Kaiser Gerald **gerald.kaiser@htl-kapfenberg.ac.at**

Differenzengleichungen in der Elektrotechnik

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differenzenquotient, Differenzengleichungen

- Kurzzusammenfassung

  Es werden Ein- und Ausschaltvorgänge bei einem RC-Glied und RL-Glied mit Hilfe von Differenzengleichnungen dargestellt. Dabei wird auf die elektrotechnischen Kenntnisse, wie Kirchhoffschen Gesetze (Maschenregel), Kapazität und Ladungsmenge, Induktiviät und zeitliche Änderung des Stromes aufgebaut.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand

  Meine Erfahrungen im Unterricht lassen sich in der Richtung beschreiben, dass der Übergang von der Maschenregel in die "Differenzenform" den Schülern erhebliche Schwierigkeiten bereitete. Die Darstellung in Form von Differenzengleichungen sind dem Schüler gänzlich unbekannt. Durch die anschließende grafische Darstellung erkennt dann der Schüler jedoch wieder bekannte Funktionsgrafen. Der Zeitaufwand beträgt 6 - 8 Stunden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3.Jahrgang, elektrotechnische Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  Ingenieur-Mathematik 3 Timischl/Kaiser Dorner-Verlag
  Ingenieur-Mathematik 4 Timischl/Kaiser Dorner-Verlag

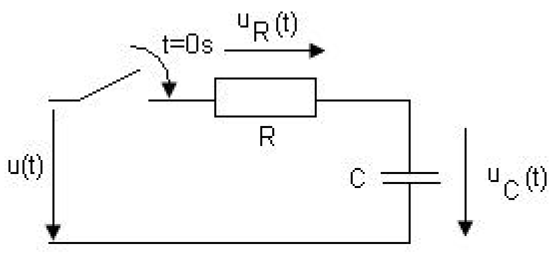
- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Zu den Literaturangaben: Im Band 3 findet man eine Einführung in die Theorie und Anwendung der Differenzengleichungen. Im 4. Band kann man im Kapitel Differentialgleichungen Anregungen für die Umsetzung mit Differenzen-gleichungen finden.

I) RC-Glied

A) Einschaltvorgang

Es soll die Spannung am Kondensator C als Funktion der Zeit t dargestellt werden. Zunächst wird allgemein eingangsseitig eine Spannung u(t) angelegt. Im Weiteren wird dann die Eingangsspannung zunächst eine Gleichspannung und dann eine sinusförmige Wechselspannung sein.



Herleitung der Spannung am Kondensator.

Zum Zeitpunkt t = 0s wird der Schalter geschlossen . Der Kondensator ist zunächst ungeladen.

Nach der 2. Kirchhoff ' schen Regel gilt:

$$u_R + u_C = u$$

Für die Spannung am Ohmschen Widerstand R gilt: $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\quad \Delta q = q_n - q_{n-1}$

Für die Kondensatorspannung uc gilt: $u_C = \frac{1}{C} \cdot q$

$$R \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{1}{C} \cdot q_{n-1} = u$$

Einsetzen von Δq in die Maschenregel und Auflösung der Differenzengleichung nach q_n

$$q_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right) \cdot q_{n-1} + \frac{u}{R} \cdot \Delta t$$

Dividiert man die Differenzengleichung durch C, so erhält man die Differenzengleichung für die Spannung am Kondensator.

$$uc_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right) \cdot uc_{n-1} + \frac{u}{R \cdot C} \cdot \Delta t$$ mit uc(0) =0

$$\tau = R \cdot C$$

1) Eingangsspannung ist eine Gleichspannung U_0 = 10V, mit R = 10 kΩ und C = 40µF

$$u = U_0$$

$$uc_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_{n-1} + \frac{U_0}{\tau} \cdot \Delta t$$ mit uc(0) =0 V

Definition der einzelnen Parameter:

$\tau := 0.4 \cdot s$ $U_0 := 10 \cdot V$ $n := 0 .. 100$

Anfangsbedingung: $uc_0 := 0 \cdot V$

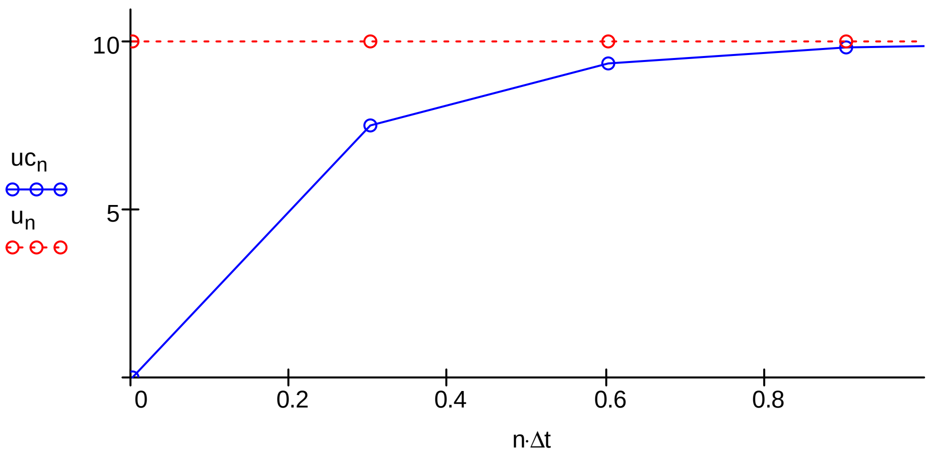
Wählt man für Δt zunächst größere Werte, so kann man sehr schön die Linearisierung im Zeitintervall Δt erkennen. Verkleinert man Δt schrittweise, so kann man die Annäherung an die "tatsächliche" Funktion sehen.

a) $\Delta t := 0.3 \cdot s$

Eingangsspannung: $u_n := U_0$

Für die graphische Darstellung ist eine Indexverschiebung in der Differenzengleichung notwendig.

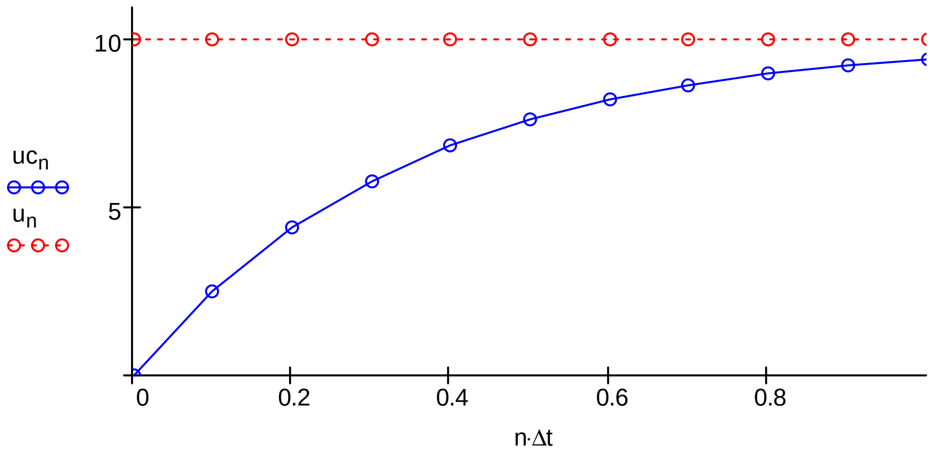
Kondensatorspannung: $uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n + \frac{U_0}{\tau} \cdot \Delta t$



b) $\Delta t := 0.1 \cdot s$

Eingangsspannung: $u_n := U_0$

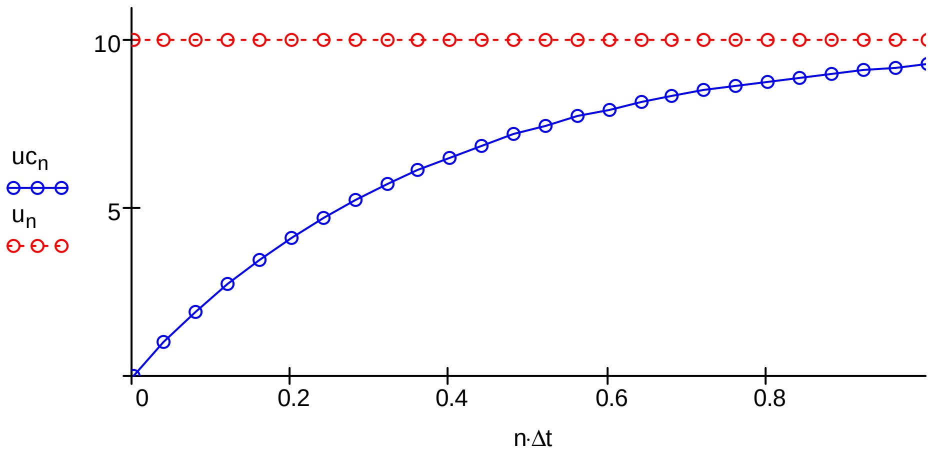
Kondensatorspannung: $uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n + \frac{U_0}{\tau} \cdot \Delta t$



c) $\Delta t := 0.04 \cdot s$

Eingangsspannung: $u_n := U_0$

Kondensatorspannung: $uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n + \frac{U_0}{\tau} \cdot \Delta t$



2.) Eingangsspannung ist eine Wechselspannung mit u(t)= 10*sin(6t)

Eingangsspannung: $u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$uc_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_{n-1} + \frac{u(t)}{\tau} \cdot \Delta t$ mit uc(0) =0 V

Definition der einzelnen Parameter:

$\tau := 0.4 \cdot s \qquad U_0 := 10 \cdot V \quad n := 0 .. 400 \qquad \omega := 6 \cdot \frac{1}{s}$

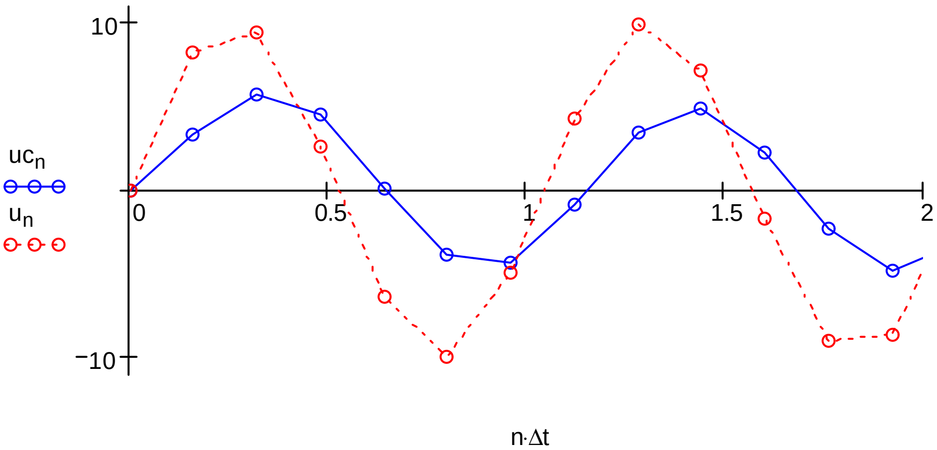
Anfangsbedingung: $u_0 := 0 \cdot V$

a) $\Delta t := 0.16 \cdot s$

Für die graphische Darstellung ist eine Indexverschiebung in der Differenzengleichung notwendig.

Spannung am Kondensator:
$$uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n + \frac{U_0 \cdot \sin[\omega \cdot (n+1) \cdot \Delta t]}{\tau} \cdot \Delta t$$

Eingangsspannung:
$$u_{n+1} := U_0 \cdot \sin[\omega \cdot (n+1) \cdot \Delta t]$$

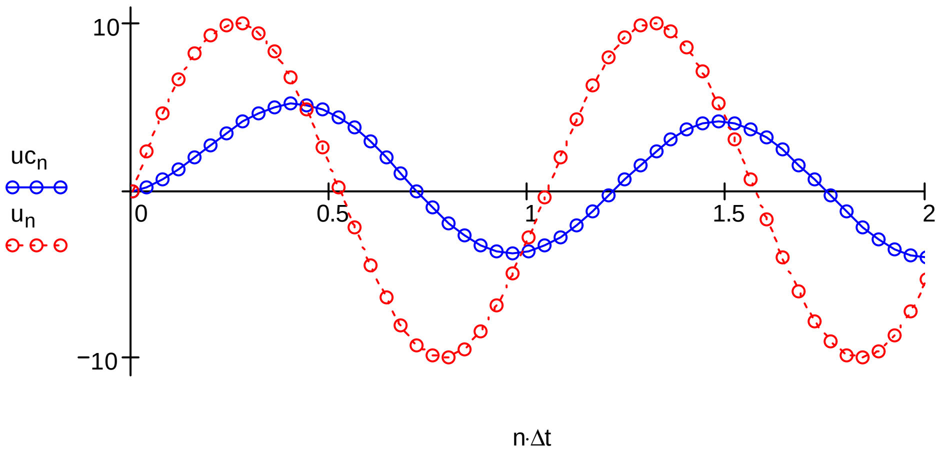


b) $\Delta t := 0.04 \cdot s$

Für die graphische Darstellung ist eine Indexverschiebung in der Differenzengleichung notwendig.

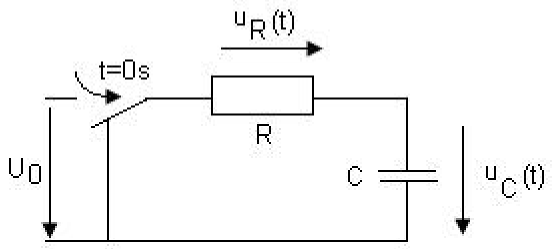
Spannung am Kondensator:
$$uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n + \frac{U_0 \cdot \sin[\omega \cdot (n+1) \cdot \Delta t]}{\tau} \cdot \Delta t$$

Eingangsspannung:
$$u_{n+1} := U_0 \cdot \sin[\omega \cdot (n+1) \cdot \Delta t]$$



B) Entladevorgang

Ein Kondensator mit der Kapazität C wird auf die Spannung U_0 aufgeladen. Zum Zeitpunkt t = 0s beginnt die Entladung des Kondensators. Es soll der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung darstellt werden.



Zunächst wird wieder mit Hilfe der Maschenregel der Zusammenhang der einzelnen Spannungen dargestellt.

$u_R + u_C = 0$ 2. Kirchhoffsches Gesetz

Mit den gleichen Überlegungen wie bei A) kommt man zur Differenzengleichung:

$$u_{cn} = \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right) \cdot u_{cn-1}$$ mit $uc(0) = U_0$

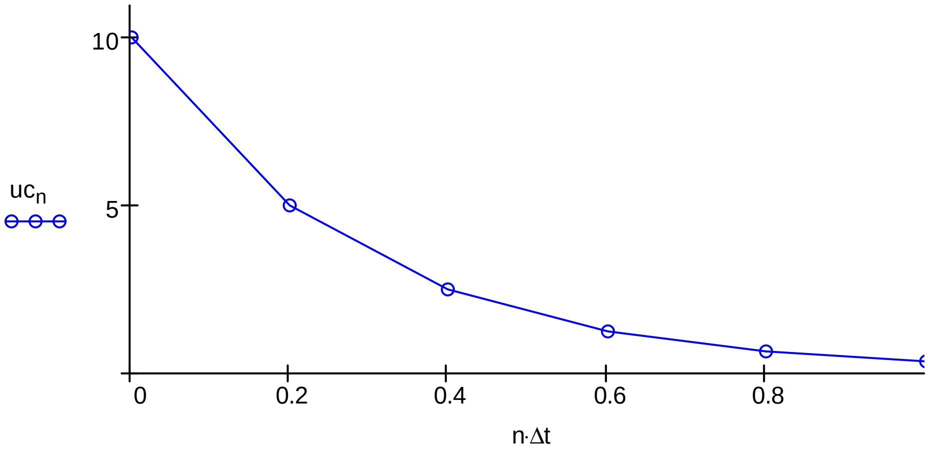
Definition der einzelnen Parameter.

$R := 10 \cdot k\Omega$ $C := 40 \cdot \mu F$

a) $\Delta t := 0.2 \cdot s$

$uc_0 := 10 \cdot V$ $\tau := R \cdot C$

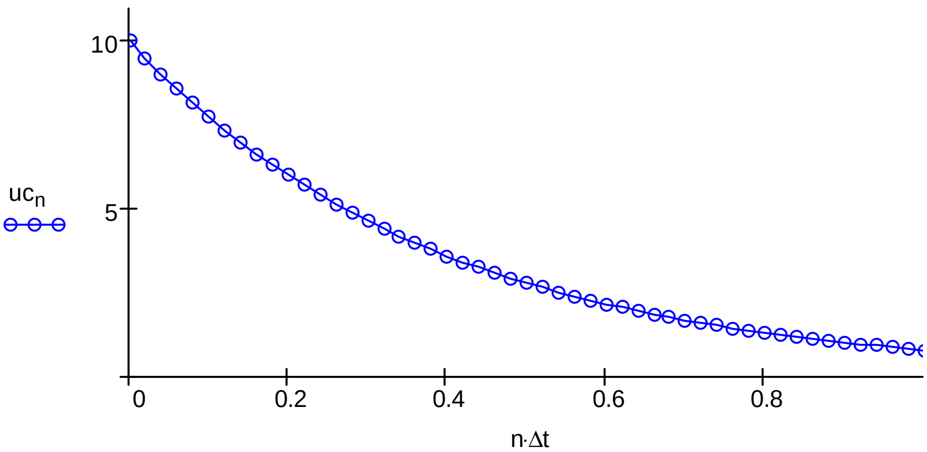
$uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n$ $n := 0 .. 100$



b) $\Delta t := 0.02 \cdot s$

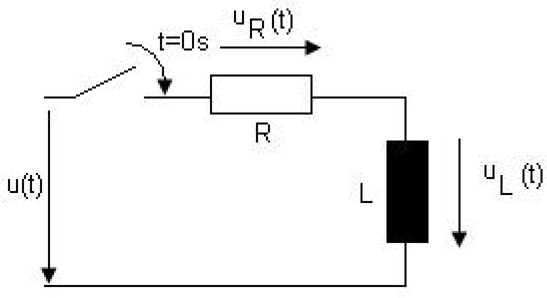
$uc_0 := 10 \cdot V$ $\tau := R \cdot C$

$uc_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_n$ $n := 0 .. 100$



II) RL - Glied

An einem RL-Glied wird zum Zeitpunkt t = 0 s die Eingangsspannung u(t) wirksam. Es soll der Strom i(t) durch eine Differenzengleichung dargestellt werden. Im Weiteren soll die Spannung am ohmschen Widerstand R und an der Induktivität dargestellt werden. Dabei soll im 1.Schritt u(t) eine Gleichspannung und im 2.Schritt eine sinusförmige Wechselspannung sein.



Allgemeine Herleitung der Differenzengleichung für den Strom i(t)

Nach der 2. Kirchhoff ' schen Regel gilt:

$$u_R + u_L = u$$

Für die Spannung am Ohmschen Widerstand R gilt: $u_R = R \cdot i$

Für die Spannung an der Spule u_L gilt: $u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ mit $\Delta i = i_n - i_{n-1}$

$$R \cdot i_{n-1} + L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = u(t)$$

$$R \cdot i_{n-1} + L \cdot \frac{i_n - i_{n-1}}{\Delta t} = u(t)$$

$$i_n = \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_{n-1} + u(t) \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

1) Eingangsspannung ist eine Gleichspannung u(t) = 20 V

Definition der einzelnen Parameter:

$R := 10 \cdot \Omega$ $\qquad L := 0.5 \cdot H$ $\qquad \tau := \frac{L}{R}$

$\tau = 0.05\,s$

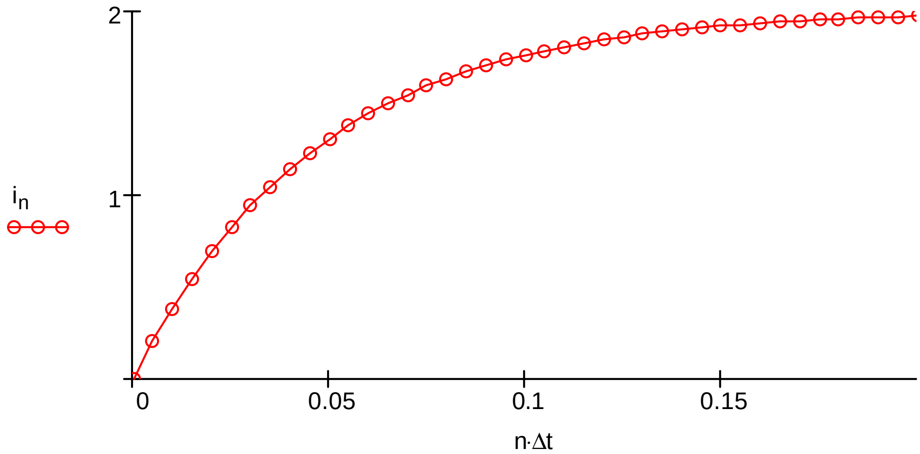
Eingangsspannung: $u(t) := 20 \cdot V$

Zeitintervall: $\Delta t := 0.005 \cdot s$

Für die graphische Darstellung ist eine Indexverschiebung in der Differenzengleichung notwendig.

$$i_{n+1} := \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_n + u(t) \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad n := 0 .. 100$$

Anfangsbedingung: $i_0 := 0 \cdot A$



2.) Eingangsspannung ist eine Wechselspannung u(t) = 85*sin(5t)

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_n = \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_{n-1} + U_0 \cdot \sin(\omega \cdot n \cdot \Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{L}$$ mit i(0) =0A

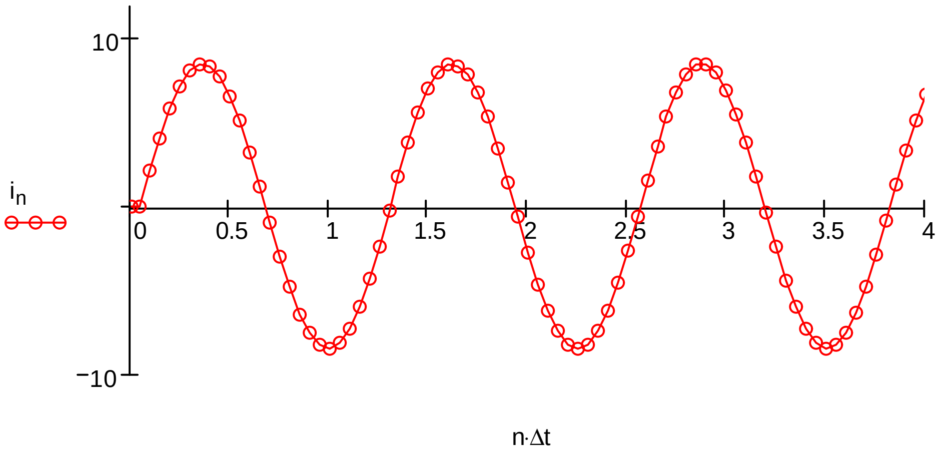
Definition der einzelnen Parameter:

$\tau := 0.05 \cdot s \qquad U_0 := 85 \cdot V \qquad n := 0 .. 400 \qquad \omega := 5 \cdot \frac{1}{s}$

Zeitintervall: $\Delta t := 0.05 \cdot s$

$$i_{n+1} := \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_n + U_0 \cdot \sin(\omega \cdot n \cdot \Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{L} \qquad i_0 := 0 \cdot A$$

Für die graphische Darstellung ist eine Indexverschiebung in der Differenzengleichung notwendig.



Spannung am Ohmschen Widerstand R

Für die Darstellung der Spannung am Ohmschen Widerstand R wird die Differenzengleichung für den Strom mit R multipliziert. Es ergibt sich:

$$uR_{n+1} = R \cdot i_{n+1}$$

Zeitintervall: $\Delta t := 0.05 \cdot s$ $\quad n := 0 .. 400$

Anfangswert: $uR_0 := 0V$ ergibt sich, da i(0) = 0

$$uR_{n+1} := \left[\left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot uR_n + U_0 \cdot R \cdot \sin(\omega \cdot n \cdot \Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{L}\right]$$

Spannung an der Spule

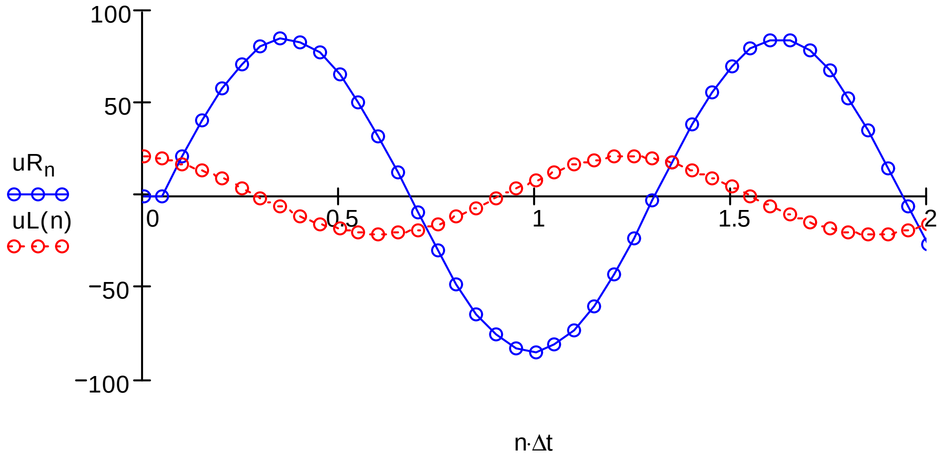
Für die Spannung an der Spule u_L gilt: $u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$

Für Δi gilt: $\Delta i = i_{n+2} - i_{n+1}$

$$i_{n+2} := \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_{n+1} + U_0 \cdot \sin[\omega \cdot (n+1) \cdot \Delta t] \cdot \frac{\Delta t}{L}$$

$$i_{n+1} := \left(1 - \frac{R}{L} \cdot \Delta t\right) \cdot i_n + U_0 \cdot \sin(\omega \cdot n \cdot \Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{L}$$

$$uL(n) := L \cdot \frac{i_{n+2} - i_{n+1}}{\Delta t}$$


100
50
−50
−100
uRn
uL(n)
0
0.5
1
1.5
2
n·Δt