Bernhard Nietrost bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Richtungsfeld einer Differentialgleichung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Richtungsfeld einer Differentialgleichung 1.O, Eulerverfahren

- Kurzzusammenfassung

  Berechnung und Zeichnen des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung 1.Ordnung (mit Anfangswert und ev. Lösung)
  Vergleich mit dem Eulerverfahren

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Richtungsfelder zeichnen auf Papier ist sehr langwierig --> Programm

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

  Häuser: Differentialgleichungen, Schalk 4

Das Richtungsfeld einer Dgl 1.O

Gelbe Felder können verändert werden.

Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x,y)$$

$$f(x,y) := x \cdot y + e^{(x+1)\cdot\frac{x}{2}}$$

Anfangswert

$x_0 := -2$ $y_0 := -1$

Funktion eingeben:
Singularitäten können durch entsprechende Wahl von N_x uns N_y bzw beim Eulerverfahren durch Δx verhindert werden. (Probieren)

Auflösung in x und y Richtung

$N_x := 14$ $i := 0 .. N_x$

N_x Punkte in x - Richtung

$N_y := 12$ $j := 0 .. N_y$

N_y Punkte in y - Richtung

$x_{min} := -2.5$ $x_{max} := 1$

$y_{min} := -2$ $y_{max} := 2$

$$x_i := x_{min} + \frac{i \cdot (x_{max} - x_{min})}{N_x}$$

$$y_j := y_{min} + \frac{j \cdot (y_{max} - y_{min})}{N_y}$$

A ... Steigung y'(x,y)

$$A_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

B ... Normierung

$$B_{i,j} := \sqrt{1 + (A_{i,j})^2}$$

R ... Auflösung

$$R := 20$$

$$k := 0 .. N_x \cdot N_y \cdot R$$

P .... y - Wert der Punkte

Punkte des Richtungsfeldes werden berechnet und dann gezeichnet. (Die Geradenstücke des Richtungsfeldes bestehen aus R Punkten.

$$P := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0 .. N_x \\ \quad \text{for } j \in 0 .. N_y \\ \quad\quad \text{for } l \in 0 .. R \\ \quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} P_n \leftarrow \dfrac{A_{i,j} \cdot (x_{max} - x_{min}) \cdot \left(l - \dfrac{R}{2}\right)}{N_x \cdot 2 \cdot R \cdot B_{i,j}} + y_j \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ P \end{array} \right.$$

Q .... x - Wert der Punkte

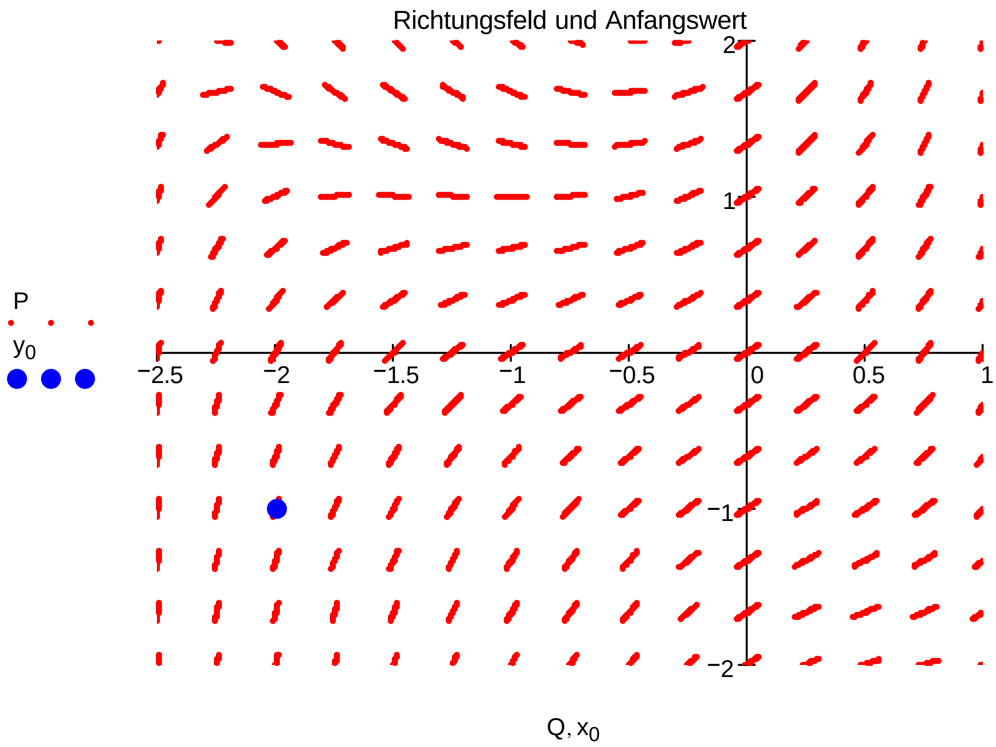
$$Q := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0 .. N_x \\ \quad \text{for } j \in 0 .. N_y \\ \quad\quad \text{for } l \in 0 .. R \\ \quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} Q_n \leftarrow \dfrac{(x_{max} - x_{min}) \cdot \left(l - \dfrac{R}{2}\right)}{N_x \cdot 2 \cdot R \cdot B_{i,j}} + x_i \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ Q \end{array} \right.$$

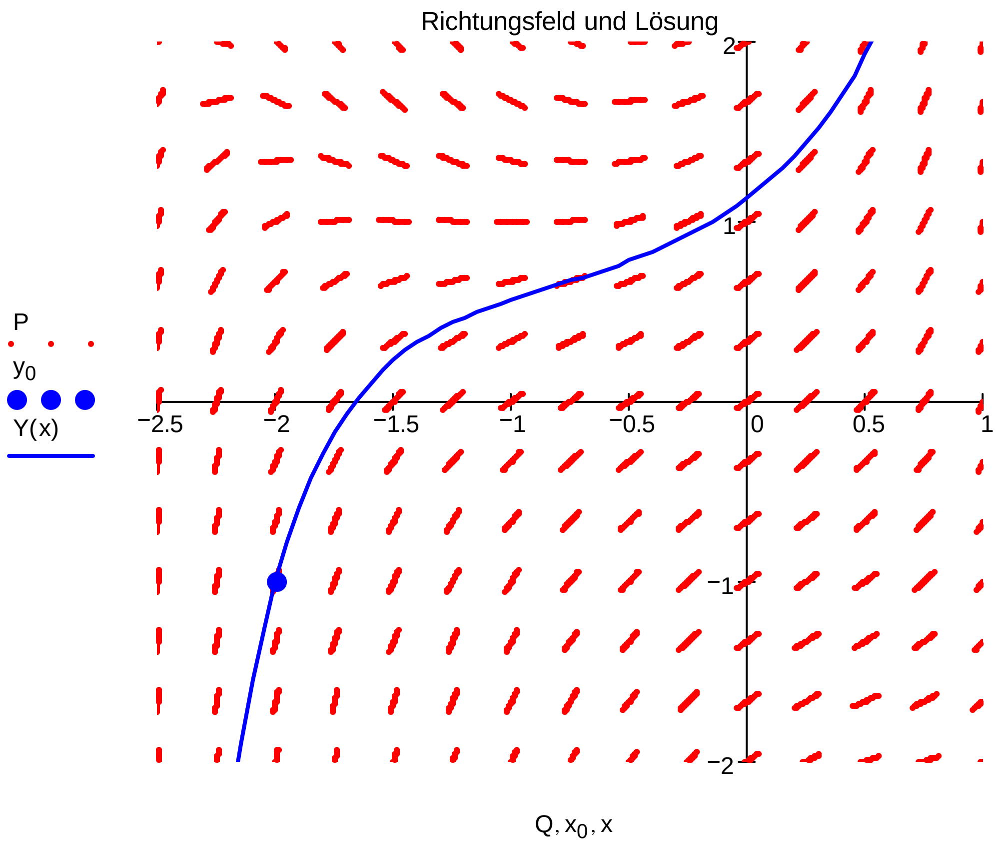
Zeichenbereich des Richtungsfeldes

$$x := x_{min}, x_{min} + \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x \cdot 5} .. x_{max}$$

Exakte Lösung der DGL (Wenn bekannt, sonst 0)

$$Y(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left[2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - \left(\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e} \right) \right]$$


Richtungsfeld und Anfangswert
P
y_0
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
2
1
−1
−2
Q, x_0


Richtungsfeld und Lösung
P
y_0
Y(x)
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
2
1
−1
−2
Q, x_0, x

Vergleich: Richtungsfeld und Eulerverfahren und ev. exakte Lösung

In Zusammenhang mit dem Richtungsfeld sieht man sehr gut, wie das Eulerverfahren funktioniert.

Schritte

$h := 0..9$

Anfangswerte

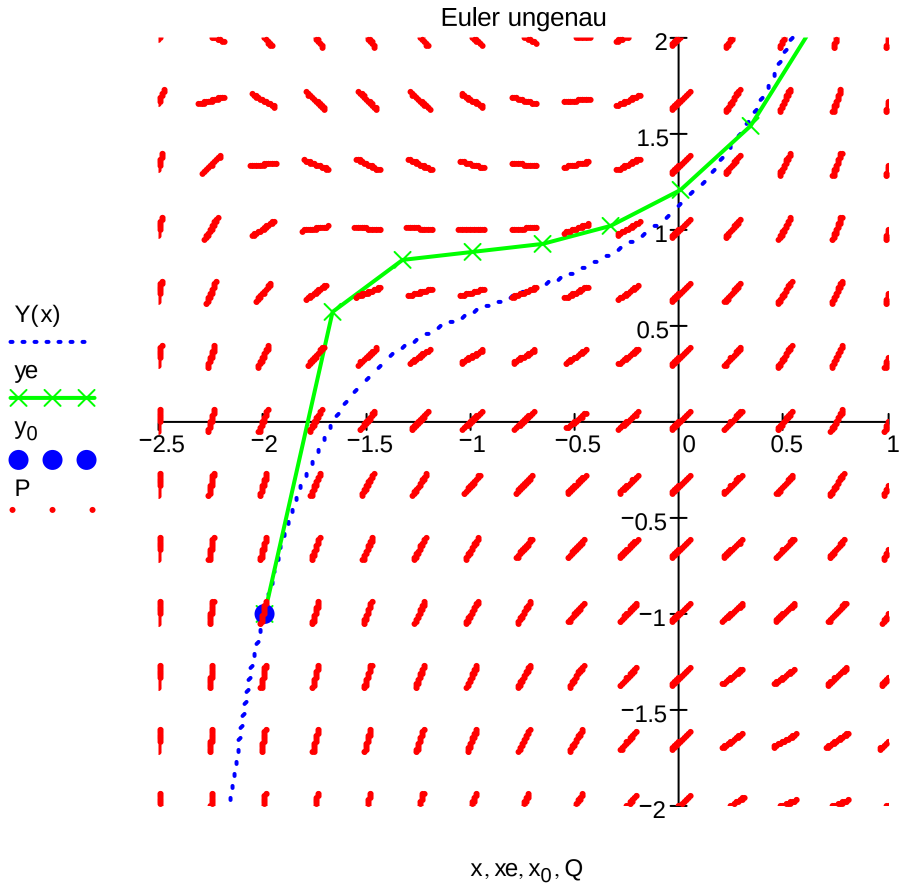
$xe_0 := x_0$ $\quad ye_0 := y_0$

Schrittweite

$\Delta x := \frac{1}{3}$

Eulerverfahren

$xe_h := xe_0 + h \cdot \Delta x$ $\quad ye_{h+1} := ye_h + \Delta x \cdot f(xe_h, ye_h)$



Genauere Variante des Eulerverfahrens

$h := 0..100$ $\qquad xe_0 := x_0$ $\qquad ye_0 := y_0$

$\Delta x := \frac{1}{30}$ $\qquad xe_h := xe_0 + h \cdot \Delta x$ $\qquad ye_{h+1} := ye_h + \Delta x \cdot f(xe_h, ye_h)$