Name und e-Mail-Adresse

Nietrost Bernhard,
bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Aufstellen eines Fahnenmastes

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Vektorrechnung in 3D: Skalarprodukt, Vektorprodukt, Aufteilen eines Vektors, ...

- Kurzzusammenfassung

  Anwendung der Vektorrechnung in 3D auf ein praktisches Problem der Mechanik

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  mögliches Projekt in Kleingruppen von 3-5 Schülern für zweite Klassen zum Abschluss des Kapitels Vektoren eventuell in Verbindung mit dem Fach Mechanik / [2- 4 UE abhängig vom gewählten Abschluss des Projekts: in der Gruppe erstellte Flipchartbogen in der Klasse anbringen und präsentieren ODER den Rechengang/ Ergebnisse in das Heft schreiben und Rückmeldung/Beurteilung der Arbeit durch Lehrer ....]

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2. Jahrgang, alle Abteilungen - vor allem Maschinenbau, Maschineningenieurwesen, Mechatronik,.....

- Mathcad-Version

  Mathcad 15

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

  Timschl: Ingenieurmathematik 2

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  Interessant vor allem in Verbindung mit einem kleinen Projekt (3-5 Schüler pro Gruppe) zum Abschluss des Kapitels Vektoren in der 2. Klasse.
  Eine Verbindung mit dem Fach Mechanik ist im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts anzusteben. Die entsprechende Fragestellung (5) ist mit dem Mechaniklehrer abzustimmen.
  Vor dem Ausdrucken die offenen Bereiche/Regionen schließen und nochmals die Formatierung überprüfen.
  Durch sinnvolles Verändern der Werte von A,B,C und S können die Angaben für die Gruppen unterschiedlich gestellt werden. Die Ergebnisse werden automatisch angepasst.

  Anstelle der Vektorschreibweise werden Vektoren in MCD FETT geschrieben!
  Die Punkte werden in der Rechnung als Ortsvektoren verwendet aber weiterhin als Punkt geschrieben! zum Beispiel:

  $\vec{F} = \mathbf{F}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{A}$

Festlegung der Angabewerte:

Diese können variiert werden um verschiedene Angaben für einzelne Gruppen zu erhalten. Die Ergebnisse werden automatisch mitgerechnet.

$A := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \quad S := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot m \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot m$

Angabe der Punkte

$\mathbf{AS} := S - A \qquad D := S + \mathbf{AS} \qquad D = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} m$

Berechnung der Spitze

$G := \text{erweitern}(A, D, S, B, S, C)^T$

Matrix G für graphische Darstellung

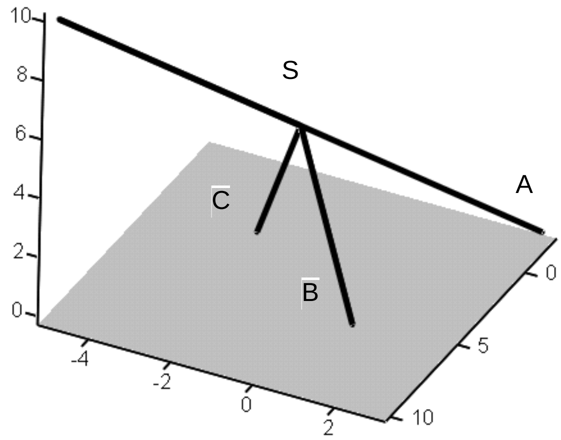
Die folgende Seite enthält die für die Schüler relevanten Fragestellungen zu diesem Projekt. Sie kann ausgedruckt und kopiert an die Schüler ausgegeben werden.

Projekt

Aufstellen eines Mastes

Organisationsvorschlag:

- Gruppen zu 3-5 Personen
- Ergebnisse und Berechnungen auf Flipchart schreiben
- 3-4 UE



$\left(G^{\langle 0\rangle}, G^{\langle 1\rangle}, G^{\langle 2\rangle}\right)$

Ein zylindrischer Fahnenmast aus Holz ($d := 25\,cm$, Dichte $\rho := 700\,\frac{kg}{m^3}$) wird im Gelände aufgestellt und während des Aufstellens zur Sicherung durch zwei Stangen im Schwerpunkt unterstützt.

Der Anfang des Mastes liegt bei $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} m$ am Boden auf, der Schwerpunkt ist bei $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} m$. Die beiden Stangen berühren bei $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m$ und $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} m$ den Boden.

1. Berechne die Gesamtlänge und die Masse des Mastes sowie die Koordinaten der Spitze.
2. Berechne die Länge der Stangen, die Winkel zwischen den Stangen und dem Mast, den Winkel zwischen den Stangen und der Gewichtskraft.
3. Teile die Gewichtskraft des Mastes in Richtung der Stangen und des Mastes auf.
4. Berechne wie groß der (Haft-) Reibungskoeffizient in den 3 Auflagepunkten A,B und C mindestens sein muss, damit die Stangen durch die Reibung halten. Gib eventuell jene Auflagepunkte an in denen eine weitere Fixierung des Mastes notwendig erscheint.
5. *(ev. bei Verbindung mit Mechanik, keine Lösungen vorhanden!!:)* Berechne die auftretenden Spannungen in den Stützen. Wähle einen geeigneten Querschnitt und ein geeignetes Material.

Die folgenden Seiten enthalten die Lösungen zu den Aufgabensstellungen. Bei elektronischer Ausgabe der Angabe sind die nachfolgenden Seiten zu löschen!

Fragestellung 1:

$\text{Length} := 2 \cdot |\mathbf{AS}|$ $\quad \text{Length} = 17.55\,\text{m}$ $\quad m_M := \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \text{Length} \cdot \rho$ $\quad m_M = 603\,\text{kg}$

Spitze: $D = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{m}$ Berechnung siehe oben!

Fragestellung 2:

Länge der Stangen:

$\mathbf{BS} := S - B$ $\quad \mathbf{CS} := S - C$ $\quad |\mathbf{BS}| = 5.74\,\text{m}$ $\quad |\mathbf{CS}| = 4.12\,\text{m}$

Winkel zwischen den Stangen und dem Mast mit dem Skalarprodukt:

$$\beta := \text{acos}\left(\frac{\mathbf{BS} \cdot \mathbf{AS}}{|\mathbf{BS}| \cdot |\mathbf{AS}|}\right) \qquad \gamma := \text{acos}\left(\frac{\mathbf{CS} \cdot \mathbf{AS}}{|\mathbf{CS}| \cdot |\mathbf{AS}|}\right)$$

$\beta = 65.38 \cdot \text{Grad}$ $\qquad \gamma = 63.75 \cdot \text{Grad}$

Winkel zwischen den Stangen und der Gewichtskraft mit dem Skalarprodukt::

$$\delta := \text{acos}\left[\frac{\mathbf{BS} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\mathbf{BS}|}\right] \qquad \varepsilon := \text{acos}\left[\frac{\mathbf{CS} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\mathbf{CS}|}\right]$$

$\delta = 29.5 \cdot \text{Grad}$ $\qquad \varepsilon = 14.04 \cdot \text{Grad}$

Fragestellung 3:

Die Aufteilung der Gewichtskraft in die Richtung der Stangen bedeutet die Lösung der Gleichung:

$\overrightarrow{F_G} = a \cdot \overrightarrow{AS} + b \cdot \overrightarrow{AS} + c \cdot \overrightarrow{CS}$ erfolgt in Matrixschreibweise: $\overrightarrow{F_G} = M \cdot p$

Die Matrix M enthält als Spalten die Vektoren $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}$, der Lösungsvektor p die Parameter a,b,c.

$M := \text{erweitern}(\mathbf{AS}, \mathbf{BS}, \mathbf{CS})$ $\qquad F_G := m_M \cdot g$ $\qquad F_G = 5914\,\text{N}$

$\mathbf{p} := M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_G \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 98.56 \\ 295.69 \\ 985.63 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ p ist die Lösung des Gleichungssystems

$\mathbf{F_M} := \mathbf{AS} \cdot \mathbf{p}_0$ $\qquad \mathbf{F_B} := \mathbf{BS} \cdot \mathbf{p}_1$ $\qquad \mathbf{F_C} := \mathbf{CS} \cdot \mathbf{p}_2$

$\mathbf{F_M} = \begin{pmatrix} 591.38 \\ -394.25 \\ 492.81 \end{pmatrix} \text{N}$ $\qquad \mathbf{F_B} = \begin{pmatrix} -591.38 \\ -591.38 \\ 1478.44 \end{pmatrix} \text{N}$ $\qquad \mathbf{F_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 985.63 \\ 3942.51 \end{pmatrix} \text{N}$

Die gesuchten Kräfte und darunter die Probe.

$$\mathbf{F_M} + \mathbf{F_B} + \mathbf{F_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 5913.764 \end{pmatrix} \text{N}$$

Fragestellung 4:

die erforderliche Reibungszahl ist entsprechend $\mu = \frac{F_R}{F_N} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{F_Z}$

$\mu_M := \frac{\sqrt{\left(\mathbf{F_M}_0\right)^2 + \left(\mathbf{F_M}_1\right)^2}}{\mathbf{F_M}_2}$ $\qquad \mu_M = 1.44$ zu großer Wert (>1) --> unbedingt weitere Maßnahmen erforderlich!

$\mu_B := \frac{\sqrt{\left(\mathbf{F_B}_0\right)^2 + \left(\mathbf{F_B}_1\right)^2}}{\mathbf{F_B}_2}$ $\qquad \mu_B = 0.57$

$\mu_C := \frac{\sqrt{\left(\mathbf{F_C}_0\right)^2 + \left(\mathbf{F_C}_1\right)^2}}{\mathbf{F_C}_2}$ $\qquad \mu_C = 0.25$
