Nietrost Bernhard, bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Kaustik

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Winkelfunktionen, Einheitskreis, Summensätze, Grenzübergänge (LIMES), Parameterdarstellung einer Funktion

- Kurzzusammenfassung

  Die Kaustik kann man leicht beobachten mit Hilfe eines Wasserglases oder eines Rings im Sonnenlicht. Die mathematische Beschreibung dieser Beobachtung benötigt die Anwendung verschiedenster mathematischer Gebiete. (Trigonometrie, Parameter, Grenzwerte, Differentialrechnung)

- Didaktische Überlegungen

  Die Schüler sehen wie eine einfache Beobachtungen mathematisch formuliert wird. Daraus ergibt sich ein praktischer Bezug zum Problem. --> Angewandte Mathematik

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2/3 Jahrgang für alle Abteilungen, durchführbar erst in der 3. Klasse.

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben:

  Internet, Physik in unserer Zeit 29 (1998) S 120 - 122, Teubner: TB der Mathematik

1. Entstehung der Kaustik

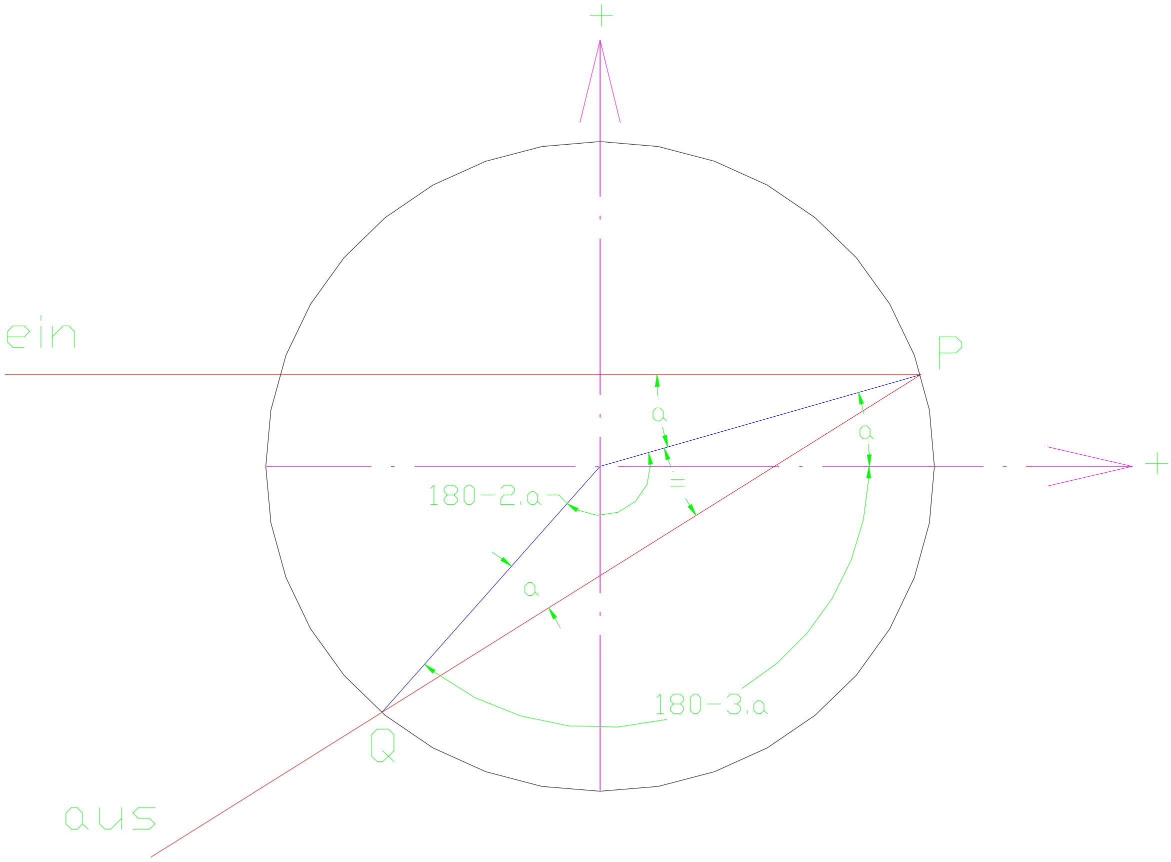
Die Kaustik entsteht wenn parallel einfallende Lichtstrahlen an einem (halb-) kreisförmigen Objekt reflektiert werden. Die Einhüllende der reflektierten Strahlen bildet eine Kaustik (Siehe Bild), die zu den Epizykloiden gehört.

Die Kaustik kann einfach mit einem Wasserglas oder einem Ring erzeugt werden.

Kaustiken haben schon früh das Interesse von Physikern und Mathematikern hervorgerufen. Christian Huygens (1629-1695) befasste sich mit ihnen und Johann Bernoulli (1667 - 1748) untersuchte sie mathematisch ausführlich und in vielen Beispielen [1].

ENCARTA: '**Kaustik** ['Kaus·tik] die; -, kMz.1 (phys., tech.) Hüllfläche benachbarter Strahlen e-s nicht optimal korrigierten optischen Systems, vgl. ? Katakaustik, ? Diakaustik 2 (med.) ? Kauterisation

2. Mathematische Beschreibung der Geometrie



• Reflexionspunkte: Geometrie aus Skizze (r = 1)

(Überlegungen am Einheitskreis bzw. mit Hilfe der Summensätze)

$P_X = \cos(\alpha)$ $\quad Q_X = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)$ ergibt vereinfacht $Q_X = -\cos(3 \cdot \alpha)$

$P_Y = \sin(\alpha)$ $\quad Q_Y = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)$ ergibt vereinfacht $Q_Y = -\sin(3 \cdot \alpha)$

Graphische Darstellung für $N := 10$ einfallende Strahlen (in der oberen Hälfte)
(Gleichmäßige Verteilung der Einfallswinkel)

$i := 1 .. N$ $\qquad \alpha_i := \frac{\pi}{2 \cdot (N + 1)} \cdot i$

Berechnung von P und Q der Strahlen:

$P_{i,0} := \cos(\alpha_i)$ $\quad P_{i,1} := \sin(\alpha_i)$

$Q_{i,0} := -\cos(3\alpha_i)$ $\quad Q_{i,1} := -\sin(3\cdot\alpha_i)$

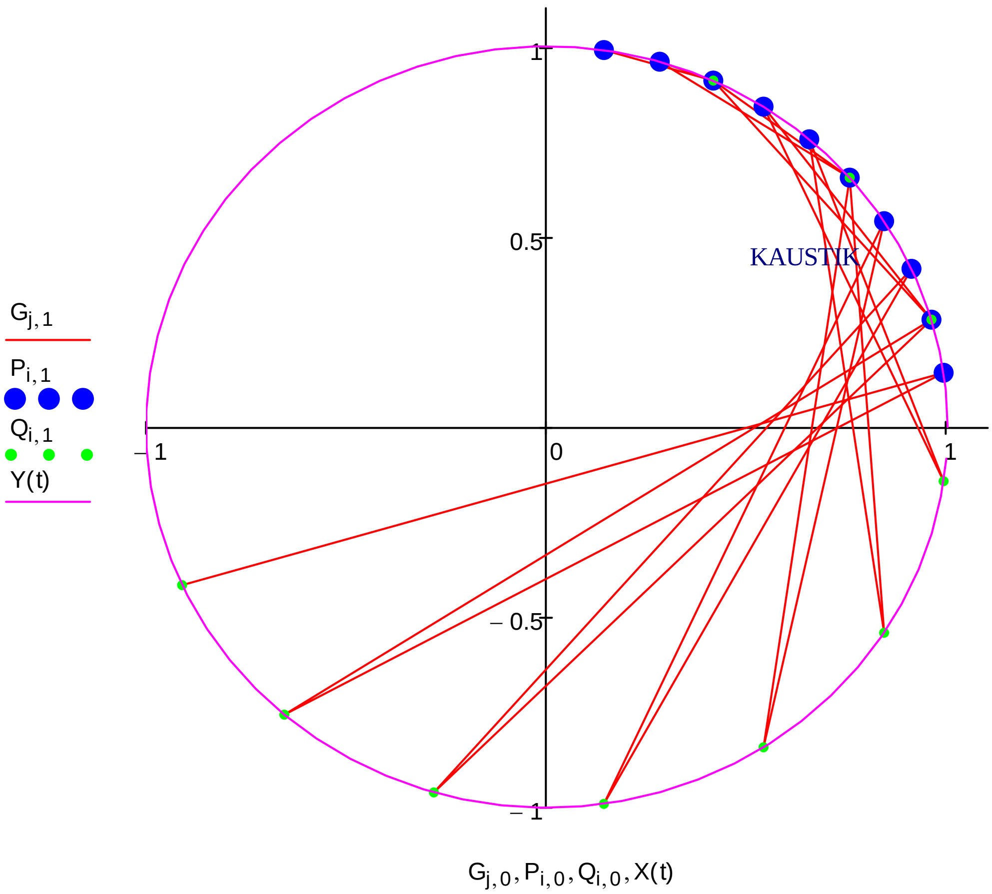
Kreis in Parameterdarstellung

$t := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$ $\quad X(t) := \cos(t)$ $\quad Y(t) := \sin(t)$

Graphikmatrix (zum Zeichnen der Verbindungslinien PQ)

$n := 0..1$ $\quad j := 0..2N-1$ $\quad G_{2\cdot i-1,n} := P_{i,n}$ $\quad G_{2\cdot i-2,n} := Q_{i,n}$

2.1 Kaustik als Hüllkurve: Darstellung von P, Q und der Verbindung PQ



Die hier eingezeichneten $N = 10$ reflekektierten Strahlen erzeugen ungefähr die Grundform der Kaustik.

3. Berechnung der Kaustik in Parameterform

Entsprechend der letzten Graphik ergeben sich zwischen benachbarten Geraden y_1 und y_2 durch PO Schnittpunkte, welche (ungefähr) die Kaustik formen.
Verkleinert man den Abstand zweier benachbarter Punkte immer weiter (math: LIMES --> 0) so erh man die Darstellung der Kaustik in Parameterform.

$$y1 = y2 \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, y1 = k1 \cdot x + d1 \\ \text{ersetzen}, y2 = k2 \cdot x + d2 \end{array} \right. \rightarrow d1 + k1 \cdot x = d2 + k2 \cdot x$$

$$\boxed{k1 \cdot x + d1 = k2 \cdot x + d2 \ \text{auflösen}, x \ \rightarrow -\frac{d1 - d2}{k1 - k2}}$$

$$y1 = k1 \cdot x + d1 \ \text{ersetzen}, x = \frac{-(d1 - d2)}{(k1 - k2)} \ \rightarrow y1 = -\frac{d1 \cdot k2 - d2 \cdot k1}{k1 - k2}$$

$$\boxed{y1 = k1 \cdot \frac{(-d1 + d2)}{(k1 - k2)} + d1 \ \text{auflösen}, y1 \ \rightarrow d1 - \frac{k1 \cdot (d1 - d2)}{k1 - k2}}$$

Der gesuchte Schnittpunkt von y_1 und y_2 ist:

$$x_S = \frac{-(d1 - d2)}{(k1 - k2)} \qquad y_S = \frac{(k1 \cdot d2 - d1 \cdot k2)}{(k1 - k2)}$$

Schnittpunkte

Steigung $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P_y - Q_y}{P_x - Q_x}$ Achsenabschnitt $d = P_y - k \cdot P_x$

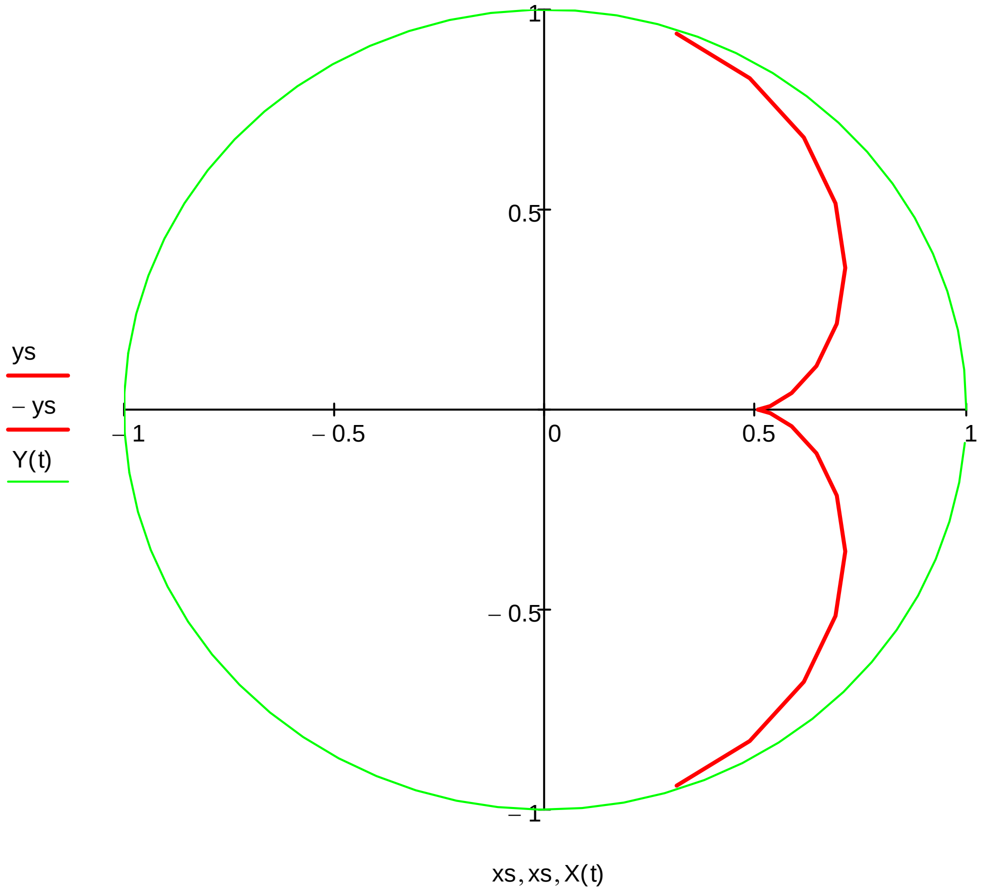
Berechnung der k und d Werte:

$$k_i := \frac{P_{i,1} - Q_{i,1}}{P_{i,0} - Q_{i,0}} \qquad d_i := P_{i,1} - k_i \cdot P_{i,0}$$

Berechnung der Schnittpunkte:

$$j := 0 .. N - 1 \qquad xs_j := \frac{-\left(d_j - d_{j+1}\right)}{\left(k_j - k_{j+1}\right)} \qquad ys_j := \frac{\left(k_j \cdot d_{j+1} - d_j \cdot k_{j+1}\right)}{\left(k_j - k_{j+1}\right)}$$

3.1 KAUSTIK: Darstellung der Schnittpunkte



Anmerkung: Die hier berechneten Schnittpunkte sind noch keine exakten Punkte der Kurve. Für N = sehr groß wird diese immer besser angenähert. Für eine exakte Berechnung der Kurve sind noch weitere Schritte notwendig.

- **Beschreibung einer Geraden y = kx + d durch Winkel**

$\alpha := \alpha$

$$k = \frac{P_y - Q_y}{P_x - Q_x} \qquad k = \frac{\sin(\alpha) - (-\sin(3\alpha))}{\cos(\alpha) - (-\cos(3\alpha))}$$

Vereinfachen mit Summensätzen oben und unten (Man verwende z.B: $\sin(3\cdot\alpha) = \sin(2\cdot\alpha+\alpha) = \sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha)\cdot\sin(\alpha)$usw. ergibt den folgenden Ausdruck: $k = \frac{2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)}{\left(-1+2\cdot\cos(\alpha)^2\right)}$, der einen weiteren Schritt zuläßt: $k = \frac{\sin(2\cdot\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)}$.

Man erhält somit die sehr einfache Endformel: $\boxed{k = \tan(2\cdot\alpha)}$

Der Achsenabstand d ergibt sich aus $y = k \cdot x + d$ mit obigem k und beispielsweise dem Punkt P zu: $\sin(\alpha) = \tan(2 \cdot \alpha) \cdot \cos(\alpha) + d$.

Der Ausdruck für d läßt sich noch weiter vereinfachen zu: $d = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)}$. Die Gerade ist dann: $\boxed{y = \tan(2 \cdot \alpha) \cdot x - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)}}$

Nebenrechnungen zu obigen Ausdrücken

$$\sin(\alpha) + \sin(2 \cdot \alpha + \alpha) = \sin(\alpha) + \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\sin(\alpha) + 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^3$$

$$\sin(\alpha) \cdot \left(1 + 3 \cdot \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\right) = 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2$$

$$\cos(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha + \alpha) = \cos(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha)^3 - \sin(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) \cdot \left(1 + \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 - 2 \cdot \sin(\alpha)^2\right) = \cos(\alpha) \cdot \left(2 - 4 \cdot \sin(\alpha)^2\right)$$

$$\frac{4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha) \cdot \left(2 - 4 \cdot \sin(\alpha)^2\right)} = \frac{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{1 - 2 \cdot \sin(\alpha)^2}$$

- **Der Schnittpunkt zweier benachbarter Geraden mit leicht (delta δ) verschiedenen Winkeln.**

$$\frac{\sin(2\cdot\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)}\cdot x-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)}=\frac{\sin[2\cdot(\alpha+\delta)]}{\cos[2\cdot(\alpha+\delta)]}\cdot x-\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos[2\cdot(\alpha+\delta)]}$$

$$x=\frac{-(-\sin(\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)+\sin(\alpha+\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}{(\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)-\sin(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}$$

Ergebnis aus Platzgründen in der nächste Zeile

Um beliebige Schnittpunkte zu berechnen muss man den Grenzübergang delta δ gegen 0 durchführen. (math: Limes)

$$x=\lim_{\delta\to 0}\frac{-(-\sin(\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)+\sin(\alpha+\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}{(\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)-\sin(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{-(-\sin(\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)+\sin(\alpha+\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}{(\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)-\sin(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}$$

$$x=-\cos(\alpha)^3+\frac{3}{2}\cdot\cos(\alpha)$$

Ergebnis aus Platzgründen in der nächste Zeile

Anmerkung: Als Übung könnte die Bildung des LIMES auch von Hand durchgeführt werde

Verwendung der Regel von l'Hospital, da sich beim Einsetzen von $\delta = 0$ die nicht definierte Division $\frac{0}{0}$ ergibt. Einmaliges Differenzieren oben und unten ergibt:

$$x=\lim_{\delta\to 0}\frac{(-2\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(2\cdot\alpha+2\cdot\delta)-\cos(\alpha+\delta)\cdot\cos(2\cdot\alpha))}{-2\cdot\cos(2\cdot\delta)}$$

Anmerkung: Der Nenner läßt sich mit Summensätzen leicht vereinfachen.

Setzt man $\delta = 0$ so ergibt sich der Limes mit:

$$x = \frac{-2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(2 \cdot \alpha) - \cos(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot \alpha)}{-2}$$

Mit Summensätzen weiter vereinfacht ergibt sich die x-Komponente gleich wie mit MATHCAD in Parameterdarstellung.

$$\boxed{x_K(\alpha) := \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(3 - 2 \cdot \cos(\alpha)^2\right)}$$

Durch Einsetzen wird y berechnet:

$$y = \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)} \cdot x - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)}$$

$$y = \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)} \cdot \left(-\cos(\alpha)^3 + \frac{3}{2} \cdot \cos(\alpha)\right) - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(2 \cdot \alpha)}$$

Ergebnis aus Platzgründen in der nächste Zeile

$$y_K = -\sin(\alpha) \cdot \frac{2 \cdot \cos(\alpha)^4 - 3 \cdot \cos(\alpha)^2 + 1}{\cos(2 \cdot \alpha)}$$

Ergebnis aus Platzgründen in der nächste Zeile

- ## Unstetigkeit in der y-Komponente

Es gibt eine Unstetigkeitsstelle in der y - Komponente der Kaustik.

Für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ergeben sowohl Zähler als auch Nenner 0.

Dieser muss durch Bildung des LIMES in Mathcad berechnet werden.

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(-3 \cdot \cos(\alpha)^2 + 2 \cdot \cos(\alpha)^4 + 1\right)}{\cos(2 \cdot \alpha)} \to -\frac{1}{2}$$

Bei händischer Bestimmung kommt wiederum die Regel von l'Hospital zur Anwendung.

3.2 Kaustik in Parameterdarstellung

$$x_K(\alpha) := \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(3 - 2 \cdot \cos(\alpha)^2\right)$$

$$y_K(\alpha) := \begin{cases} \dfrac{-1}{2} & \text{if } \alpha = \dfrac{\pi}{4} \\ -\sin(\alpha) \cdot \dfrac{\left(-3 \cdot \cos(\alpha)^2 + 2 \cdot \cos(\alpha)^4 + 1\right)}{\cos(2 \cdot \alpha)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Laufvariable $\alpha := 0.01, 0.02 .. 1.5$ $t := 0, 0.01 .. \frac{\pi}{2}$

Exakte Grenzkurve der Reflexion (rot) und obige Schnittpunkte: