Florian Grabner **fi.do@gmx.net**

Fachwerksberechnung mit FEM II

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Finite Elemente Methode

- Kurzzusammenfassung

  Anhand eines einfachen Fachwerkes wird die grunlegende Funktionsweise der FEM gezeigt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Mechanik, 5.Jahrgang, Maschinenbau

- Mathcad-Version:

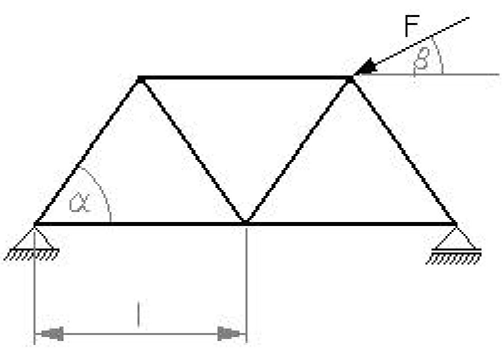
  Mathcad 7

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Diese Ausarbeitung war die Schwerpunktsarbeit bei der Reifeprüfung.

Wollen Sie zum Theorieteil zurück, so doppelklicken Sie **hier**.

1. Das zu berechnende Fachwerk



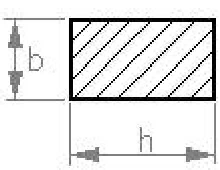
Angaben im Einheitsystem [N,mm]!!

$l := 200$ $F := -5000$

$h := 8$ $\beta := 30 \cdot Grad$

$b := 15$ $\alpha := 60 \cdot Grad$

Elastizitätsmodul $E := 210000$



Querschnittsfläche der Stäbe $A := b \cdot h$

$A = 120$

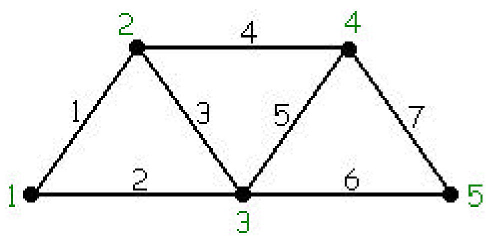
2. FEM mit MathCAD 7

Sonstige Angaben

Nullvektor

$$OO := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Längen und Winkel



Stab 1: $\alpha_1 := 60 \cdot Grad$

Stab 2: $\alpha_2 := 0 \cdot Grad$

Stab 3: $\alpha_3 := 120 \cdot Grad$

Stab 4: $\alpha_4 := 0 \cdot Grad$

Stab 5: $\alpha_5 := 60 \cdot Grad$

Stab 6: $\alpha_6 := 0 \cdot Grad$

Stab 7: $\alpha_7 := 120 \cdot Grad$

Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Nummer des Stabes $n := 1 .. 7$

Element der Steifigkeitsmatrix für einen Stab

$$KE_n := \frac{E \cdot A}{l} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_n)^2 & \cos(\alpha_n) \cdot \sin(\alpha_n) \\ \cos(\alpha_n) \cdot \sin(\alpha_n) & \sin(\alpha_n)^2 \end{pmatrix}$$

Gesamte Steifigkeitsmatrix

$$KK_g := \begin{pmatrix} KE_1 + KE_2 & -KE_1 & -KE_2 & OO & OO \\ -KE_1 & KE_1 + KE_3 + KE_4 & -KE_3 & -KE_4 & OO \\ -KE_2 & -KE_3 & KE_2 + KE_3 + KE_5 + KE_6 & -KE_5 & -KE_6 \\ OO & -KE_4 & -KE_5 & KE_4 + KE_5 + KE_7 & -KE_7 \\ OO & OO & -KE_6 & -KE_7 & KE_6 + KE_7 \end{pmatrix}$$

In der oben angeführten Schreibweise steht jedes "KE_i" für eine Matrix der Dimension (2x2). Um mit MathCAD weiter zu arbeiten müssen wir jedes dieser Glieder durch die entsprechenden Matrix ersetzten. Dafür bedienen wir uns des folgenden Programmes.

$$\mathrm{Ges}(M) := \left| \begin{array}{l} \mathrm{dim} \leftarrow \mathrm{spalten}(M) \\ \text{for } \ i \in 0..\,\mathrm{dim}-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{Ges_{tmp}} \leftarrow M_{i,0} \\ \text{for } \ ii \in 0..\,\mathrm{dim}-1 \\ \quad \mathrm{Ges_{tmp}} \leftarrow \mathrm{erweitern}\left(\mathrm{Ges_{tmp}}, M_{i,ii}\right) \ \text{ if } \ ii \neq 0 \\ \mathrm{Ges} \leftarrow \mathrm{Ges_{tmp}} \ \text{ if } \ i = 0 \\ \mathrm{Ges} \leftarrow \mathrm{stapeln}\left(\mathrm{Ges}, \mathrm{Ges_{tmp}}\right) \ \text{ if } \ i \neq 0 \end{array} \right. \\ \mathrm{Ges} \end{array} \right.$$

$$KK_{ges} := \mathrm{Ges}\left(KK_g\right)$$

Funktionsweise: Parameter der Funktion **GES**:

M - Jene Matrix die umgewandelt werden soll.

Die wichtigsten MathCAD-Funktionen:

spalten(A) - Bestimmt die Spaltenanzahl von A
erweitern(A,B) - Ordnet B rechts neben A an.
stapeln(A,B) - Ordnet A über B an.

Mit der Hilfe von zwei for-Schleifen werden nun die einzelnen Zellen einer Spalte "erweitert" und anschließend die einzelnen Zeilenen "gestapelt".

Die Gesmtsteifigkeitsmatrix wird aus Gründen der Anschaulichkeit, sie hat die Dimension (10x10), nicht angezeigt.

Aufstellen des Gleichungssystemes (reduziert)

Zeilen und Spalten mit dem Freiheitsgrad Null werden mit Hilfe eines weiteren Programmes gestrichen, d.h. Alle Stellen mit Null besetzen und die Stelle auf der Hauptdiagonalen mit Eins.

$$\mathrm{Red}(M, row) := \left| \begin{array}{l} \mathrm{dim} \leftarrow \mathrm{spalten}(M) \\ \mathrm{ein} \leftarrow \mathrm{einheit}(\mathrm{dim}) \\ \text{if } \ row < \mathrm{dim} \\ \quad \left| \begin{array}{l} M^{\langle row \rangle} \leftarrow \mathrm{ein}^{\langle row \rangle} \\ M \leftarrow M^{T} \\ M^{\langle row \rangle} \leftarrow \mathrm{ein}^{\langle row \rangle} \end{array} \right. \\ M \end{array} \right.$$

Funktionsweise: Parameter der Funktion **RED**:

M - Matrix die reduziert werden soll.
row - Betreffende Zeile und Spalte.

Die wichtigsten MathCAD-Funktionen:

spalten(A) - Bestimmt die Spaltenanzahl von A
einheit(n) - Erstellt eine Einheitsmatrix der Dimension (n x n)

Die entsprechende Spalte wird durch die passende Spalte einer Einheitsmatrix gleicher Größe, ersetzt. Das ersetzten der Zeile erfolgt durch Transpornieren von "M".

WICHTIG: Es kann immer nur eine Zeile und die dazugehörende Spalten reduziert werden!

$$KK_{red} := Red(KK_{ges}, 0)$$

$$KK_{red} := Red(KK_{red}, 1)$$

$$KK_{red} := Red(KK_{red}, 9)$$

Anzahl der Knoten $m := 1 .. 5$ $Fx_m := 0$ $Fy_m := 0$

Randbedingungen $u_1 := 0$ $v_1 := 0$ $v_5 := 0$

$$Fx_4 := \frac{F \cdot \cos(\beta)}{Schritt} \cdot FRAME \qquad Fy_4 := \frac{F \cdot \sin(\beta)}{Schritt} \cdot FRAME$$

reduzierter Kraftvektor $FF_{red} := \left(Fx_1 \;\; Fy_1 \;\; Fx_2 \;\; Fy_2 \;\; Fx_3 \;\; Fy_3 \;\; Fx_4 \;\; Fy_4 \;\; Fx_5 \;\; Fy_5\right)^T$

Gleichungssystem $FF_{red} = KK_{red} \cdot uu_{red}$

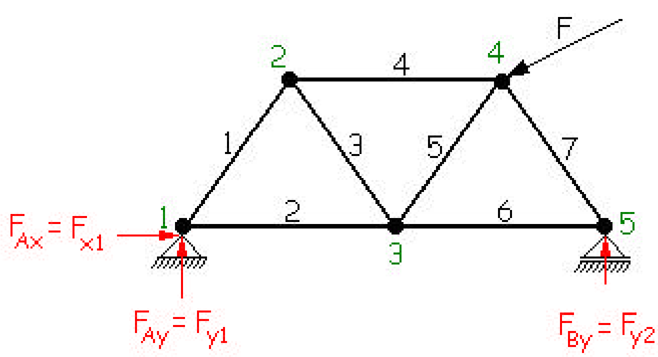
Lösen des Gleichungssystems

$$uu_{red} := llösen(KK_{red}, FF_{red})^T$$

Ermittlung der Auflagerkräfte

$uu_{ges} := uu_{red}{}^T$

$FF_{ges} := KK_{ges} \cdot uu_{ges}$



$Fx1 := FF_{ges_{0,0}}$

$Fy1 := FF_{ges_{1,0}}$ $Fy5 := FF_{ges_{9,0}}$

Ermittlung der Verschiebungen

$$uux_m := uuges_{(m-1)\cdot 2,0} \qquad uuy_m := uuges_{m\cdot 2-1,0}$$

Ermittlung der Stabkräfte

Elementsteifigkeitsmatrix

$$KK_n := \begin{pmatrix} KE_n & -KE_n \\ -KE_n & KE_n \end{pmatrix}$$

$$KKelem_n := Ges(KK_n)$$

Elementverschiebungsvektor

$$u\_elem(a,b) := \left| \begin{array}{l} uu \leftarrow \begin{pmatrix} uux_a \\ uuy_a \\ uux_b \\ uuy_b \end{pmatrix} \\ uu \end{array} \right.$$

Funktionsweise:

Parameter der Funktion **u_elem**:

a - Anfangsknoten.
b - Endknoten.

Die einzelnen Koordinaten werden in einen Vektor verpackt.

$u_1 := u\_elem(1,2)$ $\quad u_4 := u\_elem(2,4)$ $\quad u_7 := u\_elem(4,5)$

$u_2 := u\_elem(1,3)$ $\quad u_5 := u\_elem(3,4)$

$u_3 := u\_elem(2,3)$ $\quad u_6 := u\_elem(3,5)$

Stabkräfte

$$FFelem_n := KKelem_n \cdot u_n$$

$$FF_n := \sqrt{\left[\left(FFelem_n\right)_{0,0}\right]^2 + \left[\left(FFelem_n\right)_{1,0}\right]^2}$$

Ermittlung der Spannungen

$$\sigma_n := \frac{FF_n}{A}$$

Ermittlung der Dehnungen

$$\varepsilon_n := \frac{\sigma_n}{E}$$

Gesamtsübersicht der Ergebnisse

Auflagerkräfte

$F_{x1} = 4.33 \times 10^{3}$

$F_{y1} = 2.5 \times 10^{3}$

$F_{y5} = 3.542 \times 10^{-13}$

Verschiebungen

$uu_{x_1} = 0$ $uu_{y_1} = 0$

$uu_{x_2} = -0.04$ $uu_{y_2} = -3.307 \times 10^{-3}$

$uu_{x_3} = -0.023$ $uu_{y_3} = -0.02$

$uu_{x_4} = -0.063$ $uu_{y_4} = -0.023$

$uu_{x_5} = -0.023$ $uu_{y_5} = 0$

Stabkräfte

$FF_1 = 2.887 \times 10^{3}$ - Druckkraft

$FF_2 = 2.887 \times 10^{3}$ Druckkraft

$FF_3 = 2.887 \times 10^{3}$ - Zugkraft

$FF_4 = 2.887 \times 10^{3}$ - Druckkraft

$FF_5 = 2.887 \times 10^{3}$ - Druckkraft

$FF_6 = 4.372 \times 10^{-13}$

$FF_7 = 3.56 \times 10^{-13}$

Spannungen

$\sigma_1 = 24.056$

$\sigma_2 = 24.056$

$\sigma_3 = 24.056$

$\sigma_4 = 24.056$

$\sigma_5 = 24.056$

$\sigma_6 = 3.643 \times 10^{-15}$

$\sigma_7 = 2.966 \times 10^{-15}$

Visualisierung

Koordinaten der Knotenpunkte des Fachwerks

$K_1 := (0 \quad 0)$ $K_3 := (l \quad 0)$ $K_5 := (2 \cdot l \quad 0)$

$$K_2 := \left(\frac{l}{2} \quad l \cdot \sin(60 \cdot Grad) \right) \qquad K_4 := \left(\frac{3 \cdot l}{2} \quad l \cdot \sin(60 \cdot Grad) \right)$$

Zum Aufstellen der Funktionen der einzelnen Elementen verwenden wir wieder eine Funktion der Form:

$$
\text{linie}(n1, n2) := \left|
\begin{array}{l}
R \leftarrow \text{llösen}\left[\begin{pmatrix} n1_{0,0} & 1 \\ n2_{0,0} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n1_{0,1} \\ n2_{0,1} \end{pmatrix}\right] \\
\text{if } \; n2_{0,0} > n1_{0,0} \\
\quad \left| \begin{array}{l} xa \leftarrow n1_{0,0} \\ xe \leftarrow n2_{0,0} \end{array} \right. \\
\text{otherwise} \\
\quad \left| \begin{array}{l} xa \leftarrow n2_{0,0} \\ xe \leftarrow n1_{0,0} \end{array} \right. \\
\begin{pmatrix} R_{0,0} & R_{1,0} & xa & xe \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

Funktionsweise: Parameter der Funktion **line**:

n1 - Vektor mit den Anfangspunkten der Geraden.
n2 - Vektor mit den Endpunkten der Geraden.

Die wichtigsten MathCAD-Funktionen:

llösen(A,b) - Löst das lineare Gleichungssystem A x = b

Die Funktion errechnet die Werte "k" und "d" der Geradengleichung und bestimmt den Anfangs- und den Endpunkt der Geraden damit die Funktion nach rechts zeigt.

$$
\text{Trass} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Trass\_simpl} := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad ns := 1 .. 6
$$

$$\left(k_{ns}\ \ d_{ns}\ \ xa_{ns}\ \ xe_{ns}\right) := \mathrm{linie}\left[K_{\left(Trass\_simpl_{ns-1,0}\right)}, K_{\left(Trass\_simpl_{ns-1,1}\right)}\right]$$

$a := 1 \quad x1 := xa_a .. xe_a$

$a := 2 \quad x2 := xa_a .. xe_a$

$a := 3 \quad x3 := xa_a .. xe_a$

$a := 4 \quad x4 := xa_a .. xe_a$

$a := 5 \quad x5 := xa_a .. xe_a$

$a := 6 \quad x6 := xa_a .. xe_a$

$x := 0 .. l + \frac{l}{2}$

$xx := l + \frac{l}{2} .. 2 \cdot l$

$y(x, a) := k_a \cdot x + d_a$

$y\_streben1(x) := \mathrm{wenn}\left(x \le xe_3, y(x,3), \mathrm{wenn}\left(x \le xe_4, y(x,4), y(x,5)\right)\right)$

$y\_streben2(x) := \mathrm{wenn}\left(x \le xe_6, y(x,6), \mathrm{wenn}\left(x \le xe_7, y(x,7), y(x,8)\right)\right)$

Koordinaten der Knoten im belastetem Zustand:

$$Koo\_last(a) := \left| \begin{array}{l} Tmp \leftarrow K_a \\ Tmp_{0,0} \leftarrow Tmp_{0,0} + f_{st} \cdot uu_{x_a} \\ Tmp_{0,1} \leftarrow Tmp_{(0,1)} + f_{st} \cdot uu_{y_a} \\ K_a \leftarrow Tmp \\ K_a \end{array} \right.$$

Funktionsweise: Parameter der Funktion **Koo_last**:

a - Knotennummer

Gibt eine Matrix mit den Koordinaten des unter Last stehenden Knotens unter Berücksichtigung einer Verstärkung.

$K_1 := Koo\_last(1) \quad K_3 := Koo\_last(3) \quad K_5 := Koo\_last(5)$

$K_2 := Koo\_last(2) \quad K_4 := Koo\_last(4)$

$$\left(k_{la_n}\ \ d_{la_n}\ \ xa_{la_n}\ \ xe_{la_n}\right) := \mathrm{linie}\left[K_{\left(Trass_{n-1,0}\right)}, K_{\left(Trass_{n-1,1}\right)}\right]$$

$a := 1 \quad x1_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$a := 2 \quad x2_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$a := 3 \quad x3_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

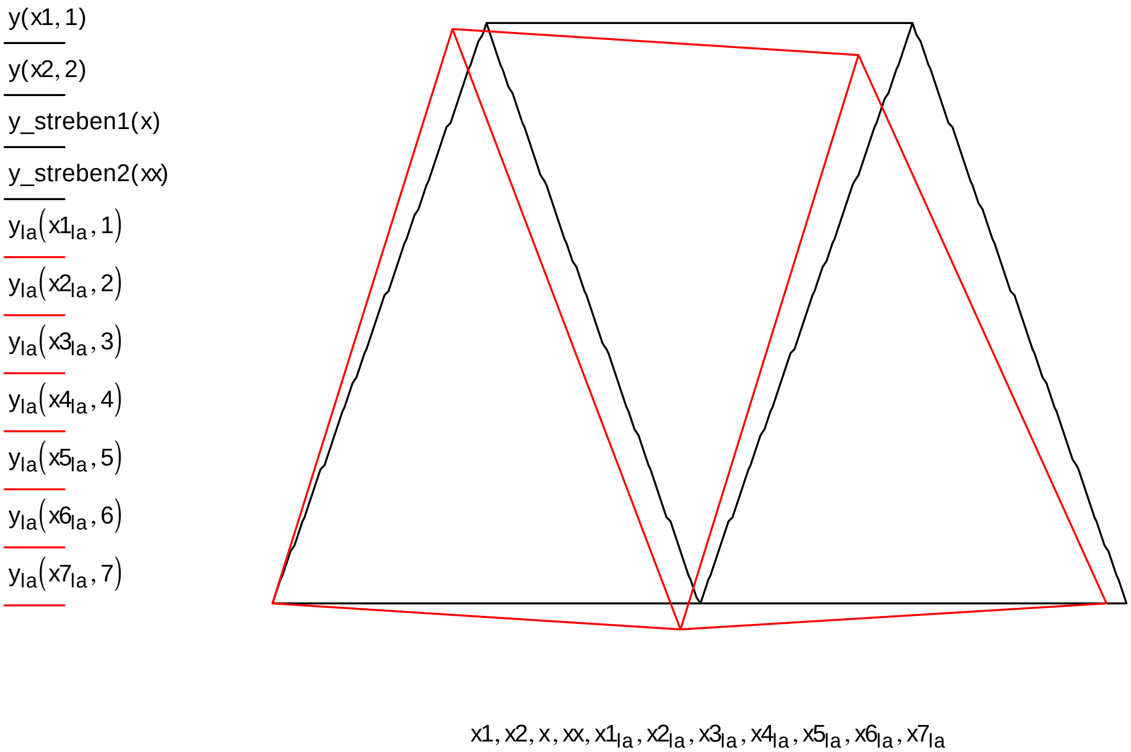
$a := 4 \quad x4_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$a := 5 \quad x5_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$a := 6 \quad x6_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$a := 7 \quad x7_{la} := xa_{la_a}, xe_{la_a} .. xe_{la_a}$

$y_{la}(x, a) := k_{la_a} \cdot x + d_{la_a}$



Einstellungen für die Visualisierung:

Verstärkung der Verformung $f_{st} \equiv 400$

Schritte für die Animation $Schritt \equiv 10$

Animation

Zuerst Auswertung "FRAME≡Schritt" deaktivieren: (über rechte Maustaste im Kontextmenü): $FRAME \equiv Schritt$

Danach Animation wie folgt durchführen:

"Ansicht" - "Animieren..." - Standartwerte für FRAME übernehmen.
Bereich im vorhergehenden Graph wie unten angezeigt wählen.