Franz Hubert Kainz franz.kainz@htl-kapfenberg.ac.at

Schubspannung, Schubmittelpunkt, Schubverformung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Grundlagen der Mechanik, Integralrechnung

- Kurzzusammenfassung

  Werden "Offene Hohlprofile" (U-, T-, L-, Z-,C- Profile, etc.) in Konstruktionen eingesetzt und daher auch einer Beanspruchung ausgesetzt, so ist unbedingt darauf zu achten, dass die Aktionskräfte und auch die Reaktionskräfte durch den Schubmittelpunkt verlaufen und nicht durch den Schwerpunkt oder durch andere Punkte.
  Ist dies nicht der Fall, so tritt neben dem Biegemoment auch noch ein Torsionsmoment entlang der Trägerachse auf, welches eine sehr hohe Torsionsspannung und einen sehr großen Verdrehwinkel zur Folge hat.

  Die Kenntnis der Schubmittelpunktslage und auch die der Schubspannungs-verteilung des vorliegenden Profils sind eine Voraussetzung für eine richtige Ausführung der Konstuktion.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik, Fördertechnik, Mathematik-Fachtheorie / 5. Jahrgang Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

  Steger Bd. 2 (1, 3) - Teubner-Verlag

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Diese Aufgabe wurde bereits im Rahmen der Mathematik- Fachtheorie - Klausurarbeit, behandelt.

Für das vorliegende offene Hohlprofil (als Freiträger eingesetzt) sind die maximale Schub- und Biegespannung, die Lage des Schubmittelpunktes und die Schub- und Biegungsverformung zu ermitteln.

Farbencode :

Eingabe - Zahlenwerte Definitionen Formeln Ergebnisse

$° := \mathrm{Grad}$

$kN := 1000 \cdot N$

$Fy := 15 \cdot kN$

$R := 25 \cdot mm$

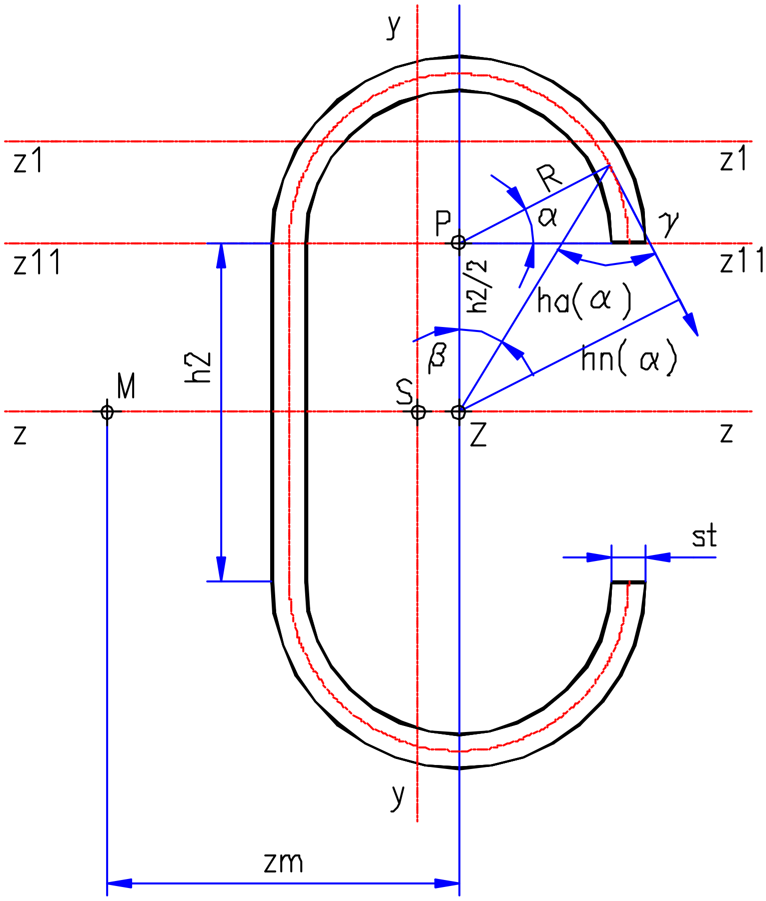
$L := 150 \cdot mm$

$st := 6 \cdot mm$

$h_2 := 50 \cdot mm$

$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{N}{mm^2}$

$G := 0.8 \cdot 10^5 \cdot \frac{N}{mm^2}$



Berechnung der Schwerpunktslage :

$i := 1..3$

$$A_i := \begin{pmatrix} R \cdot \pi \cdot st \\ h_2 \cdot st \\ R \cdot \pi \cdot st \end{pmatrix} \qquad z_i := \begin{pmatrix} R \\ 0 \cdot mm \\ R \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Teilflächen und der Schwerpunktslage der Teilflächen

$$A_{ges} := \sum_i A_i$$

Profilfläche

$$A_{ges} = 1.242 \times 10^3\, mm^2$$

$$z_S := \frac{1}{A_{ges}} \cdot \sum_i A_i \cdot z_i$$

Schwerpunktslage

$$z_S = 18.964\, mm$$

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Grades :

$$Iz = \int_0^A y^2\, dA$$

Axiales Flächenmoment 2.Grades bezogen auf die z-Achse

$$I_{z11} := \int_0^\pi R^2 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot R \cdot st\, d\alpha$$

Ax.FM 2.Gr. des Halbkreisringes, bezogen auf die z11 - Achse

$$I_{z11} = 1.473 \times 10^5\, mm^4$$

$$I_{z11} = I_{z1} + y_1^2 \cdot A_1$$

Satz von Steiner

$$ys = \frac{1}{A_{ges}} \cdot \int_0^A y\, dA$$

Schwerpunktslage

$$y_{S1} := \frac{1}{A_1} \cdot \int_0^\pi R \cdot \sin(\alpha) \cdot R \cdot st\, d\alpha$$

Schwerpunktslage - Halbkreisring

$$y_{S1} = 15.915\, mm$$

Schwerpunktslage des Halbkreisringes

$I_{z1} := I_{z11} - y_{S1}^2 \cdot A_1$

$I_{z1} = 2.79 \times 10^4\, mm^4$

Axiales Flächenmoment 2.Grades des Halbkreisringes bezogen auf die Teilschwerachse z1

$I_{z3} := I_{z1}$

Gleichsetzen der beiden Halbkreisringe

$$y_i := \begin{pmatrix} \frac{h_2}{2} + y_{S1} \\ 0 \cdot mm \\ \frac{h_2}{2} + y_{S1} \end{pmatrix} \qquad z_i := \begin{pmatrix} R - z_s \\ z_s \\ R - z_s \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Teilflächenschwerpunkte

$$I_z = \sum_i \left(Iz_i + y_i^2 \cdot A_i \right)$$

Allgemeine Form des axialen Flächenmomentes 2.Grades

$$I_z := I_{z1} + (y_1)^2 \cdot A_1 + st \cdot \frac{h_2^3}{12} + I_{z3} + (y_3)^2 \cdot A_3$$

$I_z = 1.696 \times 10^6\, mm^4$

Axiales Flächenmoment 2.Grades **Iz** des vorliegenden Profils

$$I_y = \int_0^A z^2\, dA$$

Axiales Flächenmoment 2.Grades bezogen auf die y-Achse

$$I_{y1} := 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot R \cdot st\, d\alpha$$

Ax.FM 2.Gr. des Halbkreisringes, bezogen auf die y - Achse

$I_{y1} = 1.473 \times 10^5\, mm^4$

$I_{y3} := I_{y1}$

Gleichsetzen der beiden Halbkreisringe

Axiales Flächenmoment 2.Grades **Iy** des vorliegenden Profils

$$I_y := I_{y1} + (z_1)^2 \cdot A_1 + h_2 \cdot \frac{st^3}{12} + z_s^2 \cdot A_2 + I_{y3} + (z_3)^2 \cdot A_3$$

$I_y = 4.377 \times 10^5\, mm^4$

Ermittlung der Spannungen :

Biegespannung :

$\sigma_{bmax} = \dfrac{M_{bmax}}{W_z}$ — Allgemeine Form der Biegespannung

$Wz = \dfrac{Iz}{e}$ — Axiales Widerstandsmoment

$e := \dfrac{h_2}{2} + R + \dfrac{st}{2}$ $\quad e = 53\,mm$ — Äußerster Randfaserabstand

$W_z := \dfrac{I_z}{e}$ $\quad W_z = 3.2 \times 10^4\,mm^3$ — Axiales Widerstandsmoment = konstant

$M_{bmax} := Fy \cdot L$ $\quad M_{bmax} = 2.25 \times 10^3\,N \cdot m$ — Maximales Biegemoment des Freiträgers an der Einspannstelle

$\sigma_{bmax} := \dfrac{M_{bmax}}{W_z}$ $\quad \sigma_{bmax} = 70.309\,\dfrac{N}{mm^2}$ — Maximale Biegespannung - Einspannstelle - bei Wz(x) = konstant

Schubspannung :

$\tau = \dfrac{F_q(x) \cdot Sz(y)}{I_z \cdot b(y)}$ — Allgemeine Form der Schubspannungs-Verteilung

$$\tau_{max} := \frac{Fy}{I_z \cdot st} \cdot \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha) \right) \cdot st \cdot R\, d\alpha + \int_0^{\frac{h_2}{2}} \left(\frac{h_2}{2} - y \right) \cdot st\, dy \right]$$

$\tau_{max} = 31.184\,\dfrac{N}{mm^2}$ — Das Maximum der Schubspannung-Verteilung tritt entlang der z-Achse auf.

Mittlere Schubspannung :

$\tau_{mi} = \dfrac{F_q(x)}{A}$

$\tau_{mi} := \dfrac{Fy}{A_{ges}}$ $\quad \tau_{mi} = 12.073\,\dfrac{N}{mm^2}$

$\Delta := \dfrac{\tau_{max} - \tau_{mi}}{\tau_{max}}$ $\quad \Delta = 61.285\,\%$ — Der Unterschied zwischen der tatsächlich auftretenden Schubspannung und der mittleren Schubspannung ist sehr sehr groß !!!

Ermittlung des Schubmittelpunktes :

$\alpha := 0, \frac{\pi}{100} .. \pi$ — Laufvariable

$ha(\alpha) := \sqrt{(R \cdot \cos(\alpha))^2 + \left(\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha)\right)^2}$ — Bestimmung des Abstandes ha(α)

$\beta(\alpha) := \operatorname{atan}\left(\frac{R \cdot \cos(\alpha)}{\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha)}\right)$ — Bestimmung des Winkels β(α)

$\gamma(\alpha) := \alpha + \beta(\alpha)$ — Bestimmung des Winkels γ(α)

$hn(\alpha) := ha(\alpha) \cdot \sin(\gamma(\alpha))$ — Bestimmung des Normalabstandes hn(α) (Teilfläche 1)

$z_m = \frac{1}{Iz} \cdot \int_0^S Sz(s) \cdot h(s)\, ds$ — Allgemeine Formen zur Ermittlung des Schubmittelpunktes z-Achse

$Sz = \int_0^A y\, dA$ — Statisches Moment in bezug auf die z-Achse

$y_m = \frac{1}{Iy} \cdot \int_0^S Sy(s) \cdot h(s)\, ds$ — Allgemeine Formen zur Ermittlung des Schubmittelpunktes y-Achse

$Sy = \int_0^A z\, dA$ — Statisches Moment in bezug auf die y-Achse

$S_{z1} := \int_0^{\pi} \left(\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha)\right) \cdot st \cdot R\, d\alpha$ — Statisches Moment der Teilfläche 1

$S_{z1} = 1.928 \times 10^4\, mm^3$

$hn2 := R$ — Normalabstand der Teilfläche 2

$$z_m := \frac{2}{I_z} \cdot \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\alpha} \left(\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha)\right) \cdot st \cdot R\, d\alpha\right] \cdot hn(\alpha) \cdot R\, d\alpha + \int_0^{\frac{h_2}{2}} \left[S_{z1} + \int_0^{y} \left(\frac{h_2}{2} - y\right) \cdot st\, dy\right] \cdot hn2\, dy\right]$$

$z_m = 51.662\, mm$ — Schubmittelpunktslage in bezug auf den Punkt Z

Anmerkung : Die Ermittlung der Schubmittelpunktslage ym erübrigt sich in diesem Fall, da das vorliegende Profil um die z-Achse symmetrisch ist und ym daher gleich Null ist (auf der z-Achse liegt).

Ermittlung der Schubverformung :

$$y_S = \frac{\kappa_S}{G \cdot A} \cdot \int_0^L Fq(x)\,dx$$

Allgemeine Form zur Ermittlung der Schubverformung entlang der x-Achse

Berechnung des Schubbeiwert $\mathbf{k}_s$:

$$\kappa_S = \frac{A_{ges}}{I_z^2 \cdot b^2} \cdot \int_0^A Sz^2\,dA$$

Allgemeine Form zur Ermittlung des Schubbeiwertes in bezug auf die z-Achse

$b := st$

"Die Breite b entspricht in diesem Fall der Profilstärke st

$$\kappa_S := \frac{2 \cdot A_{ges}}{I_z^2 \cdot b^2} \cdot \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\alpha} \left(\frac{h_2}{2} + R \cdot \sin(\alpha)\right) \cdot st \cdot R\,d\alpha\right]^2 \cdot R \cdot st\,d\alpha + \int_0^{\frac{h_2}{2}} \left[S_{z1} + \int_0^{y} \left(\frac{h_2}{2} - y\right) \cdot st\,dy\right]^2 \cdot st\,dy\right]$$

$\kappa_S = 2.982$

Schubbeiwert für das vorliegende C-Profil

$$y_{Smax} := \frac{\kappa_S \cdot Fy \cdot L}{G \cdot A_{ges}}$$

$y_{Smax} = 0.068\,mm$

Maximum der Schubverformung am freien Ende des Trägers

Ermittlung der Biegungsverformung :

$$y_B = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^L Mb(x) \cdot \overline{Mb}(x)\,dx$$

Allgemeine Form der Biegungsverformung nach Castigliano

Für einen Freiträger gilt :

$$y_{Bmax} := \frac{Fy \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}$$

$y_{Bmax} = 0.047\,mm$

Maximum der Biegungsverformung am freien Ende des Trägers

Anmerkung : Die Biegungsverformung ist in diesem Fall geringer als die Schubverformung

$$y_{ges} := y_{Bmax} + y_{Smax}$$

$y_{ges} = 0.115\,mm$

Gesamtverformung am freien Ende des Trägers

Darstellung der Verformungen

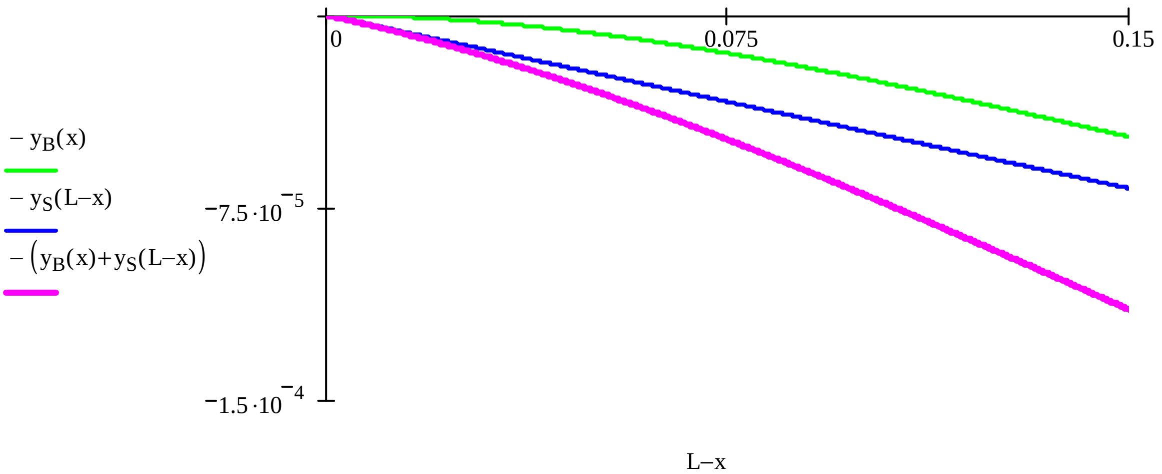
$a := 0 \cdot mm, 0.1 \cdot mm .. L \qquad x := 0 \cdot mm, 0.1 \cdot mm .. L$ Laufvariable

$$y_B(a) := \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^{L-a} Fy \cdot (a + x) \cdot x \, dx$$ Allgemeine Form der Biegelinie nach Castigliano

$$y_S(x) := \frac{\kappa_S \cdot Fy \cdot x}{G \cdot A_{ges}}$$ Allgemeine Form der Schubverformungslinie

Verformung des Balkens :

grün - Biegungsverformung
blau - Schubverformung
lila - Gesamtverformung



SCHUB-und BIEGUNGSVERFORMUNG

Verläuft die Beanspruchung durch den Schwerpunkt und **nicht** durch den **Schubmittelpunkt**, so kommt es zu einer zusätzlichen **Torsionsbeanspruchung** des vorliegenden Profils.

Ermittlung der Torsionsspannung und des Verdrehwinkels - Offenes Hohlprofil

$$\tau_{tmax} = \frac{T}{Wt}$$ Torsionshauptgleichung

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot It}$$ Verdrehwinkel

$$It = \frac{k}{3} \cdot \sum_i hi \cdot si^3$$ Torsions-Flächenmoment 2. Grades - Offenes Hohlprofil

$$Wt = \frac{k}{3 \cdot s_{max}} \cdot \sum_i hi \cdot si^3$$ Torsions-Widerstandsmoment - Offenes Hohlprofil

$T := Fy \cdot \left[z_m - \left(R - z_s\right)\right]$ $\quad T = 684.39\,N \cdot m$ Auftretendes Torsionsmoment

$k := 1.1$ Profilfaktor für ein Rechteck gewählt C-Profil gestreckt => Rechteck

$h := 2 \cdot R \cdot \pi + h_2$ $\quad h = 207.08\,mm$ mittlere Länge des gestreckten Profils

$It := \frac{k}{3} \cdot h \cdot st^3$ $\quad It = 1.64 \times 10^4\,mm^4$

$Wt := \frac{k}{3 \cdot st} \cdot h \cdot st^3$ $\quad Wt = 2.733 \times 10^3\,mm^3$

$\tau_{tmax} := \frac{T}{Wt}$ $\quad \tau_{tmax} = 250.376\,\frac{N}{mm^2}$

$\varphi := \frac{T \cdot L}{G \cdot It}$ $\quad \varphi = 4.483\,°$

Anmerkung : Sowohl die auftretende Torsionsspannung als auch der auftretende Verdrehwinkel übersteigen die zulässigen Werte um ein Vielfaches - ein Bruch des Trägers wäre unvermeidbar