Nietrost Bernhard bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Bewegung eines Garagentors

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Hüllkurven, Tangenten, Parameterdarstellung, Grenzübergang (LIMES)

- Kurzzusammenfassung

  Einfaches Problem mit Praxisbezug

- Zeitaufwand:

  Praxisbezug, leicht verständliche Aufgabenstellung, [Doppelstunde]

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3/4 Jahrgang, alle Abteilungen, besonders Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

- Literaturangaben:

  Taschenbuch der Mathematik (Bartsch)

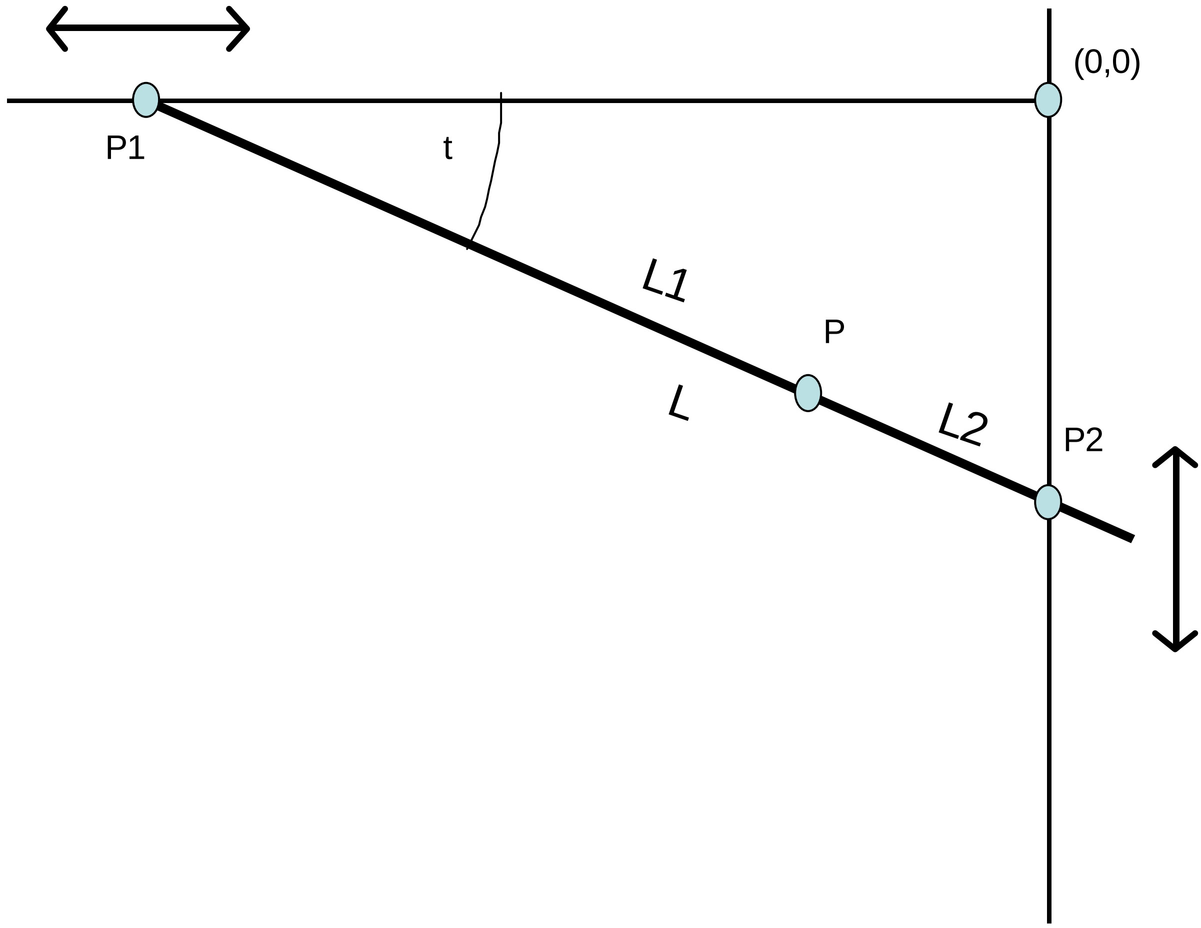
Garagentor

Bewegung: Anfangs (P1)- und Endpunkt (P2) des Garagentores beschreiben jeweils eine Translation (waagrecht bzw Senkrecht). Im Folgenden wird die Bewegung der Punkte P1 und P2, die sich in den Führungen geradlinig bewegen, und eines beliebigen Punktes P am Garagentor mathematisch beschrieben.

Der Nullpunkt des Koordinatensystems ist rechts oben.

Ziel ist die Bestimmung der Hüllkurve, dh der Platzbedarf des Tores beim Öffnen und Schließen.

Man betrachtet das rechtwinkelige Dreieck mit dem Winkel t, dessen Ecken P1, P2 und der Nullpunkt des Koordinatensystems sind.



Arbeitsaufgabe für Schüler zu obiger Skizze

1. Beschreibe die Koordinaten des Punktes P1 bzw P2 in Abhängigkeit (Funktion) vom Winkel t (Welche Werte kann t annehmen ?)
   ACHTUNG: Koordinatensystem beachten (negatives Vorzeichen)
2. Berechne die Koordinaten des Punktes P für t = 0,15,30,45,60,75,90°
   Beschreibe allgemein die Koordinaten des Punktes P in Abhängigkeit von t

Zahlenwerte: $L := 3$ und $L_1 := 2$, daraus ergibt sich $L_2 := L - L_1$ dh. $L_2 = 1$

Lösung 1: $x_{P1}(t) := -L \cdot \cos(t)$ (Negatives Vorzeichen wegen Koordinatensystem) $0 < t < 90°$

$y_{P2}(t) := -L \cdot \sin(t)$

Lösung 2: $x_P(t) := -L_2 \cdot \cos(t)$ $y_P(t) := -L_1 \cdot \sin(t)$

Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen der Winkel in die Formeln

1. Animation des Garagentors

Das Garagentor soll durch eine lineare Funktion durch P1 und P2 beschrieben werden, auf der auch der Punkt P liegt. Diese Anordnung wird dann animiert.
Die Animation erfolgt durch die Variable FRAME, die nur ganze Zahlen annehmen kann und in diesem Fall von 0 - 89° läuft. (90 ° gibt Division / 0)

Gleichung der Geraden

Skizze siehe oben

Eine Gerade der Form y = k.x + d soll aufgestellt werden.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad k(t) := \frac{y_{P2}(t) - 0}{0 - x_{P1}(t)} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

$$k(t) := -\tan(t)$$

MCD kann diesen Ausdruck nicht vereinfachen.

$$X := -3, -2 .. 0$$

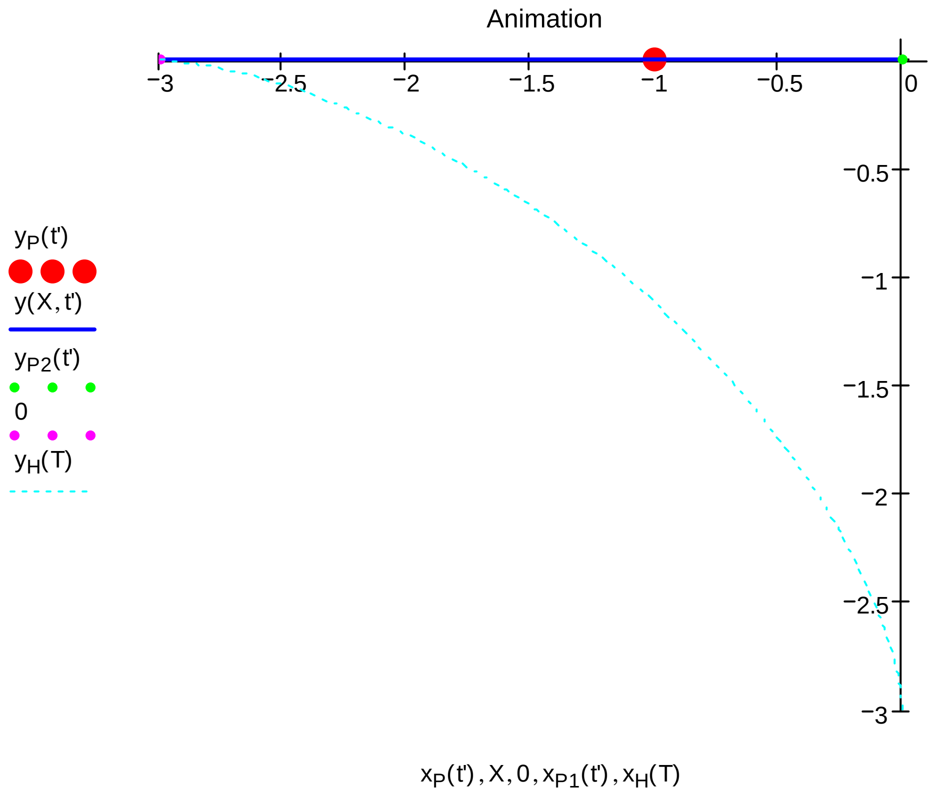
d entspricht der y Koordinate von P2: d = -L . sin(t)

Somit ergibt sich für die lineare Funktion durch P1 und P2 $\quad y(x,t) := -\tan(t) \cdot x - L \cdot \sin(t)$

$$t' := FRAME \cdot \frac{\pi}{180}$$

FRAME von 1 - 89, Umrechnung auf Rad, t' wird verwendet zum Zeichnen.
(Hyperlink auf Diagramm: Doppelklick sollte Film ablaufen lassen)

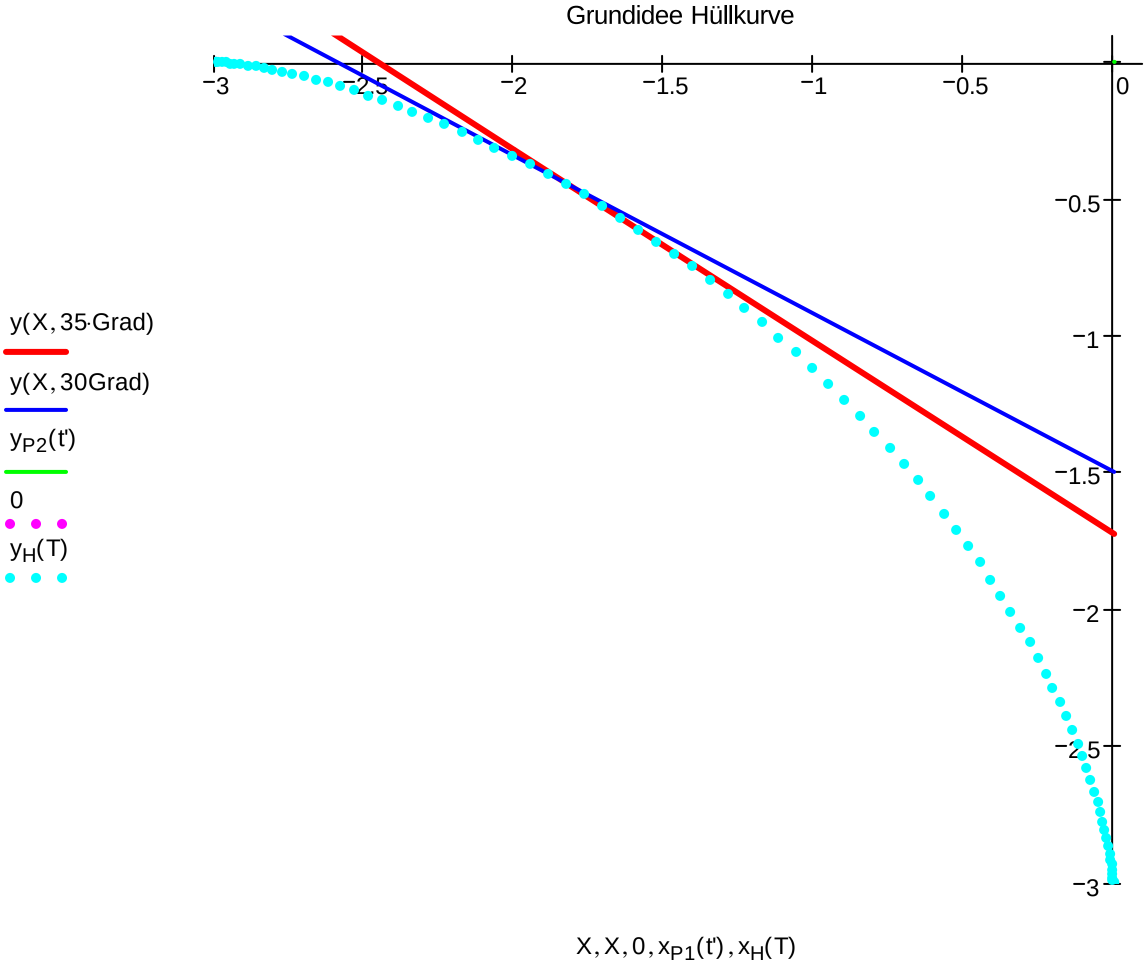
$t' = 0$



2. Berechnung der Hüllkurve

Grundidee:

1. Aus der obigen Animation erkennt man, dass das Garagentor (lineare Funktion) immer eine Tangente an die dünn gezeichnete Hüllkurve ist.
2. Zwei knapp nebeneinanderliegende Gerade schneiden sich und somit ist auch deren Schnittpunkt "fast" auf der Hüllkurve.
3. Durch die Bildung des Limes erhält man die mathemaische Beschreibung der Einhüllenden.



Schnittpunkt nebeneinanderliegender Geraden

$y = -\tan(t)\cdot x - L\cdot\sin(t)$ und $y_\Delta = -\tan(t+\Delta)\cdot x - L\cdot\sin(t+\Delta)$ werden gleichgesetzt

$$-\tan(t)\cdot x - L\cdot\sin(t) = -\tan(t+\Delta)\cdot x - L\cdot\sin(t+\Delta) \text{ auflösen}, x \ \rightarrow -L\cdot\frac{\sin(t)-\sin(t+\Delta)}{\tan(t)-\tan(t+\Delta)}$$

$$x_S = -L\cdot\frac{\sin(t+\Delta)-\sin(t)}{\tan(t+\Delta)-\tan(t)}$$

x_S ergibt einen Punkt der Hüllkurve, wenn Δ sehr klein wird ($\lim_{\Delta \to 0} \Delta$)

Die Berechnung des Limes erfolgt mit der Regel von l'Hospital oder mit MCD.

$$x_S = -L \cdot \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin(t+\Delta) - \sin(t)}{\tan(t+\Delta) - \tan(t)} \cdot \frac{\Delta}{\Delta}$$

$$x_S(t) := \lim_{\Delta \to 0} \left(-L \cdot \frac{\sin(t) - \sin(t+\Delta)}{\tan(t) - \tan(t+\Delta)} \right) \text{ vereinfachen } \rightarrow -\cos(t)^3 \cdot L$$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert die y Komponente.

$$y_S(t) := y\left(x_S(t), t\right) \rightarrow \tan(t) \cdot \cos(t)^3 \cdot L - 3 \cdot \sin(t)$$

MCD Fehler, da L einmal als Variable, das andere Mal als Zahl (3) eingesetzt wird.

$$\tan(t) \cdot \cos(t)^3 \cdot L - L \cdot \sin(t) \text{ vereinfachen } \rightarrow \sin(t) \cdot \cos(t)^2 \cdot L - L \cdot \sin(t)$$

Vereinfachen liefert leider auch nicht die gewünschte Lösung, also Vereinfachung von Hand.

$$y_S = L \cdot \sin(t) \cdot \left(\cos(t)^2 - 1\right) = L \cdot \sin(t) \cdot \left(-\sin(t)^2\right) = -L \cdot \sin(t)^3$$

Parameterdarstellung der Hüllkurve

$$x_H = -L \cdot \cos(t)^3 \qquad y_H = -L \cdot \sin(t)^3$$

Diese Parameterdarstellung wurde bereits zum Zeichnen der Hüllkurve in der ANIMATION verwendet um die Eigenschaft der Hüllkurve zu zeigen.

Diese Kurve heißt auch ASTROIDE und ist ein Sonderfall einer HYPOZYKLOIDE (R/r = 4).

Parameterdarstellung der Hüllkurve

$x_H(T) := -L \cdot \cos(T)^3$ $\qquad$ $y_H(T) := -\sin(T)^3 \cdot L$

$T := 0Grad, 1Grad .. 90Grad$

$L := L$