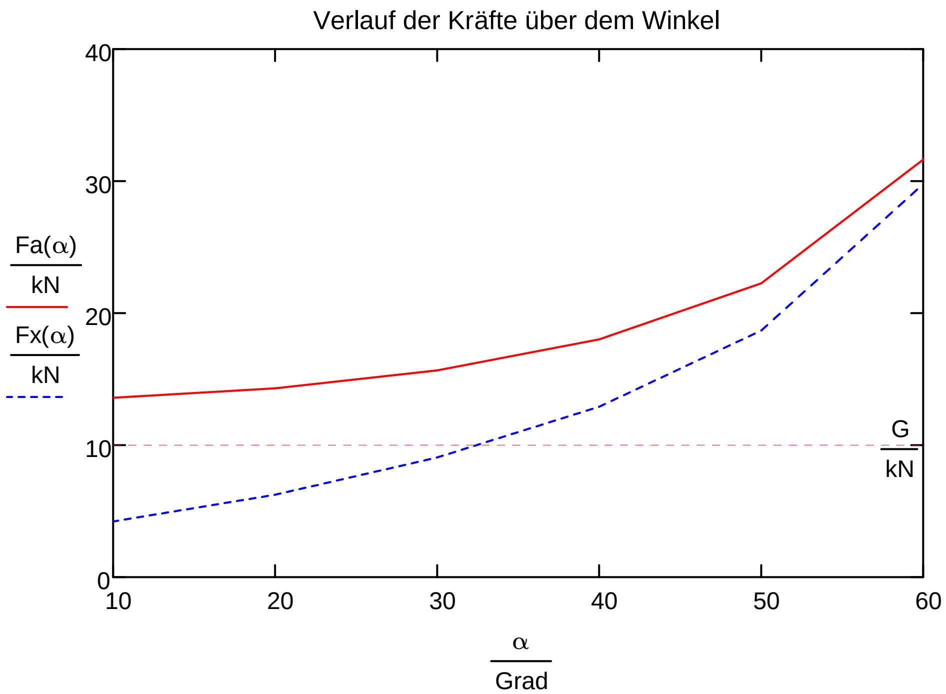
$Fa(\alpha) =$ $\cdot$ kN

13.573
14.288
15.643
17.995
22.242
31.621

$Fx(\alpha) =$ $\cdot$ kN

4.2
6.234
9.06
12.897
18.664
29.774

-----------------Teil B Frage 4--



-----------------Teil B Frage 5--

Am Anfang des Hebevorgangs (in Diagramm rechts) wirken sehr hohe Kräfte, die Kraft in Schwinge a nähert sich der Gewichtskraft. Die Zugkraft in der Schraube nimmt mit abnehmenden Winkel α bzw. mit zunehmender Höhe y ab.

Lösungen für Teil B:

$\cdot\ y^2$