Florian Grabner **florian.grabner@gmx.at**

Mohr'sches Verfahren

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Mohr'sches Verfahren, DGL 2. Ordnung, nummerische Integration

- Kurzzusammenfassung

  Berechnung der Durchbiegung einer beliebig oft abgesetzten und beliebig oft, mit Querkräften, belasteten Welle,

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik, 4. & 5.Jahrgang, Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

Wichtige Hinweise!

Es sind **nur** alle Gelb hinterlegten Variablen zu definieren.

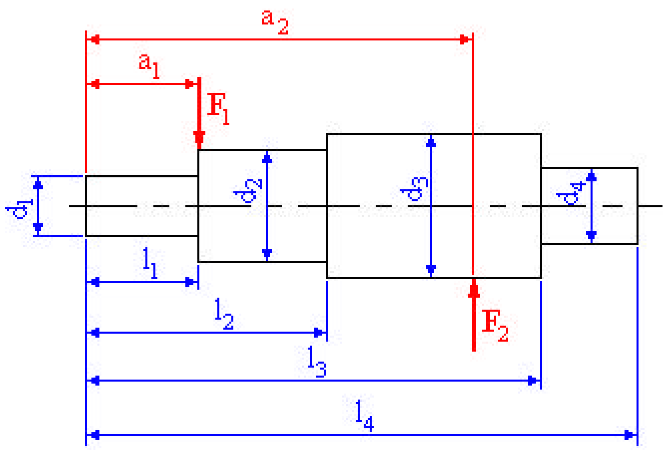
Grün hinterlegte Werte kennzeichnen relevante Ergebnisse.

Alle Angaben sind im **Einheitensystem [N,mm]** anzuführen

Bei der Eingebe der einzelnen Werte (Durchmesser, Absatzlänegen, usw.) sind die **ersten Zeilen vorerst jeweils** mit **Null** zu belassen. Erst in Folge wird das "NULLte" Element der Liste durch Zahlenwerte belegt (z.B. Auflagerkraft)

Da bei vorangegangenen Versuchen das Verfahren analytisch zu lösen, Probleme nummerischer Natur (Zahlenganaugkeit zu gering) aufgetreten sind, wird das Mohr'sche Verfahren in diesem Dokument numerisch umgesetzt, das heißt die Welle wird in eine endliche Anzahl von endlich großen Teilstücken zerlegt. Die Ungenauigkeit, die sich dadurch ergibt, hält sich in zulässigen Grenzen wenn mit einer Genauigkeit von Δ=300 gerechnet wird (Es wird dann mit 300 gleichgroßen Teilstücken gerechnet). Erhöht man diesen Wert, erhöht man die Genauigkeit und gleichzeitig die Rechenzeit.

Angaben:



Anzahl der Wellenabsätze $n_W := 4$

Anzahl der Belastungen $n_F := 2$

Elastitzitätsmodul $E := 2.1 \cdot 10^5$

Genauigkeit $\Delta := 300$

$i := 0 .. n_W$ $j := 0 .. n_F$

Durchmesser

$d_i :=$

0
20
40
55
30

Absatzlänge

$liter_i :=$

0
40
80
160
195

Belastungen

$farad_j :=$

0
–3500
4500

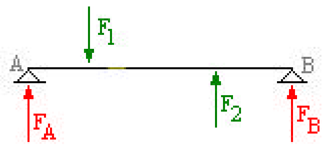
Position der Belastung

$a_j :=$

0
20
135

Berechnung der Auflagerkräfte

$F_A := 1$ $F_B := 1$



Given

$$F_A + F_B + \sum_{n=1}^{n_F} farad_n = 0$$

$$F_B \cdot liter_{n_w} + \sum_{n=1}^{n_F} farad_n \cdot a_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(F_A, F_B)$$

Durch ansetzen der Gleichgewichts-bedingungen in der Ebene erhält man ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten. Dieses wird dann mit der Funktion Suchen aufgelöst. Das Ergebniss stellt die Auflagerreaktionskräfte dar.

$F_A = 1756.41$ $farad_0 := F_A$

$F_B = -2756.41$

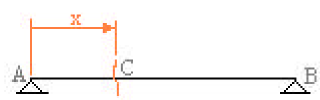
Berechnung der Flächenmomente 2. Ordnung

$$I(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } c \in 1, 2 .. n_w \\ \quad f \leftarrow c \text{ if } x \le liter_c \text{ if } x \ge liter_{c-1} \\ IA \leftarrow \dfrac{\pi \cdot (d_f)^4}{64} \\ IA \end{array} \right.$$

rameter der Funktion **I**:

x - Abstand vom Lager A zu einem beliebigen Punkt auf der Welle.

ir den Punkt C wird das Flächenmoment 2. Ordnung rechnet



Berechnung der axialen Widerstandsmomente

$$W(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } c \in 1, 2 .. n_w \\ \quad f \leftarrow c \text{ if } x \le liter_c \text{ if } x \ge liter_{c-1} \\ WA \leftarrow \dfrac{\pi \cdot (d_f)^3}{32} \\ WA \end{array} \right.$$

ımeter der Funktion **W**:

x - Abstand vom Lager A zu einem beliebigen Punkt auf der Welle.

den Punkt C wird das axiale Widerstandsmoment ·chnet

Berechnung der Biegemomente

$$M(x) := \left|\begin{array}{l} \text{for } c \in 1, 2 .. n_F \\ \quad \left|\begin{array}{l} ff \leftarrow c-1 \ \text{ if } \ x \le a_c \ \text{ if } \ x \ge a_{c-1} \\ ff \leftarrow n_F \ \text{ if } \ x > a_{n_F} \end{array}\right. \\ MB \leftarrow \displaystyle\sum_{m=0}^{ff} farad_m \cdot (x - a_m) \\ -MB \end{array}\right.$$

Parameter der Funktion **M**:

x - Abstand vom Lager A zu einem beliebigen Punkt auf der Welle.

Für den Punkt C wird das tatsächliche Biegemoment errechnet

Berechnung der Biegespannungen

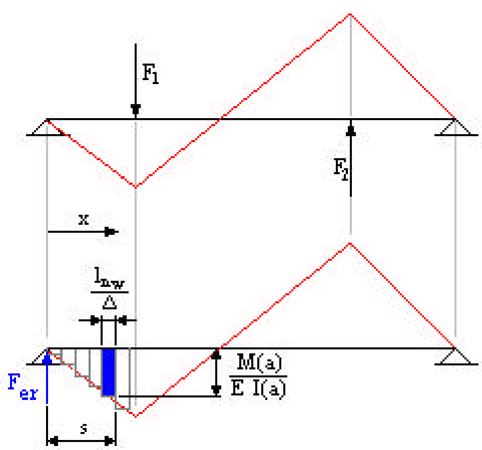
$$\sigma(x) := \frac{M(x)}{W(x)}$$

Parameter der Funktion **s** :

x - Abstand vom Lager A zu einem beliebigen Punkt auf der Welle.

Für den Punkt C wird die Biegespannung ermittelt.

Ersatzsystem



$$F_{er} := \frac{\displaystyle\sum_{x=0}^{\Delta} \frac{M\left(x \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}\right) \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}}{E \cdot I\left(x \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}\right)} \cdot \left(liter_{nw} - x \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}\right)}{liter_{nw}}$$

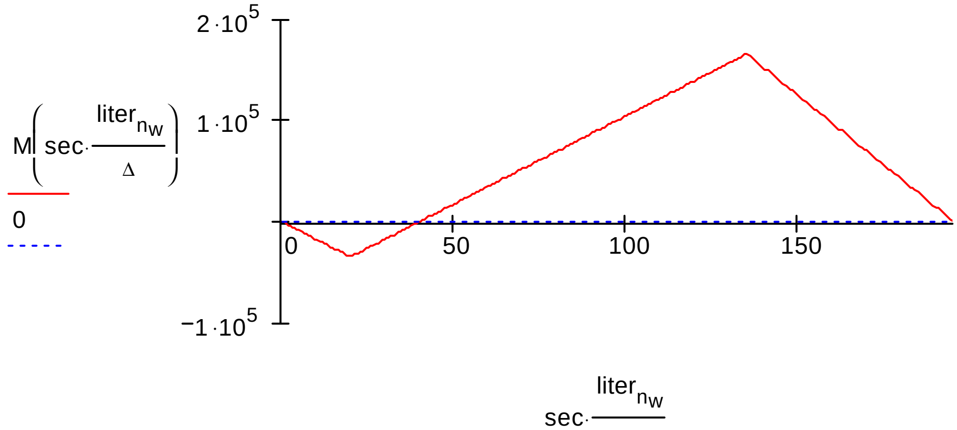
Berechnung der Biegelinie

$$sec := 0 .. \Delta$$

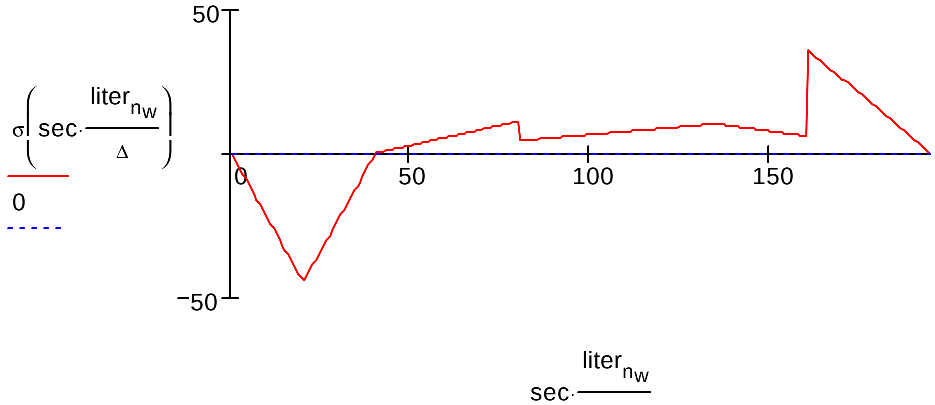
$$w(sec) := F_{er} \cdot sec \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta} - \sum_{x=0}^{sec} \frac{M\left(x \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}\right)}{E \cdot I\left(x \cdot \frac{liter_{nw}}{\Delta}\right)} \cdot \frac{\left(liter_{nw}\right)^2}{\Delta^2} \cdot (sec - x)$$

Visualisierung der Ergebnisse

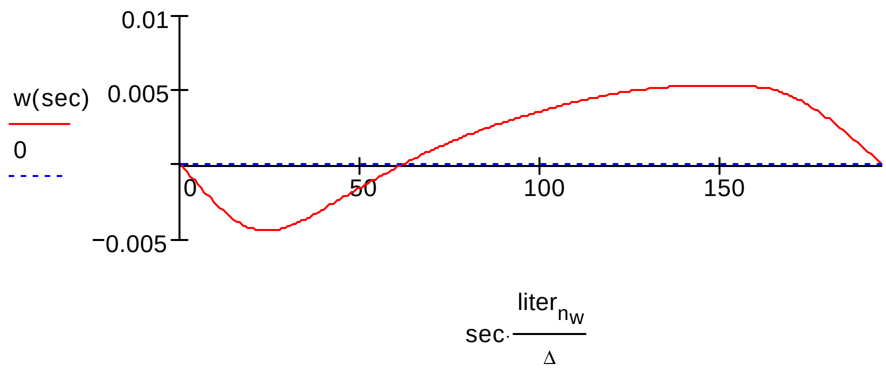
Momentenverlauf



Spannungsverlauf



Biegelinie



Berechnung der Maximalen Durchbiegung

$$\max(f) := \left| \begin{array}{l} ma \leftarrow (0 \quad 0) \\ \text{for } i \in 0 .. \Delta \\ \quad \text{if } |f(i)| > ma_{0,0} \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} ma_{0,0} \leftarrow |f(i)| \\ ma_{0,1} \leftarrow i \cdot \dfrac{liter_{n_w}}{\Delta} \end{array} \right. \\ ma \end{array} \right.$$

Parameter der Funktion **max**:

f - Funktion dessen Maximum berechnet werden soll

Diese Funktion ermittel das Maximum und die Stelle an der es auftritt.

Maximale Durchbiegung $w_{max} := \max(w)_{0,0}$ $w_{max} = 0.005$

Position der Maximalen Durchbiegung $x_{max} := \max(w)_{0,1}$ $x_{max} = 146.9$

Beschreibung der einzelnen Programmteile bitte etwas ausführlicher gestalten.