Differenzengleichungen und Volkswirtschaftsmodelle

1 Einführende Beispiele zu Differenzengleichungen

Die Wirtschaft steckt voller Kreisläufe. Dabei treten Warenströme auf, im Finanzwesen sind es Geldströme, die von Quellen (Produzenten) zu Senken (Verbrauchern) fließen.

Wir erhalten folgende Bestandsgleichung

$$B_{n+1} = B_n + z_n - a_n$$

z_n Zuflüsse im Zeitintervall n

a_n Abflüsse im Zeitintervall n

Auch Bevölkerungsmodelle haben eine solche Form:

$$B_{n+1} = B_n + g \cdot B_n - s \cdot B_n$$

g ist hier die Geburtenrate, s die Sterberate.

Selbst die Schuldentilgung lässt sich auch als Differenzengleichung formulieren:

$$S_{n+1} = S_n + Z_n - A_n = S_n + p \cdot S_n - A_n$$

Oftmals sind mehrere Größen miteinander verbunden, man spricht dann von einem Differenzengleichungssystem. Ein Beispiel dafür ist das Räuber-Beute-Modell nach Volterra:

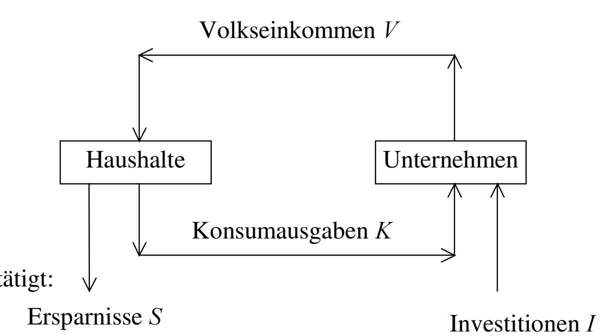
$$B_{n+1} = B_n + \left(g_B - s_B\right) \cdot B_n - a \cdot B_n \cdot R_n$$

$$R_{n+1} = R_n + \left(g_R - s_R\right) \cdot R_n + b \cdot B_n \cdot R_n$$

Wenn die Räuber und Beutetiere sich nicht treffen würden, so könnten sich die Beutetiere ungestört vermehren und eine experimentelle Explosion ihres Bestandes wäre die Folge $\left(g_B > s_B\right)$.

Die Räuber ohne Beutetiere würden in ihrem Bestand exponentiell sinken und aussterben $\left(g_R < s_R\right)$. Die Kollisionswahrscheinlichkeit, dass Räuber auf Beutetiere treffen ist sicher proportional zum Produkt der Populationen. Bei diesen „Kollisionen" sterben Beutetiere und die Räuber kommen zu Kräften um sich wieder vermehren zu können.

Einfache Volkswirtschaft:



Das Volkseinkommen teilt sich in Konsum und Ersparnisse:

$$V_n = K_n + S_n$$

Ein bestimmter Prozentsatz k wird für Konsumausgaben getätigt:

$$K_n = k \cdot V_n \qquad k < 1$$

Das Volkseinkommen im Zeitpunkt $n+1$ resultiert aus Konsum + Investitionen im Jahr n:

$$V_{n+1} = I_n + K_n$$

Ob die Investitionen vorgegeben sind oder intern über das Wirtschaftswachstum bestimmt werden, beeinflusst die ganze Dynamik. Davon später mehr.

2 Definitionen

Eine Funktion der Form

$$F(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots y_n) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

heißt Differenzengleichung k -ter Ordnung. Hat sie speziell die Form

$$y_{n+k} + a_1(n) y_{n+k-1} + a_2(n) y_{n+k-2} + \ldots + a_k(n) \cdot y_n = s(n)$$

so spricht man von einer linearen Differenzengleichung k -ter Ordnung.

Ist $s(n) = 0$, nennt man die Differenzengleichung homogen, anderenfalls inhomogen.

Sind Anfangswerte $y_0, y_1, \ldots. y_{k-1}$ gegeben, so kann die Differentialgleichung durch Rekursion gelöst werden:

$$y_k = -a_1(0) y_{k-1} - a_2(0) y_{k-2} - \ldots - a_k(0) \cdot y_0 + s(0) \qquad (n = 0)$$

$$y_{k+1} = -a_1(1) y_k - a_2(1) y_{k-1} - \ldots - a_k(1) \cdot y_1 + s(1) \qquad (n = 1)$$

$$\vdots$$

Damit ist eine iterative Lösung mit Mathcad z.B. bereits möglich. Man erhält auf diese Weise allerdings keine geschlossene Lösungsformel für y_k . Diese geschlossene Form ist allerdings nur in speziellen Fällen der Differenzengleichung herleitbar.

3. Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

3.1. Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten die lineare inhomogene Dgl. 1. Ordnung

$$y_{n+1} + a(n) \cdot y_n = s(n)$$

die wir numerisch durch iterative Berechnung bei Vorliegen eines Startwertes y_0 sofort mit

$$y_{n+1} = -a(n) \cdot y_n + s(n)$$

lösen können.

Zur Bestimmung einer analytischen Lösung ist die Vorgangsweise ähnlich wie bei den linearen Differentialgleichungen. Zuerst wird die homogene Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung bestimmt, dann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung und anschließend bildet die Summe dieser Lösungen die allgemeine Lösung der Differenzengleichung.

Einen häufigen Sonderfall hat man in der Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, d.h. $a(n) = a = const$. In diesem Fall kann die homogene Differenzengleichung

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$$

mittels Lösungsansatz

$$y_{h,n} = C \cdot \lambda^n \text{ bzw. } y_{h,n+1} = C \cdot \lambda^{n+1}$$

gelöst werden. Wir erhalten nach einsetzen in die homogene Differenzengleichung die Beziehung

$$C \cdot \lambda^n \cdot (\lambda + a) = 0$$

und daraus folgt

$$\lambda = -a \text{ bzw. } y_{h,n} = C \cdot (-a)^n$$

Zur Lösung der inhomogenen Differenzengleichung setzen wir sukzessive ineinander ein:

$$n=0:\ y_1 = -a \cdot y_0 + s(0)$$

$$n=1:\ y_2 = -a \cdot y_1 + s(1) = (-a)^2 \cdot y_0 + (-a) \cdot s(0) + s(1)$$

$$n=2:\ y_3 = -a \cdot y_2 + s(2) = (-a)^3 \cdot y_0 + (-a)^2 \cdot s(0) + (-a) \cdot s(1) + s(2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = -a \cdot y_{n-1} + s(n-1) = (-a)^n \cdot y_0 + (-a)^{n-1} \cdot s(0) + (-a)^{n-2} \cdot s(1) + \ldots + s(n-1)$$
$$= (-a)^n \cdot y_0 + \sum_{t=0}^{n-1} (-a)^{n-1-t} \cdot s(t)$$

Man sieht, dass der vordere Teil die homogene Lösung darstellt und die Summe stellt die partikuläre Lösung dar. Die Störfunktion $s(n)$ bestimmt die partikuläre Lösung. Im Sonderfall einer konstanten Störfunktion erhalten wir mit der Summenformel für endliche geometrische Reihen

$$y_n = (-a)^n \cdot y_0 + s \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (-a)^{n-1-t} = (-a)^n \cdot y_0 + s \cdot \frac{(-a)^n - 1}{(-a) - 1}$$

Bsp 1: Betrachten wir den wirtschaftlichen Kreislauf mit der Bestandsgleichung

$$B_{n+1} = B_n + z_n - a_n$$

wo z_n die Zuflüsse im Zeitintervall n und a_n die Abflüsse im Zeitintervall n darstellen. Vergleichen wir mit der obigen Differenzengleichung

$$y_{n+1} = -a \cdot y_n + s(n)$$

so erkennen wir die Korrespondenz

$$a = -1 \text{ und } s(n) = z_n - a_n .$$

Damit erhalten wir für die allgemeine Lösung (eh klar...)

$$B_n = B_0 + \sum_{t=0}^{n-1} (z_t - a_t)$$

Der Gesamtbestand ergibt sich aus dem Anfangsbestand plus die Summe der Zuflüsse minus Summe der Abflüsse.

Bsp 2: Auch das Bevölkerungsmodell mit konstanter Geburtenrate g und konstanter Sterberate s hat eine solche Form:

$$B_{n+1} = B_n + g \cdot B_n - s \cdot B_n = B_n \cdot (1 + g - s)$$

Es stellt sogar eine homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung dar und besitzt als Lösung

$$B_n = B_0 \cdot (1 + g - s)^n$$

Ist $g>s$ so gibt's eine exponentielle Bevölkerungsexplosion, im umgekehrten Fall ein Aussterben.

Bsp 3: Die Schuldentilgung ist uns aus dem Abschnitt Finanzmathematik bekannt und lässt sich auch als Differenzengleichung formulieren:

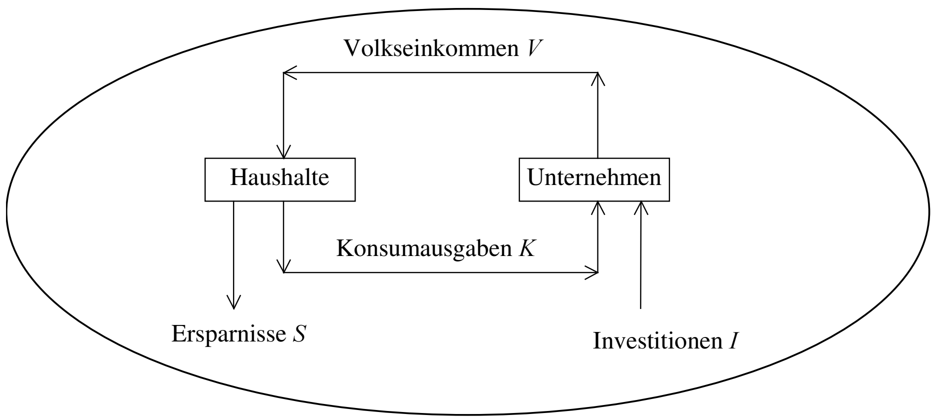
$$S_{n+1} = S_n + Z_n - A_n = S_n + p \cdot S_n - A_n = S_n \cdot (1 + p) - A_n$$

Im Fall einer konstanten jährlichen Annuität A erhalten wir für die Restschuld nach n Jahren:

$$S_n = (1+p)^n \cdot S_0 - A \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1} = q^n \cdot S_0 - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Diese Beziehung haben wir bereits im Abschnitt Finanzmathematik hergeleitet.

Bsp 4: Betrachten Sie folgende einfache **Volkswirtschaft**:



Das Volkseinkommen teilt sich in Konsum und Ersparnisse:

$$V_n = K_n + S_n$$

Ein bestimmter Prozentsatz k wird für Konsumausgaben getätigt:

$$K_n = k \cdot V_n \qquad k < 1$$

Das Volkseinkommen im Zeitpunkt $n+1$ resultiert aus Konsum + Investitionen im Jahr n:

$$V_{n+1} = I_n + K_n$$

a) Bestimmen Sie die Lösung für V_n unter der Annahme, dass V_0 und die Investitionen $I_0, I_1, ..., I_{n-1}$ bekannt sind.

b) Diskutieren Sie den Sonderfall $I_n = I =$ konstant. Da $k < 1$ kann man Aussagen über den Grenzzustand $n \to \infty$ machen. Welche?

c) Da Investitionen oftmals periodischen Schwankungen unterliegen, simulieren Sie die Volkswirtschaft mit den Investitionen

$$I_n = I_0 + \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot n)$$

für einen Zeitbereich von 30 Zeiteinheiten und nachstehenden Parameterwerten

$$V_0 := 550 \qquad I_0 := 130 \qquad I_p := 20 \qquad \omega := 1 \qquad k := 0.8$$

mit Hilfe von Mathcad. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf. Um welchen Grenzwert pendelt das Volkseinkommen?

⇨ Dieses Modell mit von außen vorgegebenen Investitionen finden Sie in der Datei VOLKSWIR1.MCD.

3.2. Nichtlineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Für nichtlineare Differenzengleichungen kann man üblicherweise keine geschlossene Lösungsformel finden. Durch die Nichtlinearität können ganz neue Effekte auftreten, unter anderem ist auch chaotisches Verhalten möglich.

Wir wollen nun ein Bevölkerungsmodell mit Berücksichtigung der Umweltverschmutzung untersuchen. Wir wollen die Sterberate vom Grad der Umweltverschmutzung abhängig machen. Wir werden erkennen, dass ohne Beseitigung von Altlasten ein Aussterben der Menschheit unumgänglich ist. Wir simulieren auch die Auswirkungen eines Krieges auf die Bevölkerungsentwicklung.

Die Lösung des Differenzengleichungssystems führen wir direkt in Mathcad durch:

Selbstmord durch wachsende Umweltbelastung

1. Problemstellung:

Wir betrachten ein einfaches Bevölkerungsmodell mit konstanter Geburtenrate g, aber mit einer von der Umweltverschmutzung abhängigen Sterberate s.

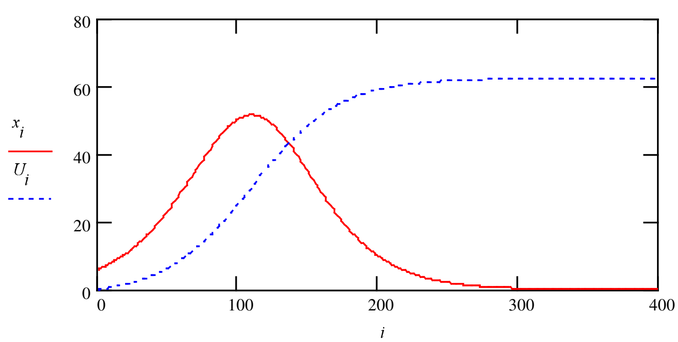
$g := 6 \cdot \%$	Geburtenrate
$s_0 := 3 \cdot \%$	Sterberate ohne Umweltverschmutzung
$x_0 := 6$	Anfangspopulation als die Erde noch nicht verschmutzt war
$U_0 := 0$	Anfängliche Umweltverschmutzung ist 0
$z_U := 0.01$	Zuwachs der Umweltverschmutzung pro Jahr (Zeitschritt) und pro Populationseinheit
$z_s := 0.001$	Zunahme der Sterberate pro Populationseinheit und pro Umweltverschmutzungseinheit

2. Iteration zur Bestimmung des Verlaufs von Population und Verschmutzung:

$I := 400$	Anzahl der Zeitschritte
$i := 0..I$	Zeitschrittindex

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ U_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + g \cdot x_i - \left(s_0 + z_s \cdot U_i\right) \cdot x_i \\ U_i + z_U \cdot x_i \end{bmatrix}$$

Iteration von Population und Umweltbelastung.



Nach anfänglichem Wachstum der Bevölkerung erreicht man bei

$$g = s_0 + z_s \cdot U_i$$

ein Maximum und danach stirbt die Menschheit aus. Einen Ausweg aus diesem Dilemma gibt es nur durch gezielte Reduktion der Umweltbelastung und Entfernen von Altlasten!

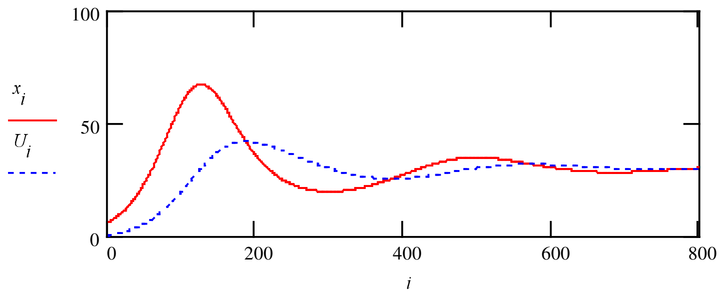
3. Heilung der Umwelt durch Reduktion der Umweltbelastung:

$\lambda := 0.01$

Die Reduktion der Umweltbelastung verkörpern wir durch eine Art Zerfallskonstante der Umweltbelastung. Die Reduktion kann dabei von den Menschen ausgehen oder durch natürlichen Abbau von Schadstoffen.

$N := 800 \qquad i := 0..N$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ U_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \left(x_i + g\cdot x_i\right) - \left(s_0 + z_s\cdot U_i\right)\cdot x_i \\ \left(U_i + z_U\cdot x_i\right) - \lambda\cdot U_i \end{bmatrix}$$



Die Reduktion der Schadstoffe verhindert ein Aussterben der Menschheit!

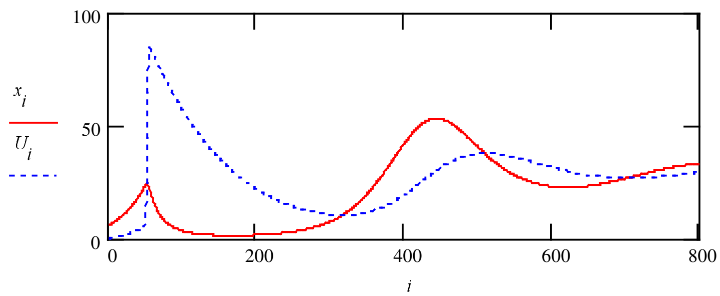
4. Sprunghafter Anstieg der Umweltverschmutzung durch einen Krieg:

$A := 20 \qquad T := 4$

$f(i) := A\cdot(\Phi(i-50) - \Phi(i-(50+T)))$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ U_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \left(x_i + g\cdot x_i\right) - \left(s_0 + z_s\cdot U_i\right)\cdot x_i \\ \left[\left(U_i + z_U\cdot x_i\right) - \lambda\cdot U_i\right] + f(i) \end{bmatrix}$$

Ein Krieg stellt einen sprunghaften Anstieg der Umweltbelastung/Jahr um eine Amplitude A für die Dauer T dar. Wir betrachten einen vierjährigen Krieg, beginnend im Jahr 50.



Die Menschheit fängt sich wieder, da wir auch "Komma-Menschen" zulassen. Wenn die Bevölkerung der Erde allerdings unter einen bestimmten Wert fällt, müssen wir mit dem Aussterben rechnen!

$x_{200} = 1.725$

⇨ Über unsere Zukunft Gedanken machen können Sie sich mit der Datei UMWELT.MCD.

4. Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten speziell die lineare inhomogene Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Störfunktion:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = s$$

Zur Bestimmung einer analytischen Lösung ist die Vorgangsweise ähnlich wie bei den linearen Differentialgleichungen. Zuerst wird die homogene Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung bestimmt, dann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung und anschließend bildet die Summe dieser Lösungen die allgemeine Lösung der Differenzengleichung.

Die homogene Differenzengleichung

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

wird mittels Lösungsansatz

$$y_{h,n} = C \cdot \lambda^n \text{ bzw. } y_{h,n+1} = C \cdot \lambda^{n+1} \text{ bzw. } y_{h,n+2} = C \cdot \lambda^{n+2}$$

gelöst. Wir erhalten nach einsetzen in die homogene Differenzengleichung die gleiche charakteristische Gleichung wie bei den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$C \cdot \lambda^n \cdot (\lambda^2 + \lambda \cdot a_1 + a_0) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

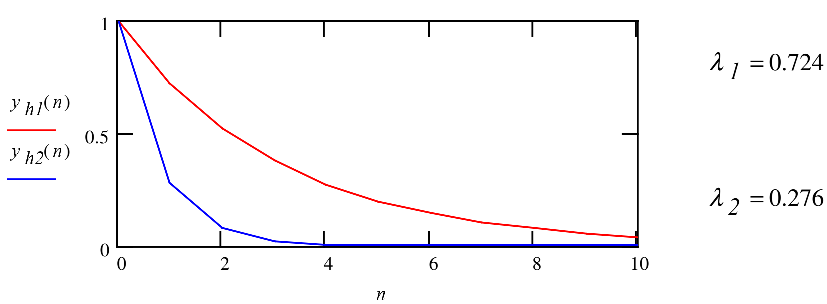
ist eine quadratische Gleichung und liefert deshalb 3 Lösungsvarianten:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

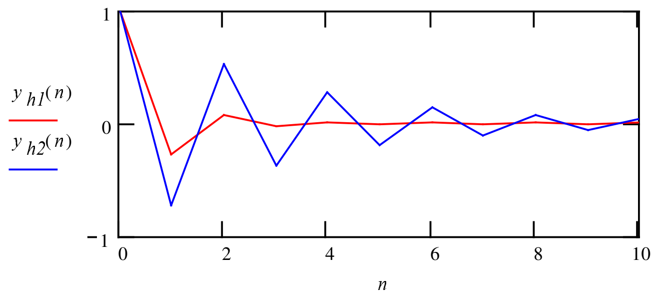
a) $\frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$ 2 verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\boxed{y_{h,n} = C_1 \cdot y_{h1,n} + C_2 \cdot y_{h2,n} = C_1 \cdot \lambda_1{}^n + C_2 \cdot \lambda_2{}^n}$$

Sind die Lösungen positiv und betragsmäßig kleiner 1 (größer 1), so erhält man exponentiell abklingende (anwachsende) homogene Lösungen:



Sind die Lösungen negativ und betragsmäßig kleiner 1 (größer 1), so erhält man exponentiell abklingende (anwachsende) aber oszillierende homogene Lösungen:



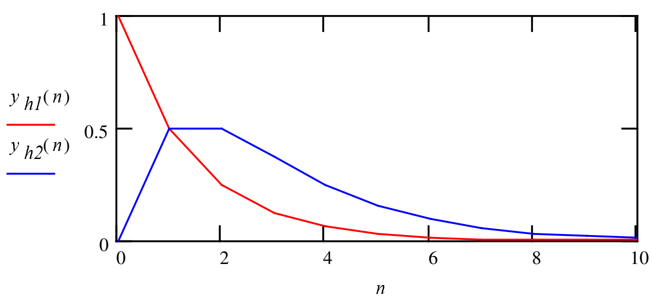
$\lambda_1 = -0.276$

$\lambda_2 = -0.724$

b) Grenzfall $\dfrac{a_1^2}{4} - a_0 = 0$, reelle Doppellösung $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{2}$

$$\boxed{y_{h,n} = C_1 \cdot y_{h1,n} + C_2 \cdot y_{h2,n} = C_1 \cdot y_{h1,n} + C_2 \cdot n \cdot y_{h1,n} = C_1 \cdot \lambda_1^{\,n} + C_2 \cdot n \cdot \lambda_1^{\,n}}$$

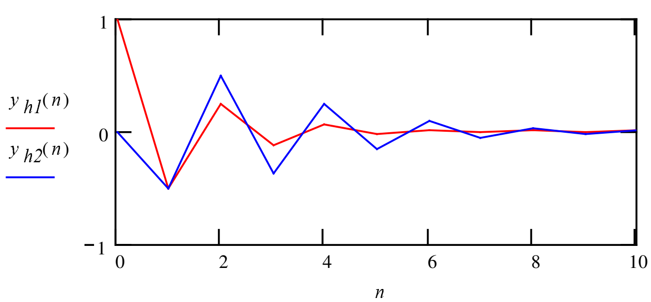
Sind die Lösungen positiv gleich und betragsmäßig kleiner 1 (größer 1), so erhält man exponentiell abklingende (anwachsende) homogene Lösungen:



$\lambda_1 = 0.5$

$\lambda_2 = 0.5$

Sind die Lösungen negativ gleich und betragsmäßig kleiner 1 (größer 1), so erhält man exponentiell abklingende (anwachsende) aber oszillierende homogene Lösungen:



$\lambda_1 = -0.5$

$\lambda_2 = -0.5$

c) Schwingfall $\dfrac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$, konjugiert komplexe Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = r \cdot e^{\pm j \cdot \varphi}$$

$$r = \left|\lambda_{1,2}\right| = \sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda_1))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda_1))^2} = \sqrt{a_0}$$ Betrag der komplexen Zahl

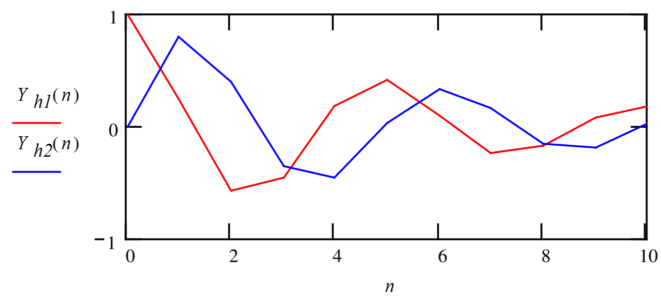
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda_1)}{\operatorname{Re}(\lambda_1)}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}}{\frac{-a_1}{2}}\right)$$ Argument der komplexen Zahl

$$y_{h,n} = C_1 \cdot y_{h1,n} + C_2 \cdot y_{h2,n} = C_1 \cdot \lambda_1^{\ n} + C_2 \cdot \lambda_2^{\ n} = r^n \cdot \left(C_1 \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi} + C_2 \cdot e^{-j \cdot n \cdot \varphi}\right) =$$
$$= r^n \cdot \left(C_1 \cdot \left(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)\right) + C_2 \cdot \left(\cos(n\varphi) - j\sin(n\varphi)\right)\right) =$$
$$= r^n \cdot \left(\left(C_1 + C_2\right) \cdot \cos(n\varphi) + j \cdot \left(C_1 - C_2\right) \cdot \sin(n\varphi)\right)$$

Damit erhalten wir folgende Lösung im Fall konjugiert komplexer Lösungen:

$$\boxed{y_{h,n} = r^n \cdot \left(D_1 \cdot \cos(n\varphi) + D_2 \cdot \sin(n\varphi)\right) = D_1 \cdot Y_{h1,n} + D_2 \cdot Y_{h2,n}}$$

Sind die Lösungen betragsmäßig kleiner 1 (größer 1), so erhält man exponentiell abklingende (anwachsende) oszillierende homogene Lösungen:



$\lambda_1 = 0.25 + 0.798i$

$\lambda_2 = 0.25 - 0.798i$

$r = 0.837$

$\varphi = 72.614 \circ deg$

Zusammenfassend können wir sagen, dass für $|\lambda_{1,2}| < 1$ die homogene Lösung für $n \to \infty$ zeitlich abklingt und damit stabil ist, für $|\lambda_{1,2}| > 1$ wächst die homogene Lösung immer weiter an und ist damit instabil.

Wir wollen nun noch die partikuläre Lösung im Fall einer konstanten Störfunktion bestimmen:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = s$$

Da auch die Koeffizienten konstant sind, erhalten wir für die partikuläre Lösung ebenfalls eine Konstante:

$$y_{p,n} = \frac{s}{1 + a_1 + a_0}$$

Die allgemeine Lösung ist dann die Summe aus homogener und partikulärer Lösung:

$$y_n = y_{h,n} + y_{p,n} = \left\{ \begin{array}{c} C_1 \cdot \lambda_1^{\ n} + C_2 \cdot \lambda_2^{\ n} + \dfrac{s}{1 + a_1 + a_0}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \ \mathit{reell} \\ C_1 \cdot \lambda_1^{\ n} + C_2 \cdot n \cdot \lambda_1^{\ n} + \dfrac{s}{1 + a_1 + a_0}, \lambda_1 = \lambda_2 \ \ \mathit{reell} \\ r^n \cdot \left(D_1 \cdot \cos(n\varphi) + D_2 \cdot \sin(n\varphi)\right) + \dfrac{s}{1 + a_1 + a_0}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \ \mathit{konj.komplex} \end{array} \right\}$$

Bsp 1: **Fibonacci Zahlen**

Diese Zahlenfolge ist wie folgt festgelegt:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

Das Folgenglied ist also durch die Summe der beiden Folgenvorgänger definiert. Mit den Anfangswerten

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1$$

ergibt sich die Zahlenfolge nach Fibonacci:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2,\ y_4 = 3,\ y_5 = 5,\ y_6 = 8,\ y_7 = 13,\ y_8 = 21, \ldots.$$

Ein Vergleich mit der zuvor gelösten Differenzengleichung

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = s$$

ergibt

$$a_1 = -1,\ a_0 = -1,\ s = 0$$

und damit erhält man für die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

zwei verschiedene reelle Lösungen. Wegen $s = 0$ handelt es sich um eine homogene Differenzengleichung. Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$y_{h,n} = C_1 \cdot y_{h1,n} + C_2 \cdot y_{h2,n} = C_1 \cdot \lambda_1^{\,n} + C_2 \cdot \lambda_2^{\,n} = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Die spezielle Lösung erhalten wir durch Einsetzen der Anfangswerte:

$$y_0 = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y_1 = 1 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = C_1 \cdot \sqrt{5}$$

$$y_{h,n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Mathcaddokument dazu:

Fibonacci-Zahlenfolge:

$y_0 := 0 \qquad y_1 := 1 \qquad n := 0..15$

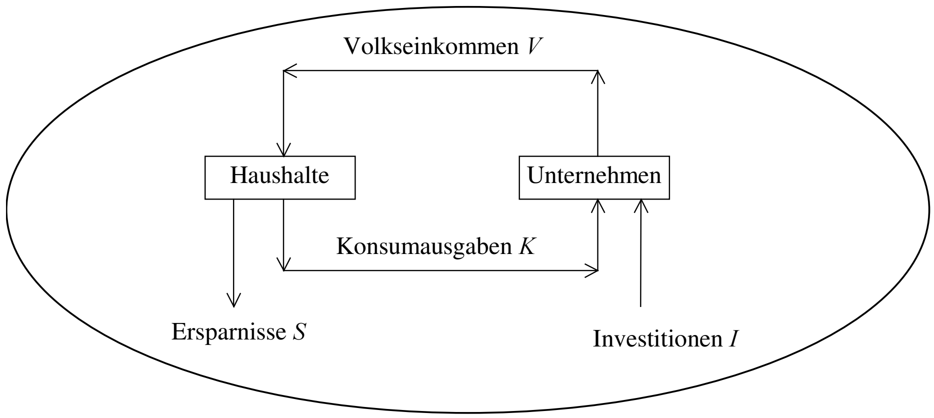
$y_{n+2} := y_{n+1} + y_n$ Iteration

$y^T = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 13\ \ 21\ \ 34\ \ 55\ \ 89\ \ 144\ \ 233\ \ 377\ \ 610\ \ 987\ \ 1597)$

$y_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ Lösung der Differenzengleichung

$y^T = (0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 13\ \ 21\ \ 34\ \ 55\ \ 89\ \ 144\ \ 233\ \ 377\ \ 610\ \ 987\ \ 1597)$

Bsp 2: Multiplikator-Akzelerator-Modell einer **Volkswirtschaft** nach **Samuelson** (1939):



Das Volkseinkommen teilt sich in Konsum und Ersparnisse:

$$V_n = K_n + S_n$$

Ein bestimmter Prozentsatz k wird für Konsumausgaben getätigt:

$$K_n = K_a + k \cdot V_n \qquad k < 1$$

K_a ist ein Minimalkonsum für die Befriedigung der Grundbedürfnisse. Das Volkseinkommen im Zeitpunkt $n+1$ resultiert aus Konsum + Investitionen im Jahr n:

$$V_{n+1} = I_n + K_n$$

Die Investitionen seien proportional zur Zunahme des Konsums (dies versteht man unter Akzeleratorprinzip):

$$I_n = I_a + c \cdot (K_n - K_{n-1}) \text{ für } n \geq 1$$

$$I_0 = I_a$$

I_a sind die Investitionen die auch ohne Konsumzunahme getätigt werden. Ein ähnlicher Ansatz wird im Akzeleratormodel nach Hicks gemacht (vgl. unten). Welche Differenzengleichung resultiert daraus für das Volkseinkommen bzw. Bruttosozialprodukt:

$$V_{n+1} = I_n + K_n = I_a + c \cdot (K_n - K_{n-1}) + K_n = I_a + c \cdot (K_a + k \cdot V_n - K_a - k \cdot V_{n-1}) + K_a + k \cdot V_n$$

Nach Umnummerierung erhalten wir:

$$V_{n+2} = I_a + c \cdot k \cdot (V_{n+1} - V_n) + K_a + k \cdot V_{n+1}$$

Jetzt bringen wir diese Differenzengleichung auf die Standardform einer linearen Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$V_{n+2} - (c+1) \cdot k \cdot V_{n+1} + c \cdot k \cdot V_n = I_a + K_a$$

Ein Vergleich mit der zuvor gelösten Differenzengleichung

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = s$$

ergibt

$$a_1 = -(c+1) \cdot k,\ a_0 = c \cdot k,\ s = I_a + K_a$$

und damit erhält man für die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = \frac{(c+1) \cdot k}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+1)^2 \cdot k^2}{4} - c \cdot k}$$

Den Schwingfall $\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$ mit konjugiert komplexe Lösungen erhalten wir für:

$$k < \frac{4 \cdot c}{(c+1)^2}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel 0 gesetzt und nach c aufgelöst ergibt:

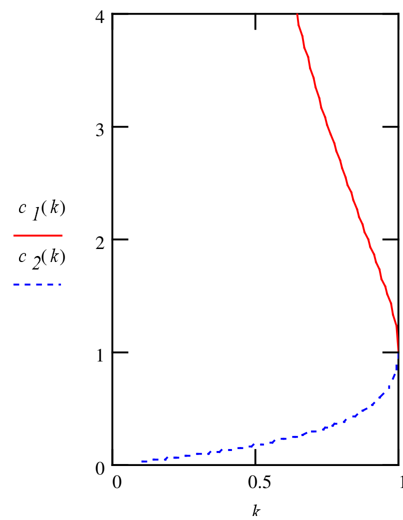
$$c_{1,2} = -1 + \frac{2}{k} \cdot (1 \pm \sqrt{1-k})$$

Da $k < 1$ gilt, erhält man für jeden k-Wert einen Bereich zwischen $c_2(k) < c < c_1(k)$ (vgl. Abbildung rechts).

$$c_1(k) := -1 + \frac{2}{k} \cdot \left(1 + \sqrt{1-k}\right)$$

$$c_2(k) := -1 + \frac{2}{k} \cdot \left(1 - \sqrt{1-k}\right)$$

$$k := 0.1, 0.11 .. 1$$



Im Schwingfall haben wir gesehen, dass nur dann eine konvergente Lösung für

$$r = \left|\lambda_{1,2}\right| = \sqrt{a_0} = \sqrt{c \cdot k} < 1$$

auftritt. Wegen $k < 1$ erhalten wir nur dann die Bedingung für eine konvergente oszillierende Lösung wenn

$$c_2(k) < c < 1$$

erfüllt ist. In diesem Fall erhalten wir als Grenzwert für das Volkseinkommen:

$$V_\infty = y_\infty = \frac{s}{1 + a_1 + a_0} = \frac{I_a + K_a}{1 - (c+1) \cdot k + c \cdot k} = \frac{I_a + K_a}{1 - k}$$

Wir simulieren das volkswirtschaftliche Modell nach Samuelson mit Mathcad:

Direkte numerische Lösung mittels Iteration:

$I_a := 30 \qquad K_a := 40 \qquad k := 75\cdot\% \qquad c := 0.8$ Parameterwerte

$c_1(k) := -1 + \frac{2}{k}\cdot\left(1 + \sqrt{1-k}\right) \qquad c_1(k) = 3 \qquad c_2(k) := -1 + \frac{2}{k}\cdot\left(1 - \sqrt{1-k}\right) \qquad c_2(k) = 0.333$

Grundgleichungen ineinander eingesetzt ergeben Differenzengleichung für Volkseinkommen:

$V_0 := 200 \qquad V_1 := 210 \qquad n := 0..20$

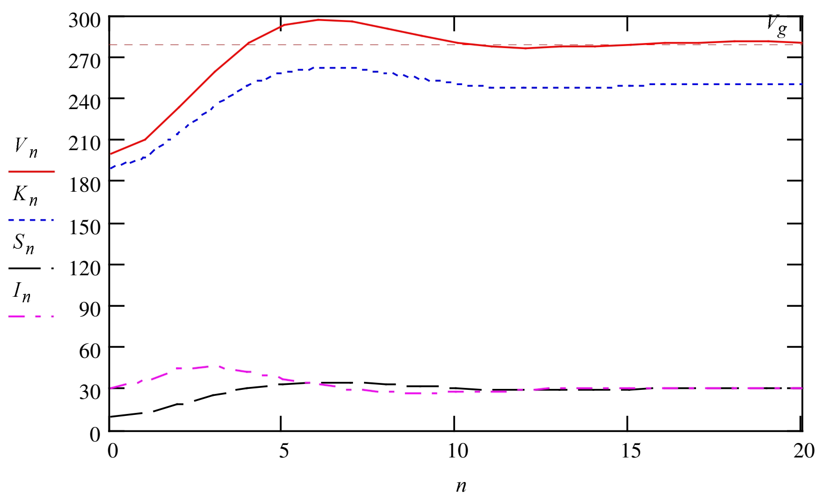
$$V_{n+2} := I_a + c\cdot k\cdot\left(V_{n+1} - V_n\right) + K_a + k\cdot V_{n+1}$$

$$K_n := K_a + k\cdot V_n$$

$$S_n := V_n - K_n$$

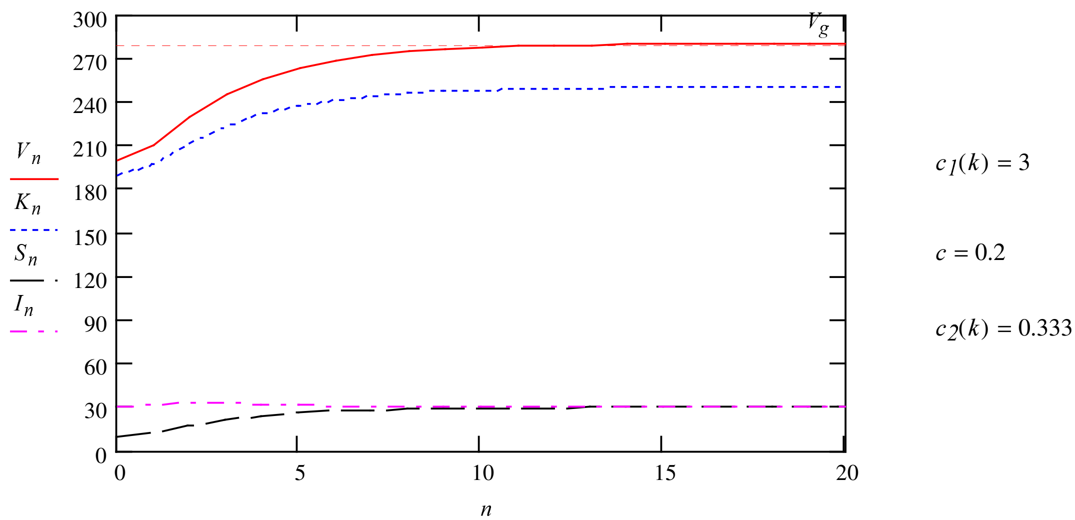
$$I_n := I_a + wenn\left[n = 0, 0, c\cdot\left(K_n - K_{n-1}\right)\right]$$

$V_g := \frac{I_a + K_a}{1-k} \qquad V_g = 280$

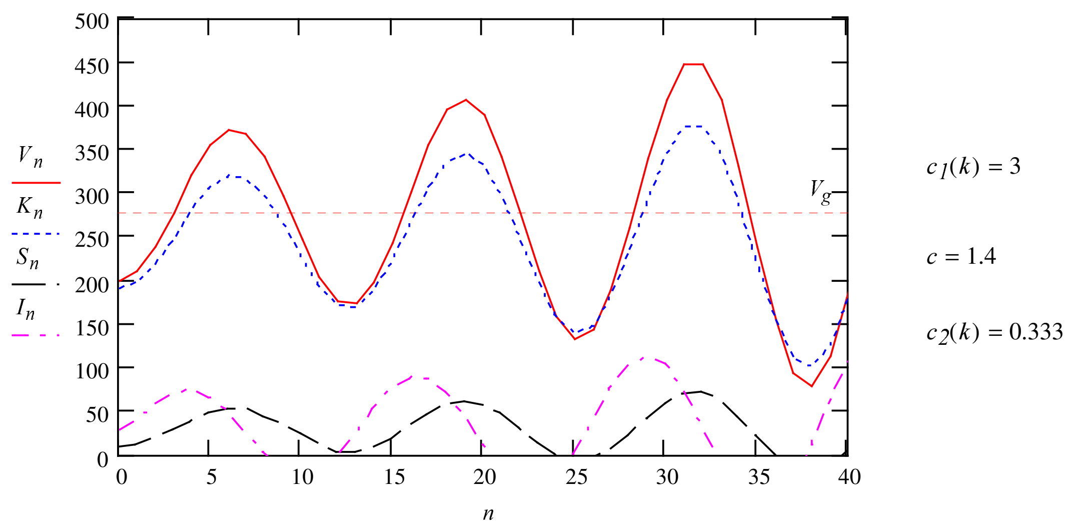


Wir können aus dem Diagramm auch entnehmen, dass für $n \to \infty$ die Investitionen und die Sparanlagen einander annähern.

Für $c < c_1(k)$ erhalten wir eine nicht oszillierende, aber stabile Lösung:



Für $1 < c < c_1(k)$ erhalten wir eine instabile oszillierende Lösung. Zudem treten unsinnige negative Werte bei Investitionen auf:



⇨ Das Modell nach Samuelson finden Sie in der Datei VOLKSWIR2.MCD.

Bsp3: Multiplikator-Akzelerator-Modell einer **Volkswirtschaft** nach **Hicks** (1950):

Die Grundgleichungen sind dem Modell nach Samuelson sehr ähnlich. Die ersten 3 sind identisch mit dem Samuelson-Modell. Das Volkseinkommen teilt sich in Konsum und Ersparnisse:

$$V_n = K_n + S_n$$

Ein bestimmter Prozentsatz k wird für Konsumausgaben getätigt:

$$K_n = K_a + k \cdot V_n \qquad k < 1$$

K_a ist ein Minimalkonsum für die Befriedigung der Grundbedürfnisse. Das Volkseinkommen im Zeitpunkt $n+1$ resultiert aus Konsum + Investitionen im Jahr n:

$$V_{n+1} = I_n + K_n$$

Der Ansatz bei den Investitionen unterscheidet sich bei Hicks ein wenig. Diese seien jetzt nicht proportional zur Zunahme des Konsums sondern zur Zunahme des Volkseinkommens (ist kein großer Unterschied, da die Konsumausgaben ja auch zum Volkseinkommen proportional sind):

$$I_n = I_a + c \cdot (V_n - V_{n-1}) \text{ für } n \geq 1$$

$$I_0 = I_a$$

I_a sind die Investitionen die auch ohne Konsumzunahme getätigt werden.

a) Welche Differenzengleichung resultiert daraus für das Volkseinkommen bzw. Bruttosozialprodukt?

b) Untersuchen Sie die charakteristische Gleichung und analysieren Sie, wann eine oszillierende Lösung auftritt und wann eine stabile Lösung auftritt.

c) Welcher Grenzwert für das Volkseinkommen stellt sich ein?

d) Simulieren Sie die Volkswirtschaft mit Hilfe von Mathcad für folgende Parameterkombinationen:

Oszillierend und stabil:

$I_a := 30 \qquad K_a := 40 \qquad k := 75 \cdot \% \qquad c := 0.8$

$V_0 := 200 \qquad V_1 := 210$

Nicht oszillierend, stabil:

$I_a := 30 \qquad K_a := 40 \qquad k := 75 \cdot \% \qquad c := 0.2$

$V_0 := 200 \qquad V_1 := 210$

Oszillierend, aber instabil:

$I_a := 30 \qquad K_a := 40 \qquad k := 75 \cdot \% \qquad c := 1.1$

$V_0 := 200 \qquad V_1 := 210$

⇨ Das Modell nach Samuelson finden Sie in der Datei VOLKSWIR3.MCD.