Mag. Dr. Ing. Markus Hörhager markus.hoerhager@aon.at

SPC - Entwurf von Regelkarten, Prozeßsimulation

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:
  Qualitätssicherung, Prozeßsimulation, Normalverteilung, Eingriffswahrscheinlichkeiten

- Kurzzusammenfassung
  Aus den Daten eines Produktionsvorlaufes sollen m und s der zugrunde liegenden Normalverteilung geschätzt werden und damit Qualitätsregelkarten zur Überwachung der Fertigungslage und der Güte der Fertigung berechnet werden. Der Prozeß soll simuliert werden und auch die Eingriffswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit einer Mittelwerts- verschiebung und einer Veränderung der Standardabweichung untersucht werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):
  Angewandte Mathematik, 5.Jahrgang

- Mathcad-Version: **ab Mathcad 6.0**

Auswertung eines Vorlaufes:

Wir nehmen an, daß wir die Meßdaten in Form eines ASCII-Files SPC.PRN vorliegen haben. Dieses File können Sie mit der Funktion PRNLESEN in Mathcad einlesen.

$A := \mathrm{PRNLESEN}(\text{"spc.prn"})$

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	49.98	49.96	49.99	49.96	49.99	49.95	49.94	49.95	49.97	49.96
1	50.01	49.97	50.03	49.98	49.99	49.96	49.99	49.97	49.97	49.97
2	50.02	50.01	50.03	50	50	49.98	49.99	49.98	50.01	50.01
3	50.03	50.01	50.04	50.01	50.02	49.99	50.01	50.01	50.01	50.01
4	50.05	50.03	50.07	50.02	50.02	50.01	50.03	50.02	50.06	50.03

$nv := \mathrm{zeilen}\left(A^{\langle 0 \rangle}\right)$ $nv = 5$ Stichprobenumfang des Vorlaufes

$Nv := \mathrm{spalten}(A)$ $Nv = 10$ Anzahl der Stichproben des Vorlaufes

Prozeßkenndaten:

$\mu := \mathrm{mittelwert}(A)$ $\mu = 50$ Schätzwert für den Mittelwert

$\sigma := \sqrt{\mathrm{var}(A)} \cdot \sqrt{\dfrac{nv \cdot Nv}{nv \cdot Nv - 1}}$ $\sigma = 0.03$ Schätzwert für die Standardabweichung, Wurzelfaktor für erwartungstreue Schätzung erforderlich

Simulierte Mittelwerte und Streuungen:

$n := 7$ Anzahl der Meßwerte für eine Mittelwertbildung, Stichprobenumfang

$N := 20$ Anzahl der simulierten Mittelwerte

$k := 0 .. N - 1$

Mathcad 6.0 ermöglicht eine schnelle Erzeugung der Meßwerte mit rnorm:

$$B^{\langle k \rangle} := \mathrm{rnorm}(n, \mu, \sigma)$$

$$xq_k := \mathrm{mittelwert}\left(B^{\langle k \rangle}\right)$$ Simulierte Mittelwerte

$$s_k := \sqrt{\mathrm{var}\left(B^{\langle k \rangle}\right)} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$ Simulierte Streuungen

Bestimmung der Mittelwertskarte:

$$u(\alpha) := \mathrm{qnorm}(\alpha, 0, 1)$$ Quantile der Normalverteilung mit Funktion qnorm ab Version 6.0.

Eingriffsgrenzen: (99%ZSB)

$$xq_{OEG} := \mu + u(0.995) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad xq_{OEG} = 50.029$$

$$xq_{UEG} := \mu - u(0.995) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad xq_{UEG} = 49.971$$

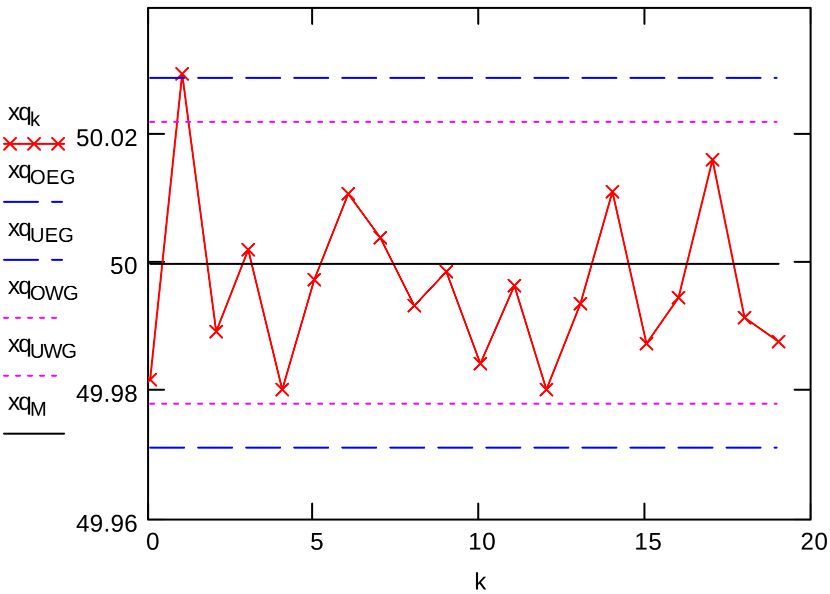
Warngrenzen: (95%ZSB)

$$xq_{OWG} := \mu + u(0.975) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad xq_{OWG} = 50.022$$

$$xq_{UWG} := \mu - u(0.975) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad xq_{UWG} = 49.978$$

Erwartungswert: $xq_M := \mu \qquad xq_M = 50$

Qualitätsregelkarte für die Mittelwerte, Stichprobenumfang n=7:

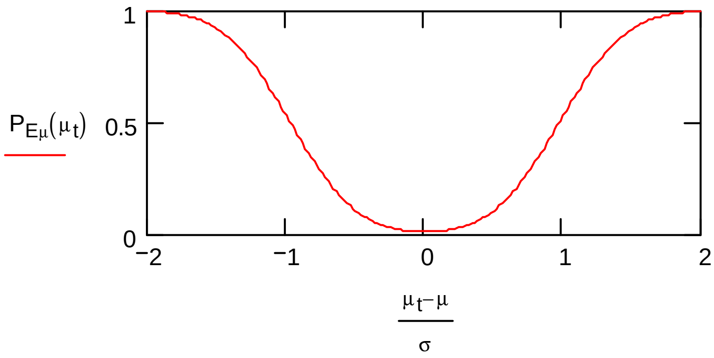


Eingriffswahrscheinlichkeit der Karte bei Mittelwertsverschiebung:

$$G_{xq}(x, \mu, \sigma) := \mathrm{pnorm}\left(x, \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$ Der Mittelwert xq ist normalverteilt mit Mittelwert m und Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$P_{E\mu}(\mu) := 1 - \left(G_{xq}(xq_{OEG}, \mu, \sigma) - G_{xq}(xq_{UEG}, \mu, \sigma)\right)$$

$$\mu_t := \mu - 2\cdot\sigma, (\mu - 2\cdot\sigma) + \frac{\sigma}{50} .. \mu + 2\cdot\sigma$$



Quantile der Chiquadrat (CHI2) -Verteilung und Bestimmung der s-Karte:

Wahrscheinlichkeitsdichte der CHI2-Verteilung

Verteilungsfunktion der CHI2-Verteilung mit f Freiheitsgraden

$$g_{\chi2}(x,f) := \frac{x^{\frac{f}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{f}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}$$

$$G_{\chi2}(x,f) := \int_0^x g_{\chi2}(y,f)\,dy \qquad f := n - 1$$

Seit Mathcad 6.0 eigene Funktionsnamen implementiert:

$$g_{\chi2}(x,f) := \text{dchisq}(x,f) \qquad G_{\chi2}(x,f) := \text{pchisq}(x,f)$$

Formeln für die Kartengrenzen mit a = 1% für die Eingriffsgrenzen und a = 5% für die Warngrenzen:

$$OG = \sqrt{\frac{\chi2\left(1-\frac{\alpha}{2},f\right)}{f}}\cdot\sigma \qquad UG = \sqrt{\frac{\chi2\left(\frac{\alpha}{2},f\right)}{f}}\cdot\sigma$$

Für die Quantile der CHI2-Verteilung steht seit der Version 6.0 die Funktion qchisq zur Verfügung:

Eingriffsgrenzen: $\alpha := 1\cdot\%$

$$\chi2 := \text{qchisq}\left(1-\frac{\alpha}{2},f\right) \qquad s_{OEG} := \sqrt{\frac{\chi2}{f}}\cdot\sigma \qquad s_{OEG} = 0.052$$

$$\chi2 := \text{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2},f\right) \qquad s_{UEG} := \sqrt{\frac{\chi2}{f}}\cdot\sigma \qquad s_{UEG} = 9.918\times10^{-3}$$

Warngrenzen: $\alpha := 5\cdot\%$

$$\chi2 := \text{qchisq}\left(1-\frac{\alpha}{2},f\right) \qquad s_{OWG} := \sqrt{\frac{\chi2}{f}}\cdot\sigma \qquad s_{OWG} = 0.046$$

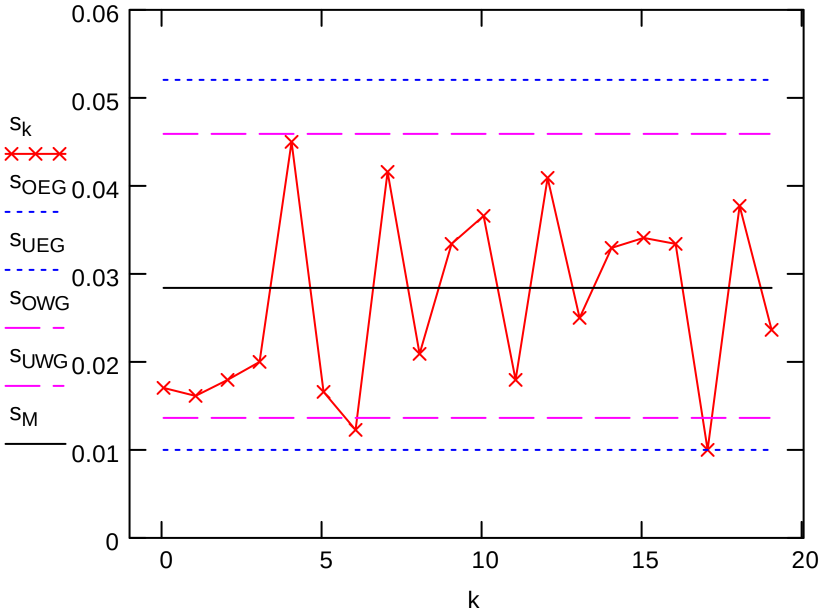
$$\chi2 := \text{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2},f\right) \qquad s_{UWG} := \sqrt{\frac{\chi2}{f}}\cdot\sigma \qquad s_{UWG} = 0.013$$

Erwartungswert der Streuung:

$$a(n) := \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad a(n) = 0.959$$

$$s_M := a(n) \cdot \sigma \qquad s_M = 0.028$$

Graph der Qualitätsregelkarte:



Eingriffswahrscheinlichkeit der Karte bei Vergrößerung/Verkleinerung von s ->st:

$$P_{E\sigma}(\sigma_t) := 1 - \left[G_{\chi 2}\left[\frac{(n-1) \cdot s_{OEG}^2}{\sigma_t^2}, n-1 \right] - G_{\chi 2}\left[\frac{(n-1) \cdot s_{UEG}^2}{\sigma_t^2}, n-1 \right] \right]$$

$$\sigma_t := \frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{100} .. 4 \cdot \sigma$$