



Angew. Mathematik / Fachtheorie – Übersicht

| Nr | Kurztitel | Bereich | Dateiname |
|----|--|--|---------------------------|
| 1 | Investitionsvergleich | Finanzmathematik | hoe_investitionsvergleich |
| 2 | Amortisationsrechnung | Finanzmathematik | hoe_amortisation |
| 3 | Optimale Nutzungsdauer bei Ersatzinvestitionen | Finanzmathematik | hoe_opt-nutz-ersatzinv |
| 4 | Lineare Ausgleichsrechnung – Kostenfunktion | Finanzmathematik, Ausgleichsrechnung | hoe_kostenfunktion |
| 5 | Entwurf von Regelkarten, Prozeßüberwachung | Qualitätssicherung - Statistik | hoe_QRK |
| 6 | Geigerzähler - Prüfung auf Poissonverteilung | Qualitätssicherung – Statistik | hoe_geigerzähler |
| 7 | Vergleich Einzel-Doppelstichprobenanweisung | Qualitätssicherung – Statistik | hoe_einzel-doppelstichpr |
| 8 | Stichprobensysteme n-k und n-c - Anweisungen | Qualitätssicherung – Statistik | hoe_n-k_n-c |
| 9 | Nichtlineare Kennlinie einer Lampe | Ausgleichsrechnung/ ET | hoe_lampe |
| 10 | Approx. der Dampfdruckkurve | Ausgleichsrechnung/ MB | hoe_dampfdrk |
| 11 | Ausgleichsrechng / NTC-Kennlinie | Ausgleichsrechnung / ET | hoe_ntc |
| 12 | Ausgleichsrechnung - Keplergesetz | Ausgleichsrechnung – Physik | hoe_kepler |
| 13 | Stetige Ausgleichsrechnung - Kettenlinie | Ausgleichsrechnung | hoe_kettenlinie |
| 14 | Fourierpolynome | Fourierreihen | hoe_fourierpolynome1 |
| 15 | Doppelweggleichrichter | Differentialgleichungen/ ET | hoe_fourierpolynome2 |
| 16 | Mechanik: Kopplung Lokomotive – Waggon | Differentialgleichungen Laplace-Transf | hoe_zug |
| 17 | Regelungstechnik: PT1-Strecke, PI-Regler | Differentialgleichungen Laplace-Transf. | hoe_regeltec |
| 18 | Nichtlineare Schwingung | Differentialgleichungen (Runge-Kutta_Verf.) | hoe_schwing |
| 19 | Räuber-Beute-System (Volterra) | Differentialgleichungen Differenzgleichungen | hoe_volterra |
| 20 | Volkswirtschaft (Simulation) | Differenzgleichungen | hoe_volksiwir |

Klausur Angewandte Mathematik und Fachtheorie

Beispiele aus dem Bereich Finanzmathematik

1) HG5b-2000: Betriebswirtschaft, Investitionsrechnung

Bei einer Investition haben Sie die Auswahl zwischen 3 Systemen die gleiche Einnahmen versprechen, aber unterschiedliche Anschaffungs- und Wartungskosten verursachen.

| t | E_t | A_{II} | A_{III} | A_{III} |
|-----|--------|----------|-----------|-----------|
| 0 | | 400000 | 200000 | 320000 |
| 1 | 150000 | 35000 | 90000 | 60000 |
| 2 | 170000 | 38000 | 100000 | 65000 |
| 3 | 200000 | 42000 | 110000 | 70000 |
| 4 | 180000 | 47000 | 120000 | 75000 |

- Für welche Variante entscheiden Sie sich aufgrund des Kapitalwertes bei einem Zinsfuß von $p=8\%$?
- Wie groß ist der interne Zinsfuß jeder Investition? Wenn Sie aufgrund des internen Zinssatzes Ihre Entscheidung fällen müssten, für welche Investition würden Sie sich entscheiden?
- Zeichnen Sie den Verlauf des Kapitalwertes in Abhängigkeit vom Zinssatz p für alle Investitionen in ein Diagramm.
 - Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>3.MCD.

2) HG5a-2001: Investitionsrechnung, Amortisationszeit

Eine neu anzuschaffende Anlage 1 (Hackschnitzelheizung) hat relativ hohe Investitionskosten von 240 GE, dafür aber relativ geringe jährliche nachschüssige Betriebskosten von 13 GE mit einer geringen jährlichen Betriebskostensteigerung von 2%. Diese Anlage soll mit einer anderen Anlage 2 (Ölheizung) mit geringeren Investitionskosten von 150 GE und jährlichen Betriebskosten von 24 GE (höhere Betriebskostensteigerung 3,5% wegen Heizölunsicherheit) verglichen werden. Der Zinssatz betrage $p=6,5\%$.

- Ermitteln Sie den Kapitalwertverlauf in einem Zeitraum von 15 Jahren für beide Anlagen und zeichnen Sie diesen in ein Diagramm ein.
 - Wann amortisiert sich die Anschaffung der Anlage 1 gegenüber Anlage 2?
 - Welche Kosteneinsparung ergibt sich am Ende von 15 Jahren bezogen auf den Zeitpunkt 0?
 - Die Hackschnitzelheizung ist für die Umwelt sicher besser. Wenn man diesen Aspekt einmal unberücksichtigt lässt, ab welchen jährlichen Betriebskosten der Hackschnitzelheizung würde sich letztere bei einem Zeitraum von 15 Jahren aus betriebswirtschaftlicher Sicht im Vergleich zur Ölheizung nicht mehr rechnen?
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>2.MCD.

3) HW5b-2001: Betriebswirtschaft, Investitionsrechnung

Bei einer Investition haben Sie die Auswahl zwischen 2 Systemen die gleiche Einnahmen versprechen, aber unterschiedliche Anschaffungs-, Personal- und Wartungskosten verursachen. Auch die Anlagenrestwerte sind unterschiedlich.

| t | E_t | A_{II} | V_{II} | A_{III} | V_{III} |
|-----|--------|----------|----------|-----------|-----------|
| 0 | | 450000 | 450000 | 300000 | 300000 |
| 1 | 150000 | 20000 | 375000 | 70000 | 250000 |
| 2 | 170000 | 40000 | 300000 | 80000 | 200000 |
| 3 | 200000 | 60000 | 225000 | 90000 | 150000 |
| 4 | 230000 | 80000 | 150000 | 100000 | 100000 |
| 5 | 190000 | 120000 | 75000 | 110000 | 50000 |
| 6 | 160000 | 120000 | 0 | 130000 | 0 |

1. Berechnen Sie in einem ersten Schritt die optimale Nutzungsdauer beider Investitionen bei einem Zinssatz von $p=6\%$. Welche der beiden Investitionen bietet im Maximum einen höheren Kapitalwert?
 2. Da die Produktion über einen längeren Zeitraum aufrecht erhalten werden soll, überlegen Sie sich eine einmalige Ersatzinvestition. Da Sie nicht wissen, welches System sich im Betrieb besser bewährt, überlegen Sie sich folgende Strategie. Sie ersetzen System 1 nach einer noch zu optimierenden Zeit n_1 durch das System 2 und beenden die Produktion nach n_1+n_2 Jahren. Berechnen Sie die optimale Gesamtnutzungsdauer n_1+n_2 und den zugehörigen Kapitalwert. Zeichnen Sie den Verlauf des Gesamtkapitalwertes in Abhängigkeit von n_1 .
 3. Macht es einen Unterschied zuerst System 2 anzuschaffen und dann durch System 1 zu ersetzen? Wenn ja, welche Variante bringt mehr Gewinn? Zeichnen Sie den Verlauf des Gesamtkapitalwertes in Abhängigkeit von n_2 .
 4. Sie glauben nun, dass 2 verschiedene Systeme zu verwenden, doch nicht so günstig ist. Deshalb entscheiden Sie sich für jenes System, das den maximalen Kapitalwert liefert und ersetzen dieses System dann durch das gleiche. Welche Gesamtnutzungsdauer ergibt sich nun und wie hoch ist der maximale Gesamtkapitalwert?
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe entweder den TI92 oder Mathcad. Bei Verwendung von Mathcad speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>2.MCD. Bei Verwendung des TI92 müssen alle Rechenschritte handschriftlich festgehalten werden.

4) HW5a-1998: Betriebswirtschaft, Ausgleichsrechnung, Kosten- und Gewinnfunktion

Sie haben Daten (x_i, K_i) aufgenommen, die die produzierten Stückzahlen (in Einheiten von 1000 Stück) und die anfallenden Kosten (in Geldeinheiten von 1000 ATS) repräsentieren. Die Daten finden Sie in der Datei KOSTEN.PRN vor (vgl. auch Tabelle) und können mit der Funktion *PRNLESEN* von Mathcad in eine 2 spaltige Datenmatrix eingelesen werden.

| x | K | x | K | x | K | x | K |
|---|-------|----|------|----|------|----|-------|
| 0 | 10 | 8 | 18,9 | 16 | 35,6 | 24 | 69,7 |
| 1 | 11 | 9 | 20,3 | 17 | 38,9 | 25 | 75,5 |
| 2 | 11,9 | 10 | 22 | 18 | 42,3 | 26 | 82 |
| 3 | 12,85 | 11 | 23,8 | 19 | 46 | 27 | 88,8 |
| 4 | 14 | 12 | 25,7 | 20 | 50 | 28 | 96 |
| 5 | 15,1 | 13 | 28 | 21 | 54,4 | 29 | 103,8 |
| 6 | 16,3 | 14 | 30,4 | 22 | 59 | 30 | 112 |
| 7 | 17,5 | 15 | 32,9 | 23 | 64,2 | 31 | 120,7 |

1. Setzen Sie als Fitfunktion ein Polynom 3. Grades an und ermitteln Sie jenes Polynom, das am besten zum festgestellten Kostenverlauf paßt. Stellen Sie die Kostenfunktion $K(x)$ mit den Meßdaten in einem Diagramm dar.
2. Ermitteln Sie aus der unter 1 berechneten Kostenfunktion die Durchschnittskostenfunktion $k(x)$, die Grenzkostenfunktion $K'(x)$ und die Elastizität $\varepsilon(x)$. Stellen Sie den Verlauf dieser Funktionen in Abhängigkeit von der Stückzahl dar. Bestimmen Sie jene Stückzahl x_g , für die die Elastizität 1 wird und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

3. Ihre Umsätze steigen annähernd nach der Funktion

$$U(x) = ax + b\sqrt{x}$$

mit $a = 1$ und $b = 5$. Bestimmen Sie daraus die Gewinnfunktion $G(x)$, deren Maximum und die Break-Even-Punkte.

- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe entweder Mathcad oder Excel und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>2.XLS oder <Name>2.MCD.

Beispiele aus dem Bereich Qualitätssicherung und Statistik

5) HW5b-2001: Qualitätssicherung, SPC und Qualitätsregelkarten

Mit einer automatischen Fertigungseinrichtung werden Zapfen gefertigt, die hinsichtlich ihrer Länge überwacht werden sollen. In den letzten Tagen wurden im Abstand von 2 Stunden jeweils 5 Zapfen der Fertigung entnommen und vermessen. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle wiedergegeben (Länge x in mm):

Nr. der Stichprobe

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 49,98 | 49,96 | 49,99 | 49,96 | 49,99 | 49,95 | 49,94 | 49,95 | 49,97 | 49,96 |
| 50,01 | 49,97 | 50,03 | 49,98 | 49,99 | 49,96 | 49,99 | 49,97 | 49,97 | 49,97 |
| 50,02 | 50,01 | 50,03 | 50,00 | 50,00 | 49,98 | 49,99 | 49,98 | 50,01 | 50,01 |
| 50,03 | 50,01 | 50,04 | 50,01 | 50,02 | 49,99 | 50,01 | 50,01 | 50,01 | 50,01 |
| 50,05 | 50,03 | 50,07 | 50,02 | 50,02 | 50,01 | 50,03 | 50,02 | 50,06 | 50,03 |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

- Bestimmen Sie aus dem Vorlauf: $\bar{x} = ?$, $\bar{s} = ?$, $\hat{\mu} = ?$, $\hat{\sigma} = ?$
 - Entwerfen Sie zur Überwachung dieser Fertigungseinrichtung eine $\bar{x} - s$ Qualitätsregelkarte. Die Kartengrenzen sind nachvollziehbar zu ermitteln, die Qualitätsregelkarte ist maßstäblich grafisch darzustellen.
 - Zu verschiedenen Zeiten t werden der laufenden Fertigung jeweils 5 Zapfen entnommen und mit nebenstehenden Ergebnissen vermessen (in Regelkarte von 2) einzeichnen). Legen Sie mit kurzer Begründung dar, zu welcher Reaktion Sie als Qualitätssicherungsleiter den die Qualitätskarte führenden Mitarbeiter veranlassen würden.

| | | |
|-------|-------|-------|
| t1 | t2 | t3 |
| 49,96 | 50,04 | 49,97 |
| 49,98 | 50,03 | 50,07 |
| 49,99 | 50,02 | 49,93 |
| 49,97 | 50,05 | 49,98 |
| 49,95 | 50,04 | 50,06 |
 - Durch ein Versehen wird die Fertigungslage auf 49,975 mm verschoben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit veranlasst die nächste Stichprobe dazu, diese Verschiebung durch Neueinstellung zu korrigieren. Legen Sie den Lösungsweg dar.
 - Berechnen und zeichnen Sie den Verlauf der Eingriffswahrscheinlichkeit $P_E(\mu_t)$ im Bereich $0 \leq \frac{|\mu_t - \mu|}{\sigma} \leq 2$.
 - Berechnen und zeichnen Sie den Verlauf der Eingriffswahrscheinlichkeit $P_E(\sigma_t)$ im Bereich $0 \leq \frac{\sigma_t}{\sigma} \leq 3$.
- ⇒ Geben Sie bei der Lösung dieser Aufgabe die Nummern der verwendeten Tabellen an. Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe entweder Mathcad oder den TI92.

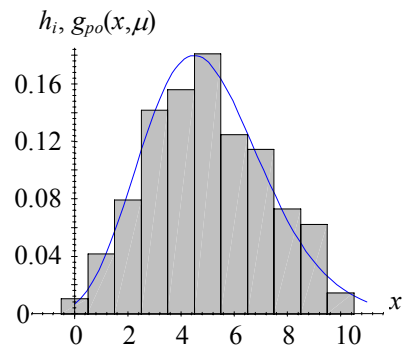
6) HW5b-2001-NT: Statistik, Anpassungstest

Sie haben mit einem Geigerzähler folgende Zählraten/min

$$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] :$$

mit den absoluten Häufigkeiten

$$h_{abs} := [5, 20, 38, 68, 75, 87, 60, 55, 35, 30, 7] :$$



aufgenommen, 5 mal haben Sie keinen Impuls/min gemessen, 20 mal einen Impuls/min usw. Ermitteln Sie daraus eine mittlere Impulsrate μ . Testen Sie die Daten auf Vorliegen einer Poissonverteilung. Stellen Sie die relativen Häufigkeiten in einem Histogramm dar, zusammen mit der passenden Poissonverteilung (vgl. Bild).

7) HW5b-1998: Qualitätssicherung, Stichprobensysteme

Die zur Stichprobenanweisung $n-c = 50-1$ entsprechende **Doppelstichprobenanweisung** ist nach DIN 40080 $n-c_1/d_1-c_2/d_2 = 32-0/2-1/2$. Das bedeutet, daß zunächst eine Stichprobe vom Umfang $n = 32$ gezogen wird und die fehlerhaften Einheiten x_1 der 1. Stichprobe ermittelt werden. Ist $x_1 \leq c_1$ so wird das Los bereits angenommen. Im Fall $x_1 \geq d_1$ erfolgt sofort eine Rückweisung des gesamten Loses. Liegt die Fehlerzahl zwischen c_1 und d_1 , d.h. $c_1 < x_1 < d_1$, so wird eine weitere zweite Stichprobe vom Umfang $n = 32$ gezogen und die Fehlerzahl x_2 ermittelt. Ist die Summe der Fehlerzahlen $x_1 + x_2 \leq c_2$, so erfolgt eine Annahme des Loses, bei $x_1 + x_2 \geq d_2$ eine Rückweisung. Bei reduzierten Prüfungen kann auch der Fall $c_2 < x_1 + x_2 < d_2$ eintreten (bei unserer Doppelstichprobenanweisung ist das nicht der Fall); das Los wird auch hier angenommen, aber es erfolgt ein Übergang von reduzierter Prüfung zur normalen Prüfung.

Sinn und Zweck der Doppelstichprobenanweisung ist es, bei in etwa gleicher OC (Punkte p_{90} und p_{10} der Operationscharakteristik fast gleich) weniger Prüfaufwand im Vergleich zur Einzelstichprobenanweisung zu haben.

a) Überlegen Sie sich, daß die Annahmewahrscheinlichkeit in unserem Fall durch

$$P_a(p) = G(c_1) + \sum_{x=c_1+1}^{d_1-1} g(x) \cdot G(d_2 - 1 - x) = G(0, n = 32, p) + g(1, n = 32, p) \cdot G(0, n = 32, p)$$

gegeben ist. Stellen Sie die Operationscharakteristik grafisch dar und vergleichen Sie mit der entsprechenden Einzelstichprobenanweisung $n-c = 50-1$.

b) Da nur im Fall $c_1 < x_1 < d_1$ eine zweite Stichprobe gezogen wird, ist der mittlere Prüfaufwand gegeben durch:

$$\bar{n}(p) = n + (g(c_1 + 1) + \dots + g(d_1 - 1)) \cdot n = n + g(1) \cdot n$$

Stellen Sie den Verlauf des mittleren Prüfaufwands grafisch dar und illustrieren Sie, daß $\bar{n}(p)$ für alle p unter dem Stichprobenumfang von 50 der entsprechenden Einzelstichprobenanweisung liegt.

c) Vergleichen Sie auch den Durchschlupf

$$D(p) = \frac{N - \bar{n}(p)}{N} \cdot p \cdot P_a(p)$$

der Doppelstichprobenanweisung mit dem der entsprechenden Einzelstichprobenanweisung für einen Losumfang von $N = 5000$.

⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad

8) HW5-1999: Qualitätssicherung, Stichprobensysteme

Für Lagerbuchsen ist nach Zeichnung der Innendurchmesser $d = 40H7(40^{+25}_0)$ vorgegeben. Bestimmen Sie:

1. Prüfanweisung $n-k$ für die Prüfung quantitativer Merkmale, wenn die OC durch die Punkte $p_{90}=1\%$ und $p_{10}=3\%$ verlaufen soll, σ unbekannt
2. Entscheidung über das Los, wenn folgende Stichprobenkennwerte gefunden werden:
 $\bar{x}_1 = 40,012mm; s_1 = 0,004mm$ bzw. $\bar{x}_2 = 40,018mm; s_2 = 0,004mm$
3. Entsprechende genormte $n-c$ -Anweisung für den Fall des Prüfens mittels Lehdorn
4. Vergleichen Sie die Operationscharakteristiken der $n-k$ Anweisung und der $n-c$ Anweisung indem Sie eine Wertetabelle und ein Diagramm mit p -Werten 0.5%, 1%, 1.5%, 2%, 2.5%, 3% und 3.5% berechnen bzw. zeichnen.
5. Bestimmen Sie für die $n-c$ -Anweisung für obengenannte p -Werte den Durchschlupf. Wo wird der Durchschlupf maximal?
6. Wie würde eine äquivalente Doppelstichprobenanweisung aussehen? Bestimmen Sie die Annahmewahrscheinlichkeit dieser Doppelstichprobenanweisung für $p=2.5\%$ u. vergleichen Sie mit Punkt 4.

⇒ Geben Sie bei der Lösung dieser Aufgabe die Nummern der verwendeten Tabellen an. Verwenden Sie zur Durchführung der Punkte 4, 5 und 6 entweder Mathcad, den TI92 oder entsprechende Nomogramme.

Beispiele aus dem Bereich Ausgleichsrechnung

9) HW5b-1998: Ausgleichsrechnung, nichtlinearer Widerstand einer Glühlampe

Sie haben Meßdaten (Ströme I_i , Spannung U_i) an einer Glühlampe aufgenommen.

| | | | | | | |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|
| I_i [A] | 0.1 | 0.19 | 0.27 | 0.35 | 0.42 | 0.47 |
| U_i [V] | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |

Das Ohmsche Gesetz ist nicht anwendbar da der Kennlinienverlauf nichtlinear ist. Der Zusammenhang zwischen U und I ist annähernd durch

$$U = a \cdot I + b \cdot I^3$$

beschreibbar. Der konstante und der quadratische Anteil fehlen aus Symmetriegründen.

1. Bestimmen Sie aus den Meßdaten die bestmöglichen Koeffizienten a und b .
2. Zeichnen Sie die Fitfunktion und die Meßdaten in ein Diagramm ein.
3. Welche Leistung hat die Glühlampe an einer Spannung von 220V?
4. Wie ändert sich der Lampenwiderstand mit der Stromstärke I im Bereich von 0 bis 0.5 A?
5. Wie ändert sich die Lampenleistung mit der Stromstärke I im Bereich von 0 bis 0.5 A?

10) HG5a-2001: Ausgleichsrechnung, Mechanik-Thermodynamik

Sie haben in einem Experiment die sogenannte Dampfdruckkurve aufgenommen. Die Meßdaten (x_i, y_i) stellen die Temperatur θ_i in Grad Celsius und den Dampfdruck p_i in bar dar.

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $x_i = \theta_i$ [°C] | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| $y_i = p_i$ [bar] | .006108 | .01227 | .02337 | .04241 | .07375 | .12335 | .1992 | .3116 | .4736 | .7011 | 1.0133 |

1. Versuchen Sie in einem ersten Schritt die Dampfdruckkurve durch ein kubisches Polynom mit nur ungeraden Potenzen der Form $y(x) = a \cdot x + b \cdot x^3$ anzunähern. Welches Gleichungssystem für a und b kann man aus der Minimierung des quadratischen Fehlers herleiten?
 2. Bestimmen Sie aus den Meßdaten die bestmöglichen Koeffizienten a und b .
 3. Da bei der Approximation mit einer kubischen Parabel auch negative Dampfdrücke auftreten können, die aber physikalisch nicht sehr sinnvoll wären, versuchen Sie die Dampfdruckkurve durch eine Exponentialfunktion der Form $y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ bestmöglich zu beschreiben.
 4. Zeichnen Sie die beiden Fitfunktion und die Meßdaten in ein Diagramm ein. Wie groß ist der extrapolierte Dampfdruck beider Approximationen bei einer Temperatur von $\theta=120$ °C?
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD.

11) HG5b-2000: Ausgleichsrechnung, Elektrotechnik

Ein NTC (Widerstand mit negativem Temperaturkoeffizienten) verringert seinen Widerstand mit zunehmender Temperatur angenähert nach

$$R(T) = R(T_0)e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \text{ mit } T_0 = 273K$$

wobei T die absolute Temperatur in Kelvin angibt.

| | | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $T_i[K]$ | 283 | 293 | 303 | 313 | 333 | 353 | 373 |
| $R_i[\Omega]$ | 980 | 750 | 610 | 450 | 270 | 180 | 110 |

1. Führen Sie durch Logarithmieren die Auffindung von bestmöglichen Werten $R(T_0)$ und B auf ein lineares Ausgleichsproblem zurück.
 2. Zeichnen Sie die Fitfunktion und die Meßdaten in ein Diagramm ein.
 3. Welchen Widerstand hat der NTC bei einer Temperatur von $45^\circ C$?
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD.

12) HG5a-2000: Ausgleichsrechnung, Physik

Kepler erkannte, daß bei der Planetenbewegung sich die Kuben der Bahnradien verhalten wie die Quadrate der Umlaufzeiten, d.h. $T = C \cdot r^\alpha$ mit $\alpha = \frac{3}{2}$

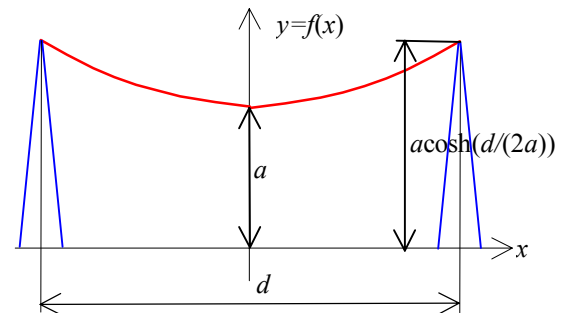
| | | | | | | |
|-----------|-------|-------|--------|-------|--------|---------|
| Planet | Me | V | E | Ma | J | S |
| $r_i[AU]$ | 0,39 | 0,72 | 1 | 1,5 | 5,2 | 9,54 |
| $T_i[d]$ | 87,97 | 224,7 | 365,25 | 686,9 | 4331,9 | 10760,3 |

1. Führen Sie mit der Transformation $y = \ln T$, $x = \ln r$, das Ausgleichsproblem auf eine lineare Regression zurück und bestimmen Sie bestmögliches C und α . Berechnen Sie auch den quadratischen Fehler.
 2. Zeichnen Sie die Fitfunktion und die Meßdaten in ein Diagramm ein.
 3. Versuchen Sie, ausgehend von der Lösung 1, den quadratischen Fehler mit Hilfe eines nichtlinearen Fits zu verbessern.
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD.

13) WI5: Stetige Ausgleichsrechnung, Mechanik

Sie haben eine Seilkurve mit der Funktionsdefinition $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ im Intervall $\left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$ gegeben.

1. Führen Sie eine Annäherung der Seilkurve durch eine bestmögliche Parabel mit Hilfe der Methoden der stetigen Ausgleichsrechnung durch. Nähern Sie die durch die bestmögliche Linearkombination der Funktionen $\varphi_0(x)=1$ und $\varphi_1(x)=x^2$. Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf.
2. Erstellen Sie ein Mathcad-Dokument und vergleichen Sie Ihre analytischen Ergebnisse mit den von Mathcad numerisch berechneten Werten. (Zahlenwerte $a=20$ m, $d=100$ m).
3. Stellen Sie die Seilkurve mit der Näherungsparabel in einem Diagramm dar.

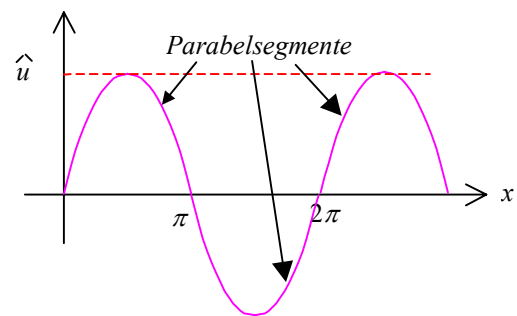


⇒ Speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD.

14) WI5: Stetige Ausgleichsrechnung, Fourierpolynome

Manche Funktionsgeneratoren erzeugen "fast" sinusförmige Spannungen durch Aneinanderreihung von Parabelsegmenten. Diese Signalform entsteht durch 2-maliges Integrieren einer Rechteckschwingung.

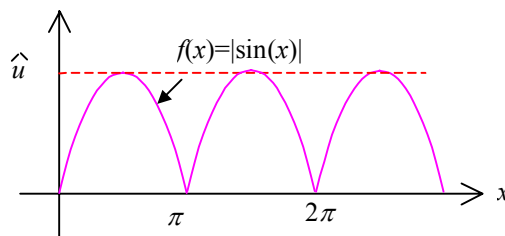
1. Zeigen Sie, dass die Funktion im Bereich $0 < x < \pi$ durch $f(x) = \hat{u} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{4}{\pi^2} \cdot \hat{u}$ gegeben ist.
2. Bestimmen Sie die Oberwellen dieser Schwingung bis zur 5. Harmonischen.
3. Kontrollieren Sie Ihre analytische Berechnung durch eine numerische Bestimmung der Fourierkoeffizienten mit Hilfe von Mathcad.
4. Zeichnen Sie die Originalfunktion und das Fourierpolynom in ein Diagramm ein.



⇒ Speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>2.MCD.

15) HG5: Stetige Ausgleichsrechnung, Fourierpolynome, Elektrotechnik

Mit einem Doppelweggleichrichter erzeugt man aus einer sinusförmigen Wechselspannung eine pulsierende Gleichspannung wie im Bild dargestellt.



1. Bestimmen Sie die allgemeine Form der Fourierreihe und zeigen Sie, dass die Grundschwingung (beim technischen Wechselstrom die 50 Hz) fehlt.
2. Wie groß ist der Gleichspannungsanteil.
3. Kontrollieren Sie Ihre analytische Berechnung durch eine numerische Bestimmung der Fourierkoeffizienten mit Hilfe von Mathcad.
4. Zeichnen Sie die Originalfunktion und das Fourierpolynom in ein Diagramm ein.

⇒ Speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>3.MCD.

Beispiele aus dem Bereich Differentialgleichungen

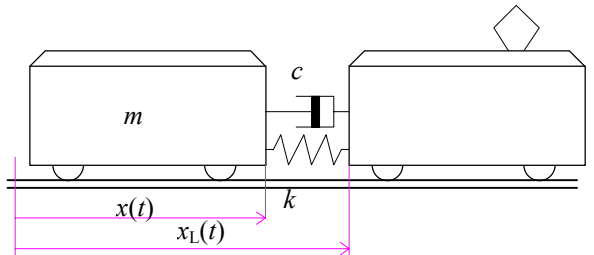
16) HW5b-2001: Mechanik, Kinematik

Eine Lokomotive mit Waggon fährt aus dem Stillstand mit konstanter Beschleunigung a an. Die Kupplung zwischen Lokomotive und Waggon kann mit einer Feder mit Federkonstanten k und einem Dämpferelement mit Dämpferkonstanten c (Dämpferkraft proportional Relativgeschwindigkeit von Lok und Waggon) beschrieben werden.

- Bestimmen Sie Feder- und Dämpferkraft und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung des Waggons durch

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = k(x_L(t) - l) + c\dot{x}_L(t) = k\frac{a}{2}t^2 + cat$$

gegeben ist. l ist dabei die Ruhelänge der Feder und $x_L(t) = l + \frac{a}{2}t^2$ die Bewegung der Lokomotive.



- Bestimmen Sie die homogene Lösung der linearen Differentialgleichung.
- Zur Bestimmung der partikulären Lösung verwenden Sie am besten einen Polynomansatz.
- Bestimmen Sie aus der allgemeinen Lösung die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = 0$. Um welchen Wert wird die Feder gedehnt für $t \rightarrow \infty$?
- Zeichnen Sie mit Mathcad den zeitlichen Verlauf des Abstandes $x_L(t) - x(t)$ von Lok und Waggon für die Parameterwerte $m = 20000 \text{ kg}, a = 0.5 \text{ m/s}^2, l = 0.6 \text{ m}, k = 200 \text{ kN/m}$ und unterschiedlichen Dämpferkonstanten $c = 50000, 100000, \dots, 250000 \text{ Ns/m}$. Welche Dämpferkonstante halten Sie für die am besten passende? Für welchen c -Wert tritt der aperiodische Grenzfall auf?

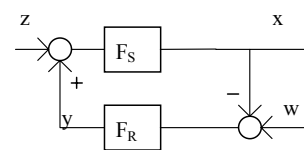
17) HG5a-2001: Regelungstechnik

Betrachten Sie nebenstehenden Regelkreis mit folgender Streckenübertragungsfunktion:

$$F_s(s) = K \cdot \frac{1}{1 + T \cdot s} \text{ mit } K = 1, T = 2$$

Verwenden Sie als Regler einen PI-Regler:

$$F_R(s) = K_R + \frac{K_I}{s}$$



- Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktionen folgenden Differentialgleichungen entsprechen:

$$x(t) + T \cdot \frac{dx}{dt} = K \cdot (y(t) + z(t)) \quad \text{PT}_1\text{-Strecke}$$

$$y(t) = K_R \cdot (w(t) - x(t)) + K_I \cdot \int (w(t) - x(t)) \cdot dt \quad \text{PI-Regler}$$

- Untersuchen Sie zuerst das Führungsverhalten des Regelkreises ($w(t)$ Einheitssprung, $z(t)=0, x(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = \frac{K \cdot K_R}{T}$). Ermitteln Sie den Zeitverlauf der Regelgröße x entweder mittels inverser Laplacetransformation oder konventionell. Stellen Sie deren Verlauf in einem Zeitdiagramm für folgende Reglerparameterkombinationen dar:

- $K_I = K, K_R = K$

- $K_I = \frac{1}{3} \cdot K, K_R = K$

$$3. \quad K_I = 3 \cdot K, \quad K_R = K$$

$$4. \quad K_I = K, \quad K_R = 3 \cdot K$$

Bestimmen Sie aus dem Zeitdiagramm die Ausregelzeit ($< 2\%$ Abweichung vom Endwert beim Führungsverhalten) und entscheiden Sie sich für den besten Regler. Welchen Nachteil hat der schnellste Regler allerdings?

3. Untersuchen Sie jetzt noch das Führungsverhalten des Regelkreises ($z(t)$ Einheitssprung, $w(t)=0$, $x(t=0)=0, \dot{x}(t=0)=\frac{K}{T}$). Ermitteln Sie den Zeitverlauf der Regelgröße x entweder mittels inverser Laplacetransformation oder konventionell. Stellen Sie deren Verlauf in einem Zeitdiagramm für die gleichen Reglerparameterkombinationen wie unter 2 dar.

Bestimmen Sie aus den Zeitdiagrammen die Ausregelzeit (beim Störungsverhalten $|x| < 0.02$ bei vorliegender Stör-Amplitude $\hat{z}=1$) und entscheiden Sie sich für den besten Regler. Welchen Nachteil hat der schnellste Regler allerdings?

⇒ Speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>3.MCD ab.

18) HW5: Nichtlineare Schwingung, Mechanik

Eine Feder mit Federkonstante $k=1$ und Masse $m=1$ werde durch Reibung gedämpft.

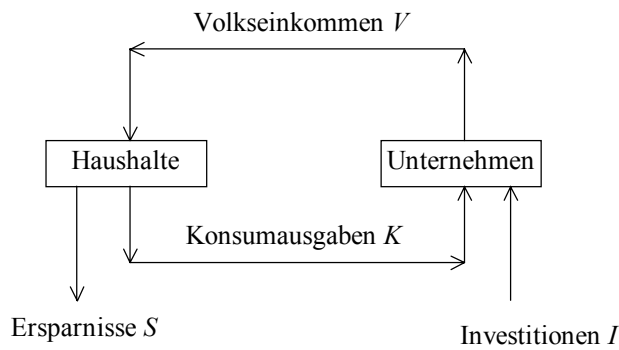
1. Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf, wenn die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.
2. Lösen Sie diese Differentialgleichung mit der in Mathcad eingebauten Runge-Kutta-Methode. Nehmen Sie als Reibungsbeiwert $C=1/8$. Die Anfangsauslenkung betrage 1, die Anfangsgeschwindigkeit 0.
3. Stellen Sie den Zeitverlauf von 0 bis 40 dar. Wie sieht das Phasendiagramm aus?
4. Erstellen Sie eine Animation, in der der Reibungsbeiwert von $C=1/8$ bis 1 in $1/8$ -Schritten variiert wird.
 5. Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD. Die Animation speichern Sie in <Name>1.AVI.

19) HW5: Numerische Mathematik, Differenzen- und Differentialgleichungen

Betrachten Sie ein Räuber-Beute-Modell. Die Beutetiere haben eine Anfangspopulation von 80, die Geburtenrate sei 15% und die Sterberate 5%. Ohne die Räuber würden sich die Beutetiere exponentiell vermehren. Die Räuber besitzen eine Geburtenrate von 1%, eine Sterberate von 2% und eine Anfangspopulation von 20. Ohne Beutetiere würden die Räuber aussterben. Wenn Räuber auf Beutetiere treffen erhöhe sich die Sterberate der Beutetiere pro Räuber um 0,3%, die Geburtenrate der Räuber erhöht sich dementsprechend um 0,1% pro Beutetier.

1. Stellen Sie das zugehörige System von Differenzgleichungen auf.
 2. Lösen Sie dieses mit einer Iteration in Mathcad für einen Zeitbereich von 800 Zeiteinheiten. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Räuber- und Beutepopulation. Was kann man aus dem Phasendiagramm erkennen und was sagt dies über die numerische Methode aus.
 3. Wie sieht das entsprechende Differentialgleichungssystem aus?
 4. Lösen Sie dieses Differentialgleichungssystem mit der in Mathcad eingebauten Runge-Kutta-Methode. Zeichnen Sie wieder den zeitlichen Verlauf der Räuber- und Beutepopulation sowie das Phasendiagramm.
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD.

20) HW5: Differenzgleichungen, Volkswirtschaft



Betrachten Sie obenstehendes Modell einer Volkswirtschaft. Die Konsumausgaben seien mit Faktor $k < 1$ proportional zum Volkseinkommen V . Die Investitionen sollen nach

$$I(n) = I_0 + I_p \cdot \sin(\omega \cdot n)$$

periodischen Schwankungen unterliegen. Das Volkseinkommen im Zeitschritt $n+1$ setzt sich aus den Konsumausgaben und den Investitionen zum Zeitpunkt n nach

$$V(n + 1) = I(n) + K(n)$$

zusammen.

1. Stellen Sie das zugehörige System von Differenzgleichungen auf.
2. Lösen Sie dieses mit einer Iteration in Mathcad für einen Zeitbereich von 30 Zeiteinheiten und nachstehenden Parameterwerten.

$$V_0 := 550 \quad I_0 := 130 \quad I_p := 20 \quad \omega := 1 \quad k := 0.8$$

3. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf. Um welchen Grenzwert pendelt das Volkseinkommen?
 4. Welchen Einfluss hat der Parameter k auf diesen Grenzwert? Erstellen Sie eine Animation mit Werten von $k=0.1$ bis 0.8 mit Schritten von 0.1 .
- ⇒ Verwenden Sie zur Durchführung dieser Aufgabe Mathcad und speichern Sie Ihre Ergebnisse in der Datei <Name>1.MCD. Die Animation speichern Sie in <Name>1.AVI.