Dipl.-Ing. Paul MOHR
p.mohr@eduhi.at

E-Brief:

Mohr'sches Verfahren

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Mechanik, Festigkeitslehre, Biegelinie, Mohr'sches Verfahren

- Kurzzusammenfassung

  Die Berechnung der Durchbiegung bei Trägern mit wechselndem Querschnitt (z.B. Wellen mit Absätzen) ist bei herkömmlichen Methoden mit vertretbarem Aufwand unmöglich. Auch das Mohr'sche Verfahren, das "zu Fuß" grafisch gelöst wird, ist nicht wirklich praktikabel.

  Die vorliegende Umsetzung des Mohr'schen Verfahrens nutzt die Möglichkeiten der numerischen Integration zur Berechnung der Biegelinie und ist einfach auf andere Belastungsfällle adaptierbar.

- Didaktische Überlegungen

  Die vorliegende Lösung bietet erstmals die Möglichkeit, die Durchbiegung von Wellen und Achsen ohne (allzu) grobe Vereinfachungen schnell und einfach zu berechnen.

- Lehrplanbezug:

  Mechanik, Maschinenelemente, Konstruktionsübungen

- Mathcad-Version:

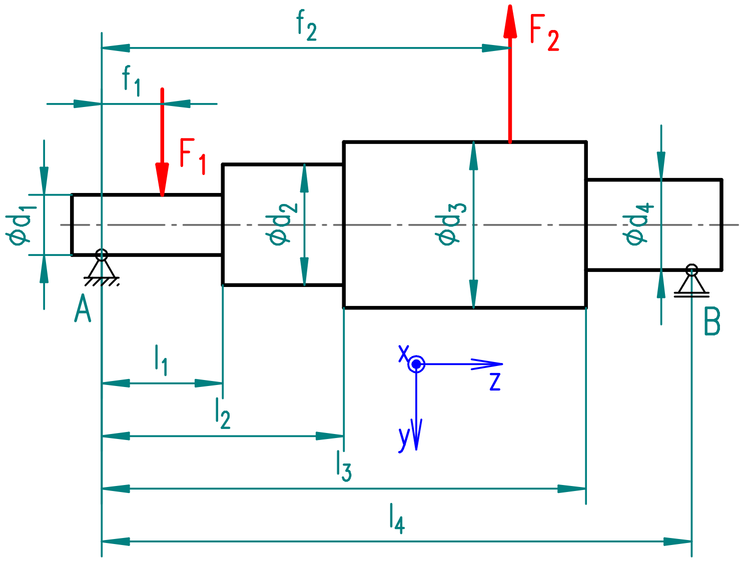
  ab MathCad 11

- Anmerkungen:

  Die vorliegende Lösung vermeidet die erheblichen Einschränkungen der Version von Florian Grabner (gra_MohrschesVerfahren...) indem
  - keine Einschränkung bei den verwendeten Einheiten besteht;
  - die Ergebnisse mit Einheiten berechnet werden;
  - die Genauigkeit der Berechnung automatisch festgelegt wird;
  - die Theorie zum Mohr'schen Verfahren kurz zusammengefasst wird.

Mohr'sches Verfahren zur Ermittlung der Biegelinie

Nach Christian Otto Mohr, 1835 - 1918



Angaben

$\mu m := 10^{-6} m$

$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} 3500 \\ -4500 \end{pmatrix} N \qquad \mathbf{f} := \begin{pmatrix} 20 \\ 135 \end{pmatrix} mm$

$\mathbf{l} := \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 160 \\ 195 \end{pmatrix} mm \qquad \mathbf{d} := \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 55 \\ 30 \end{pmatrix} mm$

Hilfsgrößen

$l_{AB} := \max(\mathbf{l}) \qquad E := 2.1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$

Generell muss zunächst je eine Funktion für das Biege- und axiale Flächenmoment 2. O. in Abhängigkeit von z (Abstand vom Bezugs-Lager) definiert werden.

Die nachfolgenden Berechnungen ist deshalb etwas gefinkelter, um eine allgemeine Lösung zu erreichen, die beliebig viele Kräfte und Wellenabsätze verarbeitet.

Auflagerkräfte

Auflagerkraft im Loslager $F_B := \frac{-\mathbf{F} \cdot \mathbf{f}}{l_{AB}}$

Auflagerkraft im Festlager $F_A := \sum \mathbf{F} + F_B$

Funktionen des Biegemomentes und des axialen Flächenmomentes (z=0 bei Lager A)

$$M_b(z) := \left| \begin{array}{l} M_b \leftarrow F_A \cdot z \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } \; z \geq \mathbf{f}_i \\ \quad \left| \begin{array}{l} M_b \leftarrow M_b - \mathbf{F}_i \cdot (z - \mathbf{f}_i) \\ i \leftarrow i + 1 \\ (\text{break}) \;\; \text{if } \; i = \text{zeilen}(\mathbf{f}) \end{array} \right. \\ M_b \end{array} \right.$$

$$I_x(z) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{while } \; (z > \mathbf{l}_i) \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i + 1 \\ (\text{break}) \;\; \text{if } \; i = \text{zeilen}(\mathbf{l}) \end{array} \right. \\ \dfrac{(\mathbf{d}_i)^4 \pi}{64} \end{array} \right.$$

Funktionen der Biegelinie

ideelle Auflager-kraft-A

$$F_{A\_id} := \frac{\displaystyle\int_0^{l_{AB}} \frac{M_b(z)}{I_x(z)} \cdot (l_{AB} - z)\, dz}{l_{AB}}$$

Steigung der Biegelinie

$$y'(z) := \frac{1}{E} \cdot \left(F_{A\_id} - \int_0^{z} \frac{M_b(s)}{I_x(s)}\, ds \right)$$

Durchbiegung

$$y(z) := \frac{1}{E} \cdot \left[F_{A\_id} \cdot z - \int_0^{z} \frac{M_b(s)}{I_x(s)} \cdot (z - s)\, ds \right]$$

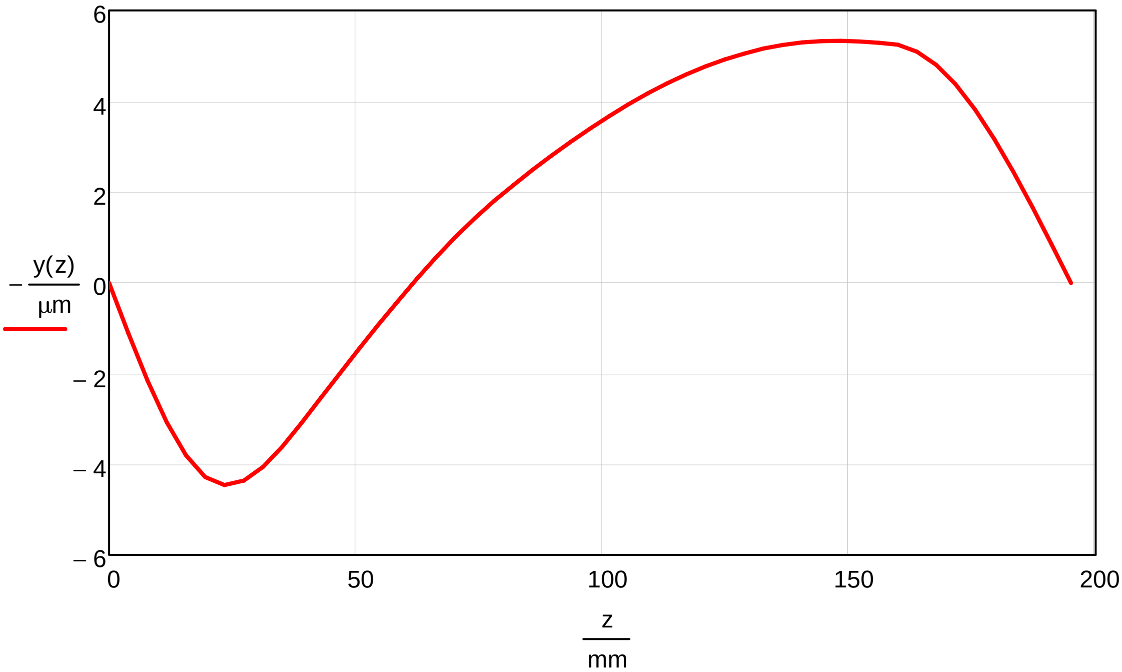
Die drei Funktionen sind allgemein gültig und können daher in andere Aufgabenstellungen mit abweichenden Belastungen (z.B. Streckenlast) hineinkopiert werden.

Biegelinie und besondere Werte

grafische Darstellung

$$z := 0, \frac{l_{AB}}{50} .. l_{AB}$$

Die erforderliche Auflösung muss optisch beurteilt werden.



Maxima

$z_1 :=$ wurzel$(y'(z), z, 20mm, 30mm)$ $z_1 = 23.815\,mm$ $y(z_1) = 4.452\,\mu m$

$z_2 :=$ wurzel$(y'(z), z, 140mm, 160mm)$ $z_2 = 147.59\,mm$ $y(z_2) = -5.338\,\mu m$

Neigung

$\alpha_A := y'(0mm)$ $\alpha_A = 2.868 \times 10^{-4}\,rad$ $\alpha_B := y'(l_{AB})$ $\alpha_B = 2.171 \times 10^{-4}\,rad$

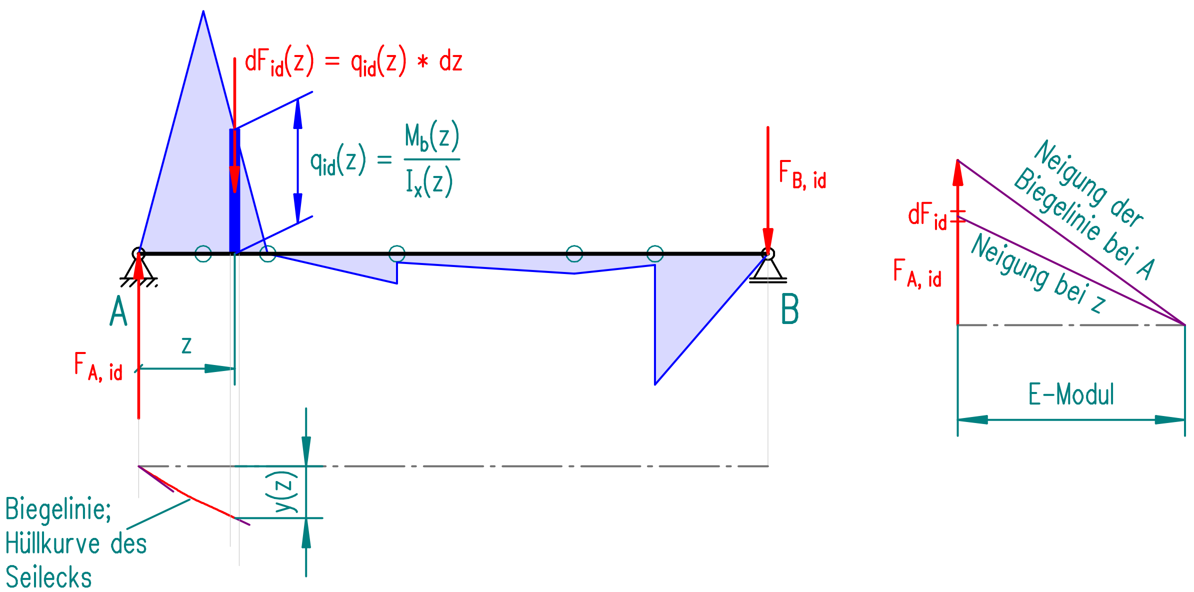
Theoretische Grundlagen (Für alle, die es ganz genau wissen wollen.)

Die Lösung basiert auf der Mohr'schen Analogie, wonach der Verlauf des Biegemoments, das sich durch die sgn. ideelle Last ergibt, der Biegelinie entspricht.

Die ideelle Last an einer bestimmten Stelle des Trägers ist das Verhältnis aus Biegemoment zu Flächenmoment.

$$q_{id}(z) = \frac{M_b(z)}{I_x(z)}$$

Über die Trägerlänge aufgetragen ergibt sich daraus eine ideelle Streckenlast.



Nach dem Seileckverfahren ergeben sich aus allen dF_{id} die ideellen Auflagerkräfte $F_{A,id}$ und $F_{B,id}$. (Letztere wird für die weitere Vorgangsweise nicht benötigt.)

Im Kräfteplan mit dem E-Modul als Polabstand zeigt sich für jedes dF_{id} die Neigung der ideellen Momentenlinie, die ja, wie eingangs erwähnt, der Biegelinie entspricht.

Die Summe aller aneinandergereihten Neigungen mal dz ergibt die Durchbiegung y.