Andreas Höhenberger , hoehenberger@aon.at

Biegebemessung im Stahlbetonbau

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Analytische Lösung der Biegebemessung im Stahlbetonbau

- Kurzzusammenfassung

  Auf Grundlage der ÖN B4700 werden die Zusammenhänge zwischen dem Dehnungszustand und der Spanungsverteilung im Stahlbeton beschrieben. Anhand eines Rechtquerschnittes wird der grundlegende Bemessungsvorgang dargestellt und zusätzlich ein Weg gezeigt ,wie die freie Bemessung mittels MATHCAD durchgeführt werden kann.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Darstellung der Arbeitslinie des Betons ,Begriff der Sicherheiten und Zusammenhang zwischen inneren und äußeren Schnittkräften.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik / Stahlbetonbau , 5.Jahrgang, Bauabteilung

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  ÖN B 4700 , Valentin,Kidery "Stahlbetonbau" - Manz Verlag

Biegebemessung im Stahlbetonbau

Ausgangssituation :

Rechteckquerschnitt b/h

Äusseres Biegemoment $M_{SD,y}$

Betongüte ,definiert durch den Bemessungswert f_{cd}

Stahlgüte ,definiert durch den Bemessungswert f_{yd}

1.) Definition des Dehnungszustandes

Gemäss den Gesetzen der Balkenbiegungslehre wird der Querschnitt eines Trägers durch ein positives Biegemoment am oberen Rand gedrückt und am unteren Rand gezogen.

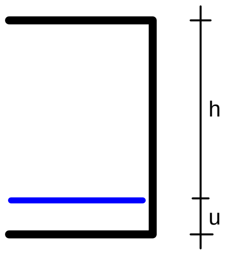
Dies bedingt eine Stauchung ε_b des Querschnittes an der obersten Druckfaser bzw. eine Dehnung ε_s an der untersten Zugfaser (bzw. Schwerpunkt der Stahleinlage).

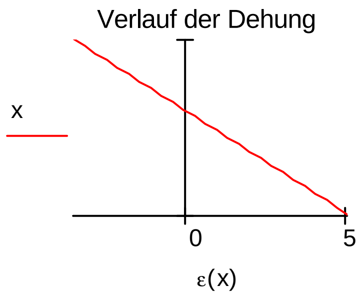
Auf Grund der besonderen Eigenschaften des Stahlbetons (verschiedene Festigkeiten von Beton und Stahl) sind die Dehnung und die Stauchung betragsmäßig nicht gleich groß.

Der Verlauf der Dehnung kann jedoch als linear vorausgesetzt werden (der Querschnitt bleibt eben).

Dies führt zu folgender Annahme hinsichtlich der Verformung des Querschnittes : $h := 50 \cdot cm$

$\varepsilon_b := -3.50$ $\varepsilon_s := 5.00$ $\varepsilon(x) := \varepsilon_b + \dfrac{(|\varepsilon_b| + |\varepsilon_s|) \cdot x}{h}$





Druckzone

gerissene Zugzone

h : Statische Höhe des Trägers bzw. Abstand oberste Druckfaser vom Stahlschwerpunkt
u : Überdeckung der Stahleinlagen (Mindestmass von der ÖNORM vorgeschrieben)
d : h+u = Gesamthöhe des Trägers
ε_b : Stauchung der Druckfaser
ε_s : Dehnung der Stahleinlage im Schwerpunkt

Seit der ÖNORM B4700 darf zur Bemessung ein nahezu beliebiger Dehnungszustand angenommen werden. Es gelten lediglich folgende Einschränkungen :

$\varepsilon_B <= 0.0035$
$\varepsilon_S >= \varepsilon_{SY}$

wobei ε_{SY} den Beginn der Fließgrenze des Stahls bedeutet (nähere Erklärung später)

2.) Die Arbeitslinien und Sicherheiten γ_M

Gemäß des semiprobabilistischen Bemessungskonzeptes werden sowohl Sicherheiten für die Belastungsseite γ_L als auch für die Materialseite γ_M definiert.

Sicherheit für den Beton : $\gamma_C := 1.50$

Sicherheit für den Stahl : $\gamma_S := 1.15$

CharakteristischeWürfeldruckfestigkeit : $f_{cwk} := 30 \cdot \dfrac{N}{mm^2}$ z.B. B 30

Charakteristische Dauerstandsfestigkeit : $f_{ck} := 0.75 \cdot f_{cwk}$ $f_{ck} = 22.5 \dfrac{N}{mm^2}$

Bemessungswert für die Betondruckfestikeit : $f_{cd} := \dfrac{f_{ck}}{\gamma_C}$ $f_{cd} = 15 \dfrac{N}{mm^2}$

Charakteristischer Wert für die Streckgrenze : $f_{yk} := 550 \cdot \dfrac{N}{mm^2}$ z.B. ST 550

Bemessungswert des Bewehrungsstahles : $f_{yd} := \dfrac{f_{yk}}{\gamma_S}$ $f_{yd} = 478.26 \dfrac{N}{mm^2}$

Die Sicherheiten auf der Lastseite sollen der ÖNORM entnommen werden und liegen in der Regel bei γ_L=1.35 für ständige Lasten und γ_L=1.50 für Nutzlasten.

Arbeitslinie des Betons :

Im Allgemeinen beschreibt die Arbeitsline den Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung. Solange man sich im elastischen Bereich bewegt gilt das HOOKE'sche Gesetz, jedoch nicht beim Beton ,der einer parabelförmigen Arbeitslinie folgt.

Arbeitslinie des Betons besteht aus 2 Anteilen: für $0 < \varepsilon_C <= 0.002$ quad. Parabel

für $0.002 < \varepsilon_C <= 0.0035$ konstant

Diese Anteile werden zu folgender Funktion zusammengefasst :

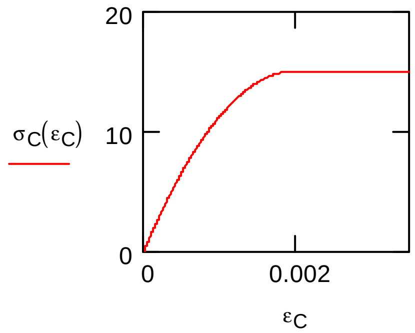
$f_{cd} := 15$

$\varepsilon_C := 0, 0.000005 .. 0.0035$

$$\sigma_C(\varepsilon_C) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_C}{0.002} \cdot \left(2 - \dfrac{\varepsilon_C}{0.002}\right) \cdot f_{cd} & \text{if } \varepsilon_C \geq 0 + \varepsilon_C < 0.002 \\ f_{cd} & \text{if } \varepsilon_C \geq 0.002 \end{cases}$$

parabolischer Anteil

konstanter Anteil



Arbeitslinie des Stahls :

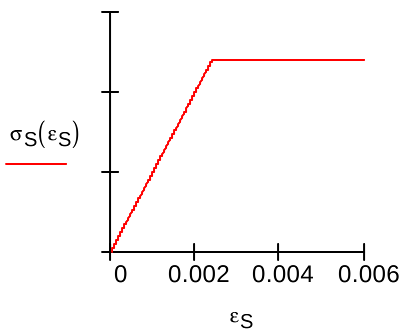
Diese gehorcht bis zur Dehnung e_{SY} dem Hooke'schen Gesetz und verläuft danach konstant.

Elastizitätsmodul : $E_S := 200000 \cdot \dfrac{N}{mm^2}$ $\quad \varepsilon_{sy} := \dfrac{f_{yd}}{E_S}$ $\quad f_{yd} = 478.261 \dfrac{N}{mm^2}$

$$\sigma_S(\varepsilon_S) := \begin{cases} E_S \cdot \varepsilon_S & \text{if } \varepsilon_S \leq \varepsilon_{sy} \\ f_{yd} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\varepsilon_S := 0, 0.00001 .. 0.006$

$\varepsilon_{sy} = 2.3913 \dfrac{mm}{m}$

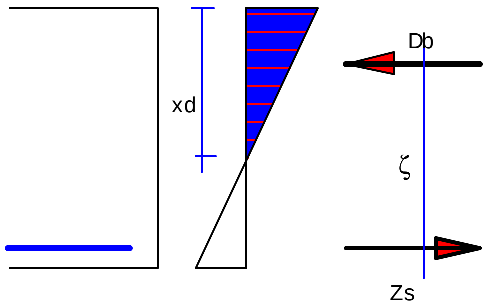


GRUNDLAGEN DER BERECHNUNG

Das gegebene äußere Moment $M_{y,SD}$ wird durch ein inneres Kräftepaar aufgenommen.

Das innere Kräftepaar setzt sich aus einer Druckkraft (Beton) und einer gleich großen Zugkraft (Stahl) zusammen.

Der Abstand der beiden Kräfte zueinander wird als INNERER Hebelsarm ζ bezeichnet



x_d : Höhe der Druckzone

ζ : Innerer Hebelsarm

Db : Betondruckkraft

Zs : Stahlzugkraft

Es muß gelten : Db * ζ = Zs * ζ = $M_{y,SD}$

Berechnung der Betondruckkraft

Wahl eines Dehnungszustandes : $\varepsilon_b := -0.0035 \quad \varepsilon_s := 0.0081$

Wahl eines Rechteckquerschnittes : $b := 25 \cdot cm \quad h := 50 \cdot cm \quad f_{cd} := 15 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Ermittlung der Höhe der Druckzone x_d :

$$\varepsilon_b + \frac{(|\varepsilon_b| + |\varepsilon_s|) \cdot x_d}{h} = 0 \qquad x_d := \frac{-\varepsilon_b \cdot h}{|\varepsilon_b| + |\varepsilon_s|} \qquad x_d = 15.086\,cm \qquad kN := 1000 \cdot N$$

Verlauf der Betondruckspannung in Abhängigkeit der Dehnung :

$$\varepsilon(x) := \varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} \qquad \sigma_C(x) := \left| \begin{array}{l} \frac{-\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d}}{0.002} \cdot \left(2 - \frac{-\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d}}{0.002} \right) \cdot f_{cd} \ \text{ if } -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} \ge 0 + -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} < 0.002 \\ f_{cd} \ \text{ if } -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} \ge 0.002 \end{array} \right.$$

Die resultierende Betondruckkraft ist das (Volums)Integral des enstehenden Spannungskörpers.

$$D_b := b \left(\int_0^{x_d} \sigma_C(x)\, dx \right) \qquad D_b = 457.974\,kN$$

Um den inneren Hebelsarm zu ermitteln wird noch der Schwerpunkt des Spannungskörpers benötigt :

$$S_x := b \cdot \frac{\int_0^{x_d} x\,\sigma_C(x)\,dx}{D_b} \qquad S_x = 8.811\,\text{cm}$$ (gemessen von der neutralen Faser)

Der innere Hebelsarm ergibt sich somit zu : $\zeta := h - x_d + S_x \qquad \zeta = 0.437\,\text{m}$

Das innere Moment ist : $M := D_b \cdot \zeta \qquad M = 200.25\,\text{kN} \cdot \text{m}$

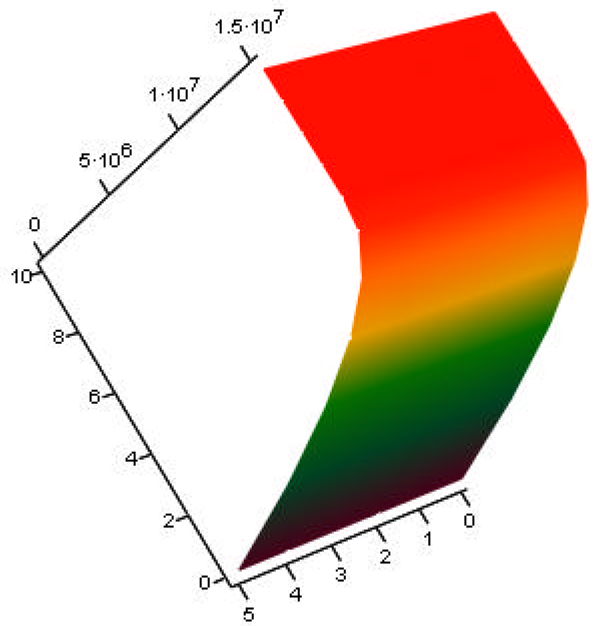
Die erforderliche Stahlfläche ergibt sich mit : $A_s := \frac{D_b}{f_{yd}} \qquad A_s = 9.576\,\text{cm}^2$

Zur Illustration wird noch die Form des Spannungskörpers grafisch angegeben :

$N := 10 \qquad i := 0, 1 .. N \qquad j := 0, 1 .. \frac{N}{2} \qquad x_i := \frac{i \cdot x_d}{N} \qquad y_j := \frac{j \cdot b}{N}$

$$\sigma_C(x,y) := \begin{cases} \dfrac{-\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d}}{0.002} \cdot \left(2 - \dfrac{-\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d}}{0.002}\right) \cdot f_{cd} & \text{if } -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} \geq 0 + -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} < 0.002 \\ f_{cd} & \text{if } -\varepsilon_b \cdot \frac{x}{x_d} \geq 0.002 \end{cases}$$

$A_{i,j} := \sigma_C(x_i, y_j)$



A

Das Problem der Bemessung besteht nun darin, ,jenen Spannungszustand zu finden , der nötig ist ,um ein ganz bestimmtes äußeres Biegemoment aufzunehmen.

Folgende Grenzwerte für den Dehnungszustand sind möglich :

$\varepsilon_b = 0.0035$	$\varepsilon_s = \varepsilon_{sy}$	maximal mögliches Moment
$\varepsilon_b = 0.0035$	$\varepsilon_s = 0.02$	schlechte Ausnutzung des Querschnittes

In der Praxis erfolgt die Bemessung unter Verwendung von Tabellen ,in denen jeder mögliche Wert für die Stahldehnung $0.02 < \varepsilon_s < \varepsilon_{sy}$ erfasst ist.

Eine Variation der Betonstauchung $\varepsilon_b < 0.0035$ bei gleichzeitiger maximaler Stahldehnung von $\varepsilon_s = 0.02$ tritt nur bei sehr schlecht ausgenutzten Querschnitten auf und wird im folgenden nicht weiter untersucht.

$j := 1, 2 .. 180 \qquad \varepsilon_s(j) := 0.002 + \dfrac{j}{10000} \qquad \varepsilon_b := -0.0035 \quad h\_ := 50 \quad b\_ := 25 \quad f_{cd\_} := 1.5$

$M_{sd} := 200 \qquad f_{yd\_} := 47.8$

$$x_d(j) := \frac{-\varepsilon_b \cdot h\_}{|\varepsilon_b| + |\varepsilon_s(j)|}$$ Höhe der Druckzone für jeden Dehnungszustand

$$h_{d1}(j) := x_d(j) \cdot \frac{0.002}{0.0035}$$ Höhe des Parabelanteiles $\qquad D_{b1}(j) := b\_ \cdot h_{d1}(j) \cdot \frac{2}{3} \cdot f_{cd\_}$

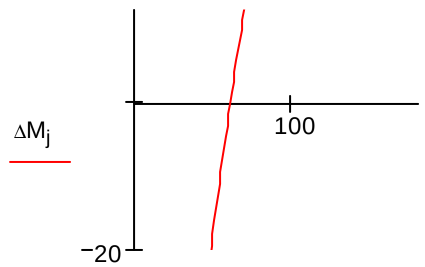
$$h_{d2}(j) := x_d(j) - h_{d1}(j)$$ Höhe des konstanten Anteiles $\qquad D_{b2}(j) := b\_ \cdot h_{d2}(j) \cdot f_{cd\_}$

$D_{.b1}$ entspricht dem Volumen des parabelförmigen Spannungskörpers
D_{b2} entspricht dem Volumen des rechteckigen Spannungskörpers.
Beide Werte sind geschlossen ermittelbar.
Auch der Schwerpunkt der Parabel mit 5/8 h_{d1} ist bekannt.

$$M\_j := D_{b1}(j) \cdot \left(h\_ - x_d(j) + \frac{5}{8} \cdot h_{d1}(j)\right) + D_{b2}(j) \cdot \left(h\_ - \frac{1}{2} \cdot h_{d2}(j)\right) \qquad M\_j := \frac{M\_j}{100}$$

Inneres Moment

$$\Delta M_j := M_{sd} - M\_j$$ Differnzmoment AUSSEN - INNEN



$i := 61$

Wert i aus Graphik ablesen !

Der Nulldurchgang der Kurve ist der gesuchte Index für die richtige Stahldehnung

Wenn keine Nullstelle vorhanden ist ,so ist der gewählte Querschnitt zu klein

$Z := D_{b1}(i) + D_{b2}(i) \qquad A_s := \dfrac{Z}{f_{yd\_}} \text{ gleit}, 4 \ \rightarrow 9.581 \qquad \varepsilon_s(i) = 0.0081$